「理工系 微分積分学 –第 3 版–」
（荒井正治著・学術図書出版社）
2011 年 4 月 4 日

先生方へ

本書は，（数学科とか数理科学科といった数学を専攻するのではない）理工系の学生が初年度に学ぶ解析学の教科書として書かれたものであるが，実数論（いわゆる，ε–δ 論法）を基礎においた論理構成は採用していない．それ以外の点ではできる限り証明を付けたが，実数論が無ければ証明できない命題（連続関数が有界閉区間上では最大値，最小値をとるとか，中間値をとるとかといった命題）は，学生諸君に「なるほど」と思わせる説明を心がけた．また，厳密な証明ではないが，本書のレベルではこれで満足してもらおうという証明を「擬証明」としてかかげるなど，読者に納得感をもたせるように努めた．

理工系の学生が初年度に学ぶべき解析学の内容は，伝統的にほぼ定まっている．1 変数と多変数の微分法と積分法である．その意味では，本書の内容もまた類書とほぼ同じものである．ただ，1 変数（の微分法と積分法）を先に教え，その後多変数（の微分法と積分法）を教えるか（類書はほとんどこれ），微分法（1 変数と多変数）を先に教え，その後積分法（1 変数と多変数）を教えるかの違いとか，1 変数の微分法と積分法を同時に教えるとかの違いはあろう．

著者の勤務する立命館大学の理工系（数理科学科を除く）における解析系の科目では，前期に微分法（1 変数と多変数）を，後期に積分法（1 変数と多変数）を教えることとしているので，本書もそのスタイルに添っている．立命館大学では，前期と後期では担当者が変わることがありえることを前提として，前期には本書の第 1 章から第 3 章までを教え，後期には本書の第 4 章と第 5 章の 5.6 節までを必ず教え，それ以降は担当者の裁量に任せることとしている．この方法だと前期には教えるべきものが多過ぎ学生には過重な負担となるが，限られた時間内に限られたことを教えようとすると致しかたなく，担当者各自が丁寧に教えるところ，さらりと触れるところを工夫している．

本書では，時間が無ければ飛ばしても良い箇所を小さな活字にしてあるが，活字の大小は，注意しなければなかなかわからないようだ．

また，以下の記述もその工夫のヒントになるかもしれない．

§1.1　第 3 版では数直線についての説明を簡単に付け加え，絶対値の説明も書き換えた．また，学生諸君は絶対値を含んだ不等式についてさまざまな間違いを犯すので，練習問題 1.1 (A) の 5 を追加した．

p.7 の 3 行目

$$(0 \leqq)\ |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\,| = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| < \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}$$

の最後の不等式に，例年質問が集中するところである．

例題 1.1.4 について：ここにあげた数列がどれも $n \to \infty$ のときに ∞ に発散することは重要な事実であるが，発散の速さという考えもまた工科系においても重要であるので，そのような考えに慣れさせるために例題をこのような形にした．しかし，そのような考えがこの時点ではまだ難しいと思われるなれば，ここにあげた数列を $n \to \infty$ のときに ∞ に発散する数列の例としてあげるだけに止めておいても良いだろう．

§2.4 (B) 無限小，(C) 無限大　いわゆる order は，工科系にとっては必須の事項だ思って書き込んでおいたが，難しすぎるようなら深入りしない方が良いだろう．

無限小，無限大が同位であることの定義が間違っていたので，第 3 版で訂正した．

§2.6 (B) 極限についての補足　ここでは，いわゆる ε–δ について触れられているが，著者としては，これを「極限の厳密な定義」として書いたのではなく，単なる「極限の 1 つのとらえかた」というスタンスで書いた．また，収束の速さという考えは工科系においては重要なことであろう．この部分は，後では極力使わないようにしようとした

が，例題 2.6.3（と練習問題 2.6 (B) 3）を何度か使わざるをえなかった．

§2.5 テイラーの定理　旧版では，$x \to a$ の場合の議論と $n \to \infty$ の場合の議論が錯綜していたので，後者を C として独立させた．これで少しは読みやすくなったであろう．

§3.1 の開集合だとか領域だとかは深入りする必要はないだろう．ε-近傍と開集合だけを定義するのでも良かったのであるが，定理 3.4.5 （最大値・最小値の存在）のことを考えると，こういう形に落ち着いた．

§3.3 合成関数の偏微分法　連鎖律にまつわる話は少し丁寧に書いたつもりである．写像 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ における

$$\Delta \boldsymbol{x} \mapsto \Delta \boldsymbol{y}$$

の 1 次の部分の行列表示であるヤコビ行列については是非触れておきかったが，線形代数の講義においても線形性がクローズアップされるのは後期になってからであるという状況では，学生に対する説得力に欠けるきらいもあるが，定理 3.3.4 の擬証明では威力を発揮している．

§4.1 原始関数　不定積分の公式を初級コースと中級コースに分け，「中級コースの公式は暗記しなくても良いですよ」という教えかたが可能な書きかたにしておいた．

§4.2 定積分　「定積分の定義に従って，関数 $f(x) = x$ が $[a, b]$ 定積分可能であることを証明し，その定積分の値を求めよ」という問題を出そうとしたが，難しいので止めた．どなたか，簡単な証明（本書の練習問題 (A) のレベル）をご存じでしょうか．

§4.4 微分積分と数理モデル　ここは，微分方程式の解法を目的とはしていず，数学が具体的な問題の解決に役立ちますよ，ということを言いたかったのであるから，担当者によっては飛ばすこともありえよう．

第 5 章 重積分　重積分の定義は，伝統的には，

1. 長方形上での重積分の定義
2. 面積確定な集合とその上での重積分の定義
3. 基本集合の定義
4. 基本集合が面積確定であり，その上での連続関数が可積分であることの紹介

と進むが，本書では「面積確定」という概念は表に表さず，

基本集合の定義とその上での重積分の定義

だけに話を限定した．

§5.7 ストークスの定理などは全然教えないということもありえようし，2 次元（A. 線積分・グリーンの定理）の部分だけ講義するということも考えられよう．

§6.2 の定義 6.4.2 の**絶対一様収束**という語について：ある先生から「そのような用語はあるのか」と指摘され，慌てて調べてみると，使用例が無いわけではないが，ほとんど無く，ポピュラーな用語ではないことがわかった．

多くの類書では，ワイエルシュトラスの優級数定理（定理 6.2.9）の結論を

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \text{ が収束し，} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ が一様収束する} \tag{$*$}$$

と書いており，それから導かれる巾級数の理論も

$$\text{収束円の内部では絶対収束し，収束円の完全内部では一様収束する} \tag{$**$}$$

という形になっているようである．

$(*)$ を絶対一様収束とよんでいる本もあるが，これは本書での定義とは異なる．本書の意味で絶対一様収束する関数列は，当然 $(*)$ をみたすが，逆は必ずしも正しくはない．練習問題 6.2 (B) 5 はその反例である．

なお，本書で絶対一様収束とよんだものを「絶対かつ一様収束」とよんでいる本もあったが，小生にはこの語は $(*)$ に相応しい語のように思われる．