工科のための 微分積分学

— 第 3 版 —

演習問題解答集

2009 年 5 月 7 日

目　次

解答とヒント

第 1 章

問題 1.1　(1) n^2　(2) 1　(3) $\dfrac{1}{2^n}$　(4) $(-1)^{n-1}$

問題 1.2　等差数列であるのは (2)(公差 0), 等比数列であるのは (2)(公比 1), (3)(公比 $\dfrac{1}{2}$), (4)(公比 -1) である.

問題 1.3　この等差数列の第 k 項 a_k は $a_1+(k-1)d$ である. これを用いて形式的に式の変形を行えばよい.　(別解) 初項が a_n で公差が $-d$ の等差数列 $\{b_k\}$ を考える. $b_k=a_n-(k-1)d=a_1+(n-k)d$ だから $a_k+b_k=2a_1+(n-1)d=a_1+a_n$ となり定数である. このような項を n 個加えればその値はこれの n 倍である.　一方, $\{a_k\}_{k=1,2,\cdots,n}$ と $\{b_k\}_{k=1,2,\cdots,n}$ は並ぶ順序が逆になっているだけだからそれらの和は同じである. したがって, 求める和は上で求めた値の半分である.

問題 1.4　(1) 分子と分母をそれぞれ n^3 で割ると分子と分母が極限をもつ形になる. 極限値は 1.　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4+n+3}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+n+3}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+n+3}+n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n+3-n^4}{\sqrt{n^4+n+3}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{\sqrt{n^4+n+3}+n^2}=0$$

(3) 等式 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ を用いる. 答は $\frac{2}{3}$

問題 1.5　(1) $a_2=\frac{3}{2}, a_3=\frac{17}{12}$　(2) 相加相乗平均の不等式を用いればよい.

(3) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2a_n}\left(2-a_n^2\right)$ であり, (2) よりこの値は $\leqq 0$ となる.　(4) 極限値を α とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$ より $\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\alpha+\dfrac{2}{\alpha}\right)$ となる. これを解いて $\alpha=\pm\sqrt{2}$ となる. この数列の各項は常に正より極限値も正. よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$

問題 1.6　(1) $s_{2k+1}=s_{2k-1}-(a_{2k}-a_{2k+1})$ と条件により $s_{2k+1}\geqq s_{2k-1}$ となる. (2) 前問と同様.　(3) $a_{2k-1}\geqq a_{2k'}$ より $\{s_{2k-1}\}$ は下に有界で, $\{s_{2k'}\}$ は上に有界である. よって, どちらの数列も収束する. それらの極限値をそれぞれ c, c' とすれば $0=\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2k+1}=\lim_{n\to\infty}(s_{2k+1}-s_{2k})=c-c'$ が得られ, $c=c'$ となる.

問題 1.7　(1) $(x-3)(x+1)<0$ より $[-1,3]$　(2) $x(x-1)(x+1)\geqq 0$ より

$[-1,1]\cup[1,\infty)$　(3)　$[0,\infty)$　(4)　すべての実数が満たすので $(-\infty,\infty)$

問題 1.8　(1)　x^2+ax+a^2　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\frac{1}{2}$

問題 1.9　$b=f(a)$ とすると $a=g(b)$ となっている. したがって, $g(f(a))=g(b)=a$ となる. つまり, $f(x)$ の逆関数が定義できる範囲で $g(f(x))=x$ が成立する.

問題 1.10　(1)　$a^m>b^m$　(2)　$a\geqq 1$ のときは $a^m>b^n$, それ以外は決定できない. たとえば $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^2$ から $m>n$ であってもすべての場合が出てくることがわかる.

問題 1.11　(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=-1$　(2)　$a>1$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{-2n}}{1+a^{-2n}}=1.$

$a=1$ のとき, 分子が常に 0 だから極限値も 0.

$1>a>0$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}-1}{a^{-2n}+1}=-1$

問題 1.12　省略

問題 1.13　(1)　$2^{10-3}=2^7$　(2)　$3^{(-3)-(-3)}=3^0=1$　(3)　$\dfrac{\left(2^2\right)^3}{2^5}=2^{6-5}=2^1=2$

(4)　$(2\cdot 5)^{-2}5^{-2}2^4=2^{-2+4}5^{-2-2}=2^2 5^{-4}$

問題 1.14　$a>1$ のとき $\sqrt[m]{a}<\sqrt[n]{a}$, $a=1$ のとき $\sqrt[m]{a}=\sqrt[n]{a}$, $0<a<1$ のとき $\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{a}$

