A.6 多次元正規分布

この節では n 次元確率変数を $\boldsymbol{X} = {}^t(X_1, ..., X_n) = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ と表す．
（ ${}^t(\cdots)$ は転置を表す．）

【平均ベクトル，共分散行列】

$\boldsymbol{X} = {}^t(X_1, ..., X_n)$ に対し，${}^t\big(E[X_1], ..., E[X_n]\big)$ を $\boldsymbol{X}$ の「平均ベクトル」といい，$\boldsymbol{m}$ または $E[\boldsymbol{X}]$ で表す．また，n 次行列 $\Big(\mathrm{Cov}\ (X_i, X_j)\Big)_{ij}$ を $\boldsymbol{X}$ の「共分散行列」(分散共分散行列）といい，$\boldsymbol{\Sigma}$ または $V[\boldsymbol{X}]$ で表す．

$$\boldsymbol{m} = E[\boldsymbol{X}] = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = V[\boldsymbol{X}] = \Big(\mathrm{Cov}\ (X_i, X_j)\Big)_{ij}$$

【 n 次元正規分布】 $N(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$

$\boldsymbol{m}$ を n 次元（列）ベクトル，$\boldsymbol{\Sigma}$ を n 次正定値対称行列とする．このとき，
同時密度関数：

$$f(x_1, ..., x_n) = (2\pi)^{-n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\Big(-\frac{1}{2}\, {}^t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})\, \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})\Big)$$

（ $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, ..., x_n)$， $|\cdot|$ は行列式を表す： $|\boldsymbol{\Sigma}| = \det \boldsymbol{\Sigma}$ ）

によって定まる同時確率分布を「n 次元正規分布」といい，$N(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$ と表す．

* $\boldsymbol{X}$ が $N(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$ にしたがうとき，$E[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{m}$，$V[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{\Sigma}$

つまり，パラメータ$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{\Sigma}$ はそれぞれ平均ベクトル，共分散行列になっている．

【2 次元正規分布】 $N(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\Sigma})$

$n = 2$ の場合，$\boldsymbol{X} = {}^t(X, Y)$，$\boldsymbol{m}$ ：2 次元ベクトル，$\boldsymbol{\Sigma}$ ：2 次正定値対称行列，
同時密度関数：

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\Big(-\frac{1}{2}\, {}^t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})\, \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})\Big)$$

* $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}\ (X, X) & \mathrm{Cov}\ (X, Y) \\ \mathrm{Cov}\ (X, Y) & \mathrm{Cov}\ (Y, Y) \end{pmatrix}$

この同時密度関数を書き換えると次のようになる：

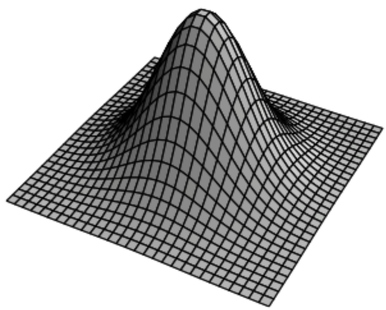
$$
\begin{aligned}
f(x,y) = & \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}} \times \exp\Bigg[-\frac{1}{2(1-r^2)} \Bigg\{ \left(\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)^2 \\
& \qquad - 2r\left(\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}\right)^2 \Bigg\} \Bigg]
\end{aligned}
$$

$$(m_X, m_Y \in \boldsymbol{R}, \quad \sigma_X, \sigma_Y > 0, \quad -1 < r < 1 \quad ; \quad (x,y) \in \boldsymbol{R}^2)$$

ここで,

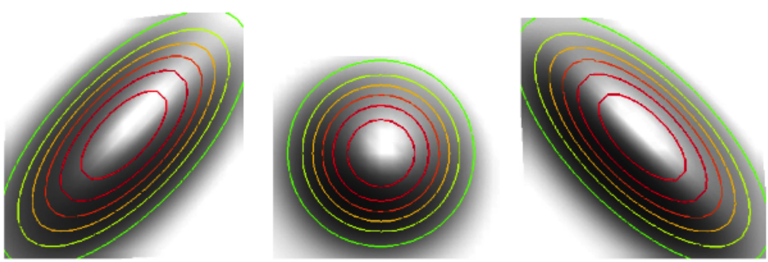
$$
\begin{aligned}
& m_X = E[X] && m_Y = E[Y] \\
& \sigma_X^2 = V[X] && \sigma_Y^2 = V[Y] \\
& r = r(X,Y) && \text{(相関係数)}
\end{aligned}
$$

である．同時密度関数のグラフの概形は下のようになり，点 (m_X, m_Y) で最大となる．



$\sigma_X = \sigma_Y$ のとき，等高線を入れて上から見ると相関係数によって次のようになる．

$r > 0$ $r = 0$ $r < 0$



$\uparrow Y$

$\rightarrow X$