問題 1.15　(1)　$\left(3^2\right)^{1/2}=3$　(2)　$\left(2^4\right)^{1/4}=2$　(3)　$\left(3^4\right)^{1/4}=3$　(4)　$\left(2^3\right)^{2/3}=2^2$

(5)　$25^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=25\ 1/2=5$　(6)　$27^{\frac{2}{5}-\frac{1}{15}}=27^{1/3}=3$　(7)　$\left(2^2\right)^{1/4}\left(2^3\right)^{2/3}2^{-3/2}=2^{\frac{1}{2}+2-\frac{3}{2}}=2^0=1$　(8)　$2^{\frac{2}{3}-2\frac{5}{9}+\frac{4}{9}}5^{\frac{2}{3}-\frac{5}{9}+2\frac{4}{9}}=2^0 5^1=5$

問題 1.16　(1)　有理数 α,β の分母の最小公倍数を N とする. $b=a^{\frac{1}{N}}$ とおけば問題 1.10 の不等式になる.　(2)　問題 1.10 により数列 $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ は単調減少な数列で, 常に $a^{\frac{1}{n}}>1$ が成立するのでこの数列には極限値 $c\,(\geqq 1)$ が存在する. もし, $c>1$ とすると常に不等式 $a^{\frac{1}{n}}>c$ が成立し, 数列 $\{c^n\}$ が上に有界になる. $c>1$ よりこれは矛盾. よって $c=1$.

問題 1.17　(1)　定義域 $(-\infty,\infty)$, 値域 $(0,\infty)$　(2)　$a>1$ のとき単調増大, $a<1$ のとき単調減少. $a=1$ のとき定数関数.　(3)　$a=1$ のとき 1, $a<1$ のとき 0, $a>1$ のとき存在しない.　(4)　$a=1$ のとき 1, $a>1$ のとき 0, $a<1$ のとき存在しない.

問題 1.18　(1)　$4=2^2$ より 2　(2)　4　(3)　$10=10^1$ より 1　(4)　$1=20^0$ より 0

(5)　$\frac{1}{8}=2^{-3}$ より -3　(6)　$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$ より $\dfrac{1}{2}$　(7)　$9=3^2=\sqrt{3}^4$ より 4

(8)　$16=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$ より -4　(9)　$10=100^{\frac{1}{2}}$ より $\frac{1}{2}$　(10)　$4=2^2=\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2=8^{\frac{2}{3}}$ より $\frac{2}{3}$

問題 1.19　(1)　$\log_2\frac{6}{3}=\log_2 2=1$　(2)　$\log_3 9=2$　(3)　$\log_3\left(\frac{54}{5}\times\frac{1}{10}\times\frac{25}{3}\right)=$

$\log_3 9 = 2$　(4) 対数の中に現れる数はすべて 2, 3, 5 の数の積となっているのでこれらの数の対数で計算してみる. $\log_2 \dfrac{15}{16} = \log_2 3 + \log_2 5 - 4\log_2 2$, $\log_2 \dfrac{24}{25} = \log_2 3 + 3\log_2 2 - 2\log_2 5$, $\log_2 \dfrac{81}{80} = 4\log_2 3 - 4\log_2 2 - \log_2 5$ だから与えられた式は $\log_2 2$ の係数が $(-7)(-4)+(-5)3+3(-4) = 1$, $\log_2 3$ の係数が $(-7)1+(-5)1+3\cdot 4 = 0$, $\log_2 5$ の係数が $(-7)1+(-5)(-2)+3(-1) = 0$ となるので $\log_2 2 = 1$

問題 1.20　(1) $\log_2 5 \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3} = 1$　(2) $\dfrac{\log_3 3}{\log_3 9} - \dfrac{\log_3 18}{\log_3 3} + \dfrac{\log_3 8}{\log_3 27}$
$= \dfrac{1}{6}(3 - 6\log_3 18 + 2\log_3 8) = \dfrac{1}{6}(3 - 12 - 6\log_3 2 + 6\log_3 2)$

問題 1.21　(1) 対数をはずせば $x(x-2) = 3$ となる. この方程式を解いて $x = -1, 3$　(2) $X = \log_2 x$ とおくと $X = -2, 3$. これより $x = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$ と $x = 2^3 = 8$ を得る.

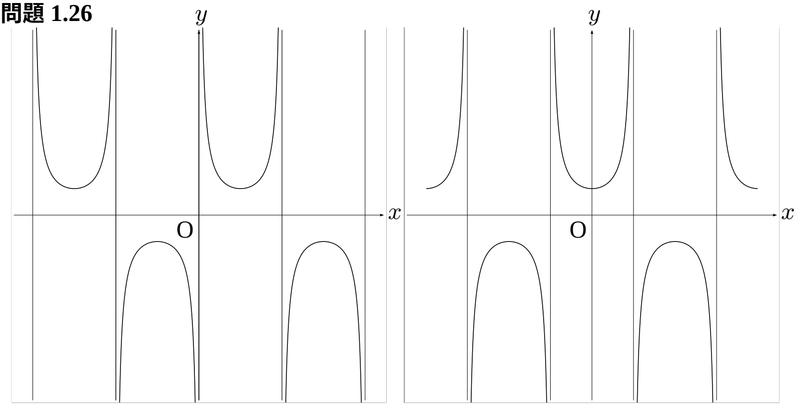
問題 1.22　(1) $\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ とする (m, n は整数.) と $2^m = 3^n$ となり, これが成立するのは $m = n = 0$ のときだけ. $mn \neq 0$ であるので矛盾.　(2) 条件から $\log_5 2^m 3^n 5^l = 0$ が得られ, $2^m 3^n 5^l = 1$ となる. 整数の性質から $l = m = n = 0$ が成立する.

問題 1.23　(1) $\frac{\pi}{6}$　(2) $\frac{\pi}{12}$　(3) π　(4) 2π　(5) $-\frac{2\pi}{3}$　(6) $-\frac{3\pi}{4}$　(7) $-\frac{3\pi}{2}$　(8) -4π

問題 1.24　(1) 弧度法の定義から $\alpha = lr$ より $l = r\alpha$ となる.　(2) 同じ半径をもつ円の面積は πr^2 である. 扇形の面積は中心角に比例するので求める面積は $\pi r^2 \times \dfrac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2}lr$ となる.　(3) 角度の単位が複雑になったので面積の公式では円周率が現れなくなり簡単になっている. また, 後の式 $\frac{1}{2}lr$ は面積が弧の長さと半径の積の半分ということを示しており, 三角形の面積の公式と同じような形をしていることがわかる.

問題 1.25　(1) x 軸に関して対称な点の x 座標は同じ.　(2) x 軸に関して対称な点の y 座標は符号が逆.　(3) (1) と (2) より明らか.

問題 1.26



cosec x のグラフ　　　　sec x のグラフ

問題 1.27

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\mathrm{cosec}\, x$
0	0	1	0	—	1	—
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	1	0	—	0	—	1
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$	2	$-2\sqrt{3}/3$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}/3$	2
π	0	-1	0	—	-1	—
$-\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$-5\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
-2π	0	1	0	—	1	—

問題 1.28　どちらの場合も加法定理と $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ を用いて証明する．

問題 1.29　加法定理で $\alpha = \beta$ とおいた式を考えればよい．(1) ではこのほかに $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ を用いてさらに変形している．

問題 1.30　(1) $\sin\dfrac{\pi}{12}$ のときと同様に計算する．結果は $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(2) 加法定理より $\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$　(3) $\cos\dfrac{\pi}{4} = 1-2\sin^2\dfrac{\pi}{8}$ と $\sin\dfrac{\pi}{8} > 0$ より，

$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (4) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 = 2-\sqrt{3}$

問題 1.31　$\arcsin 0 = 0,\ \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2},\ \arcsin\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}$(複号同順),

$\arcsin\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\dfrac{\pi}{4}$(複号同順)

問題 1.32　余弦関数が 1 対 1 であるような区間としては $[0,\pi]$ や $[-\pi,0]$ がとれる. これをもとにして逆関数を考えればよい. $[0,\pi]$ をとると逆関数は単調減少であり, $[-\pi,0]$ をとると単調増大な関数となることに注意.

問題 1.33　$\arctan 0 = 0, \arctan(\pm 1) = \pm\dfrac{\pi}{4}, \arctan\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pm\dfrac{\pi}{6},$

$\arctan\left(\pm\sqrt{3}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}$, (すべて複号同順)

章末問題

1 (1) $\sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$
$= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta = 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta$ を整理すればよい. (2) 前問と同様. (3) 右辺を加法定理で展開する. (4) 前問と同様 (5) 右辺を直接計算する. (6) (3) で $A=\alpha+\beta, B=\alpha-\beta$ とおいて α,β の代わりに A,B を用いた式に直す. その後, A,B を α,β に戻せばよい. (7) 前問と同様 (8) 前問と同様 (9) 前問と同様

2 (1) $\sin 3\theta = \sin(\pi-3\theta) = \sin 2\theta$ (2) 問題 1 の (1) と前問により $3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ である. ここで $\sin\theta \neq 0$ であるから両辺をそれで約すれば次の式を得る. $3-4\sin^2\theta = 2\cos\theta$ つまり $3-4\left(1-t^2\right) = 2t$ を整理して $4t^2-2t-1=0$ を得る.
(3) $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ ($t>0$ に注意.)

3 (1) 左辺を S と置き, $(\sin\theta)S$ を考える. 展開した各項は

$$\sin\theta\sin k\theta = \frac{1}{2}\{\cos(k-1)\theta - \cos(k+1)\theta\}$$

となる. $k=1,2,\cdots,n$ として辺々加えると

$$\begin{aligned}(\sin\theta)S &= \frac{1}{2}\left(\cos 0\theta + \cos\theta - \cos n\theta - \cos(n+1)\theta\right)\\ &= \left(\sin(0+n)\frac{\theta}{2} + \sin(2+n)\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{n\theta}{2} = 2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}\end{aligned}$$

$\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ を利用して整理すればよい.　(2) 前問と同様

4 (1) 定義の式を代入すればよい. (2) 右辺を定義にしたがって展開する. 符号に注意. (3) 定義の式を直接代入して計算. (4) $\cosh x$ は偶関数なので逆関数を考えるときは 2

通りある. $x > 0$ のとき正になるようにすると, その逆関数は $\log_e\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ となる. $\sinh x$ の逆関数は $\log_e\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

5 (1) $\alpha = \arctan\frac{1}{2}, \beta = \arctan\frac{1}{3}$ とおく.

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$ となる. 一方, $\arctan x$ は単調増大な関数だから $0 < \alpha < \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$($\beta$ も同様) なので $0 < \alpha + \beta < \dfrac{\pi}{2}$ である. この範囲で $\tan x$ が 1 になるのは $\dfrac{\pi}{4}$ しかない. (2) 省略 (3) $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$ とおいたとき, $\tan 4\alpha$ は $\tan 2\alpha$ から計算する.

6 (1) 左辺を展開すれば実部と虚部の値がそれぞれ $\cos x$ と $\sin x$ の加法定理そのものになる. (2) 数学的帰納法を用いて証明する. (3) $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ なので $n = -1$ のときに成立する. 後は, 正の場合の結果を利用すればよい. (4) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくと $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta = 1$ より $\cos n\theta = 1, \sin n\theta = 0$ を得る. これから $n\theta = 2k\pi$ (k は整数) となる. したがって, 異なる解は $z = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ が得られる. (5) 等比級数の和の公式を用いて分子, 分母に $1 - \cos\theta + i\sin\theta$ を掛けて整理すればよい. $(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2(1 - \cos\theta) = 4\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ を利用せよ.

7 (1) 与えられた式を展開して係数比較をする. $2a - b = -5,\ -2bc = -2,\ a^2 - bc^2 = 3.$ 最後の式の両辺に b を掛けると

$$a^2b - b^2c^2 = a^2(2a+5) - 1 = 3(2a+5) \text{ つまり } 2a^3 + 5a^2 - 6a - 16 = 0$$

が得られる. 解として $a = -2$ があるのでこのとき $b = 1,\ c = 1$ となる. (残りの解では計算が大変である.) (2) $x^2 - 2 = \pm(x+1)$ より $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

8 (1) 条件から $p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_n^{m_n} = 1$ が得られる. 素因数分解を考えれば $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 0$ のときしか成立しない. (2) 現れた有理数の分母の最小公倍数を掛ければ (1) の場合になる. (3) 現れている数の素因数は $2, 3, 5$ だけである. $\log_{10} 2, \log_{10} 3, \log_{10} 5$ でまとめると次の式になる.

$$(-4l + 3m - 4n)\log_{10} 2 + (l + m + 4n - 1)\log_{10} 3 + (l - 2m - n)\log_{10} 5 = 0$$

前問によりそれぞれの対数の係数が 0 になる. それを解けば $l = -11, m = -8, n = 5.$ が得られる.

第 2 章

問題 2.1　t 秒後人間は街灯から $(50{+}2t)$m の位置にいる. このとき $\dfrac{2}{22} = \dfrac{s(t) - (50 + 2t)}{s(t)}$

問題 2.2　(1) $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{x-c}{x-c}=\lim_{x\to c}1=1$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{x^2-c^2}{x-c}=\lim_{x\to c}(x+c)=2c$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{2x^2+x-3-(2c^2+c-3)}{x-c}=\lim_{x\to c}\left(2\frac{x^2-c^2}{x-c}+\frac{x-c}{x-c}\right)=4c+1$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{c}}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{(x-c)(\sqrt{x}+\sqrt{c})}=\lim_{x\to c}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{c})}=\frac{1}{2\sqrt{c}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{c}}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{x-c}{(x-c)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c}^2\right)}=\frac{1}{3\sqrt[3]{c}^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{c^2+1}}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{\left(c^2+1\right)-\left(x^2+1\right))}{(x-c)\left(x^2+1\right)\left(c^2+1\right)}=-\frac{x+c}{\left(x^2+1\right)\left(c^2+1\right)}$

$\displaystyle=-\frac{2c}{\left(c^2+1\right)^2}$

問題 2.3　問題 2.2 の解答の c を x に書き直す. (1) 1 (2) $2x$ (3) $4x+1$ (4) $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(5) $\displaystyle\frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}$ (6) $\displaystyle-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$

問題 2.4　$((f(x)g(x))h(x))'=(f(x)g(x))'h(x)+(f(x)g(x))h'(x)$

$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

問題 2.5　省略

問題 2.6　公式を直接利用した形で解を記す.項の整理は必要なときにすればよい.

(1) 1 (2) $3x^2+2$ (3) $\left(x^3+1\right)'(x+4)+\left(x^3+1\right)(x+4)'=3x^2(x+4)+\left(x^3+1\right)$

(4) $\displaystyle-\frac{1}{(x+1)^2}$ (5) $\displaystyle\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}$ (6) $\displaystyle\frac{\left(x^3-1\right)-(x+1)3x^2}{\left(x^3-1\right)^2}$

(7) $\displaystyle\frac{\left(x^2+x+1\right)-x\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ (8) $\displaystyle\frac{(2x+1)\left(x^4+x^2+1\right)-\left(x^2+x\right)\left(4x^3+2x\right)}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}$

(9) $5(x+3)^4$(帰納法で示す.) (10) $\displaystyle-\frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$ (11) $\displaystyle-\frac{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{(1-\sqrt[3]{x})^2}$

(12) $\displaystyle\frac{(1+\sqrt[3]{x})-x\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$

問題 2.7　(1) $5(x+3)^4\times(x+1)'=5(x+3)^4$ (2) $7(2x+3)^6\times(2x+3)'=14(2x+3)^6$

(3) $6x\left(x^2-2\right)^2$ (4) $\displaystyle3\left(\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)^2\frac{-x^2-2x+2}{\left(x^2-x+1\right)^2}$ (5) $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

(6) $\displaystyle-\frac{1}{2\sqrt{x+2}^3}$ (7) $\displaystyle3\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ (8) $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ (9) $\displaystyle\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}2x$

(10) $-\left(1+\sqrt[3]{x^2+1}\right)^{-2}\dfrac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}2x$

(11) $\dfrac{\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}\left(1-\sqrt[3]{x+1}\right)-\sqrt[3]{x-1}\left(-\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{x+1}\right)^2}$

(12) $\dfrac{\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x+1}\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}$

問題 2.8　$u=f(x)$ とおくと u^{-1} を微分することになる.

問題 2.9　$y=g(x)$ より $x=f(y)$ となる. この式の両辺を x で微分する.

問題 2.10　$\left(\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n\right)'=n\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1}\dfrac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}=\dfrac{n}{m}x^{\frac{n-1}{m}+\frac{1}{m}-1}$

問題 2.11　(1) $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\times 2=2$　(2) $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}\times x=1\times 0=0$

(3) $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{1}{\cos x}=1$

問題 2.12　(1) $\cos(x-2)\times(x-2)'=\cos(x-2)$

(2) $-\sin(x+3)\times(x+3)'=-\sin(x+3)$

(3) $\dfrac{1}{\cos^2(2x+1)}\times(2x+1)'=2\dfrac{1}{\cos^2(2x+1)}$

(4) $\cos\left(x^2+1\right)\times(x^2+1)'=2x\cos\left(x^2+1\right)$

(5) $-\sin\dfrac{1}{x}\times\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\sin\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(6) $\dfrac{1}{\cos^2\frac{1}{x+1}}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{\cos^2\frac{1}{x+1}}\left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)$

(7) $3\cos^2 x(\cos x)'=3\cos^2 x(-\sin x)$

(8) $2\sin x(\sin x)'=2\sin x\cos x$　(9) $3\tan^2 x(\tan x)'=3\tan^2 x\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(10) $2\tan x^2(\tan x^2)'=2\tan x^2\dfrac{1}{\cos^2 x^2}(x^2)'=2\tan x^2\dfrac{1}{\cos^2 x^2}2x$

(11) $-\dfrac{1}{\sin^2 x}(\sin x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\cos x$

(12) $4(1+\sin x)^3(1+\sin x)'=4(1+\sin x)^3\cos x$

(13) $\dfrac{1}{2}(1-\sin x)^{-1/2}(1-\sin x)'=\dfrac{1}{2}(1-\sin x)^{-1/2}(-\cos x)$

(14) $2(1+\cos 2x)(1+\cos 2x)'=2(1+\cos 2x)(-\sin 2x)(2x)'=4(1+\cos 2x)(-\sin 2x)$

(15) $\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=\dfrac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(16) $\dfrac{1}{2\sqrt{1+\cos 2x}}(-\sin 2x)2$　(17) $\dfrac{1}{2\sqrt{1+\tan^2 x}}2\tan x\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(18) $\dfrac{-\sin x(1-\sin x)-(1+\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

(19) $\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}(1-\tan x)-(1+\tan x)\left(-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)}{(1-\tan x)^2}$

(20) $3\left(1+\tan^2 3x\right)^2 2\tan 3x\dfrac{1}{\cos^2 3x}3$

問題 2.13　(1) $e^{2x}(2x)'=2e^{2x}$　(2) $-\dfrac{1}{(e^x)^2}(e^x)'=-\dfrac{1}{e^x}$($\dfrac{1}{e^x}=e^{-x}$ としても計算できることに注意)　(3) $5\left(1+e^x\right)^4 e^x$　(4) $\dfrac{1}{x}$　(5) $\dfrac{2}{2x+1}$　(6) $-\dfrac{1}{(3+\log x)^2}\dfrac{1}{x}$

(7) $-\dfrac{1}{(e^x+1)^2}e^x$　(8) $\dfrac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

(9) $e^{\log x}(\log x)'=e^{\log x}\dfrac{1}{x}=e^{\log x}\dfrac{1}{e^{\log x}}=1$　(10) $\dfrac{e^x}{1+e^x}$

(11) $2=e^{\log 2}$ より $2^{\log x}=e^{\log 2\log x}=x^{\log 2}$ なので導関数は $\log 2\, x^{\log 2-1}$

(12) $\dfrac{1}{(\log 3)(x+2)}$　(13) $e^{\sin x}\cos x$　(14) $\cos(\log x)\ \dfrac{1}{x}$

(15) $\sin(\log x)+x\cos(\log x)\ \dfrac{1}{x}$　(16) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$　(17) $-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$

(18) $\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　(19) $e^{e^x}e^x$　(20) $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　(21) $\dfrac{\dfrac{1}{2}\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}}{1+\sqrt{e^x+1}}$

問題 2.14　両辺の対数をとった式 $\log|y|=\log|f_1(x)|+\log|f_2(x)|+\cdots+\log|f_n(x)|$ の両辺を微分すればよい.

問題 2.15　(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(2x)'=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

(2) $\dfrac{1}{1+(x+1)^2}(x+1)'=\dfrac{1}{1+(x+1)^2}$　(3) $2\arctan x(\arctan x)'=\dfrac{2\arctan x}{1+x^2}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}\left(x^2-1\right)'=\dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}$　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(6) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{1+x^2}$　(7) $-\dfrac{1}{\arcsin^2 x}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(8) $-\dfrac{1}{\arctan^2 x}\dfrac{1}{1+x^2}$　(9) $\dfrac{\arctan x-\dfrac{x}{1+x^2}}{\arctan^2 x}$　(10) $2\arctan\left(x^2+1\right)\frac{2x}{1+\left(x^2+1\right)^2}$

(11) $\dfrac{1+\arctan^2 x-x(2\arctan x)\frac{1}{1+x^2}}{(1+\arctan^2 x)^2}$　(12) $\dfrac{1}{\sqrt{1-\arctan^2 x}\,(1+x^2)}$

問題 2.16　(1) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ より $-\dfrac{1}{x^2}$　(2) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ より $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$
(3) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}^3}$　(4) $\left(e^{-2x}\right)' = -2e^{-2x}$ より $4e^{-2x}$
(5) $\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)' = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$ より $\dfrac{2\left(3x^2+1\right)}{(x^2-1)^3}$
(6) $\left(\dfrac{x}{x^2-x-1}\right)' = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-x-1)^2}$ より $\dfrac{2\left(x^3+3x-11\right)}{(x^2-x-1)^3}$
問題 2.17　(1) 第 1 次 $8(2x+1)^3$, 第 2 次 $8\cdot 6(2x+1)^2$, 第 3 次 $8\cdot 6\cdot 4(2x+1)$, 第 4 次 $2^4 4! = 384$, 第 5 次以上 0　(2) $\dfrac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$　(3) $\dfrac{(-3)^n n!}{(3x+1)^{n+1}}$　(4) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$
(5) $n = 4k$ のとき $3^n \sin 3x$, $n = 4k+1$ のとき $3^n \cos 3x$, $n = 4k+2$ のとき $-3^n \sin 3x$, $n = 4k+3$ のとき $-3^n \cos 3x$　(6) $2^n e^{2x}$　(7) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}x^{-3/2}\right), \ldots$
(8) $n = 1$ のとき $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$, $n > 1$ のとき $(-1)^{n-1} 1\cdot 3\cdots(2n-3)(2x-3)^{(2n-1)/2}$
(9) $a^x = e^{(\log a)x}$ だから $(\log a)^n a^x$
問題 2.18　省略
問題 2.19　ライプニッツの定理を直接適用する.(1)–(4) では項の数が 2 または 3 になる.
(1) $n = 4k$ のとき $x\sin x - n\cos x$, $n = 4k+1$ のとき $x\cos x + n\sin x$,
$n = 4k+2$ のとき $-x\sin x + n\cos x$, $n = 4k+3$ のとき $-x\cos x - n\sin x$
(2) $(x^2-1)e^x + n\cdot 2xe^x + n(n-1)e^x$
(3) $n = 4k$ のとき $2^n x^2 \cos 2x + 2^n nx \sin 2x - 2^{n-2} n(n-1)\cos 2x$,
$n = 4k+1$ のとき $-2^n x^2 \sin 2x + 2^n nx\cos 2x + 2^{n-2}n(n-1)\sin 2x$,
$n = 4k+2$ のとき $-2^n x^2 \cos 2x - 2^n nx \sin 2x + 2^{n-2}n(n-1)\cos 2x$,
$n = 4k+3$ のとき $-2^n x^2 \sin 2x - 2^n nx\cos 2x - 2^{n-2}n(n-1)\sin 2x$
(4) $n = 1$ のとき $\dfrac{x}{2+x} + \log(2+x)$,
$n > 1$ のとき $x\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(}2+x)^n + \dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(2+x)^{n-1}}$　(5) ライプニッツの公式に当てはめる.　(6) ライプニッツの公式に当てはめる.
問題 2.20　(1)$y'\left(x^2+1\right) = 1$ の両辺を $n+1$ 回微分すればよい.　(2)(1) で求めた式に $x = 0$ を代入する. n が偶数のとき 0, $n = 2k+1$ のとき $(-1)^k(2k)!$
問題 2.21　(1) 求める直線の傾きが $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ より直線の方程式は
$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ である.　(2) 省略 (3) ロルの定理により $F'(c) = 0$ を満たす c が a と b の間に存在する. $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ であるので定理が証明できる.
問題 2.22　$F(x) = (f(x)-f(a)) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-b(a)}(g(x)-g(a))$ とおけばよい.

問題 2.23　$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots$, $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$, $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$

問題 2.24　(1) $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$ より, $\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}+\cdots$ となり, $x \to 0$ のとき 1 となる.　(2) $1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\cdots$ より実数部は $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$ となる. これは $\cos x$ のテイラー展開のはじめの項と一致する. 虚数部も同様である.

問題 2.25　省略

問題 2.26　与えられた関数の導関数は順に $2x\cos x^2, 2\cos x^2-(2x)^2\sin x^2, -4x\sin x^2-8x\sin x^2-(2x)^3\cos x^2$ となりもとの関数からの $x=0$ における値は順に 0, 0, 2, 0 となるのでこのテイラー展開は $0+0x+\frac{2x^2}{2!}+0x^3$ となり, 代入したものと一致している.

問題 2.27　(1) n 次導関数は $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)(1-x)^{-1/2-n}$ よりテイラー展開の x^n の係数は $\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$　(2) 前問の係数が x^{2n} の係数になる.奇数次の係数は 0.　(3) x^{2n+1} の係数が $\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)(2n+1)}$ となる. $\arcsin^{(2n+1)} x$ の $x=0$ での値は例題 2.13 より $(2n-1)^2(2n-3)^2\cdots1^2$ であったのでこれを $(2n+1)!$ で割った値と一致している.

問題 2.28　(1) $f(x)$ のテイラー展開で x に $-x$ を代入したものがもとのテイラー展開に一致することから得られる. または条件から $(-1)^n f^{(n)}(-x) = f^{(n)}(x)$ が得られる. $x=0$ を代入して, 奇数の n にたいし $f^{(n)}(0)=0$ となる.　(2) 前問と同様である.

問題 2.29　(1) 問題 1.25 より偶関数 (2) 問題 1.25 より奇関数 (3) $\sin x$ が奇関数だからその逆関数も奇関数 (4) $\tan x$ が奇関数だからその逆関数も奇関数

(5) $e^{-x}-e^{-(-x)} = -\left(e^x-e^{-x}\right)$ より奇関数

(6) $\log\dfrac{1-(-x)}{1-x} = \log\dfrac{1+x}{1-x} = \log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\log\dfrac{1-x}{1+x}$ より奇関数

(7) $\log\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right) = \log\dfrac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$= \log\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = -\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ より奇関数

(8) $-\dfrac{x}{e^{-x}-1}-\dfrac{x}{2} = -\dfrac{xe^x}{1-e^x}-\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{e^x-1}+\dfrac{x\left(e^x-1\right)}{e^x-1}-\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{e^x-1}+\dfrac{x}{2}$ より偶関数

問題 2.30　(1) $a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$ と $(f(x)\pm g(x))^{(k)} = f^{(k)}(x)\pm g^{(k)}(x)$ を用いる.　(2) ライプニッツの定理 2.8 を用いよ.

問題 2.31　$1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\cdots$

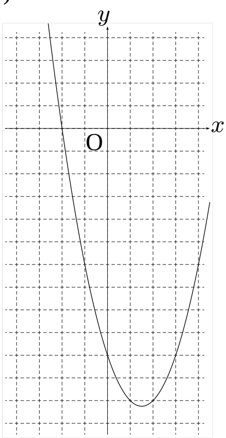
問題 2.32　(1) $f'(x) = 2x(x-1)^3+3x^2(x-1)^2$ より $f'(0)=0$. $f''(x) = 2(x-1)^3+2x\cdot3(x-1)^2+6x(x-1)^2+3x^2\cdot2(x-1)$ より $f''(0)=-2$. $n=2$ で定理の条件を満たすので極値をとる.$f''(0)<0$ より極大 (2) $f'(x) = e^x-(1+2x)^{-1/2}$ より $f'(0)=0$　(3) $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}-2x = -\frac{2x^3}{1+x^2} = -2x^3(1-x^2+\cdots)$ より $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=-12$ となる. $x=0$ で極小.

問題 2.33　ある点で $y''=0$ であるがその近くでは y'' の符号が一定であるものを探せばよい. $y=x^4$ で $x=0$ が一番簡単な例であろう.

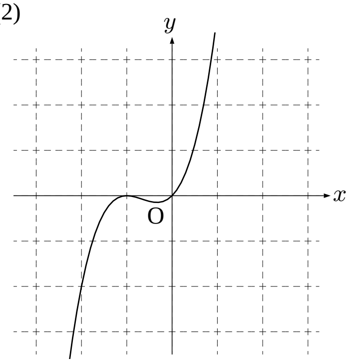
問題 2.34　(1)　$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$. $f''(x)=0$ より $x=n\pi$(n は整数). これらの点で $f''(x)$ は符号を変えるのですべて変曲点.　(2)　$f'(x)=4x^3-8x$, $f''(x)=12x^2-8$. $f''(x)=0$ より $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. この点の前後で $f''(x)$ は符号を変える. これらの点は変曲点.　(3)　$f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(x)=-2\dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$. $f''(x)=0$ より $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. これらの点の前後で $f''(x)$ は符号を変える. これらの点は変曲点.

(4)　$f'(x)=e^x+e^{-x}$, $f''(x)=e^x-e^{-x}$ より $f''(x)=0$ となる点は $x=0$. この点の前後で $f''(x)$ は符号を変えるので $x=0$ は変曲点

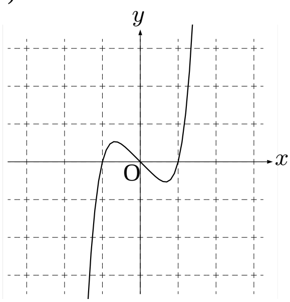
問題 2.35　(1)



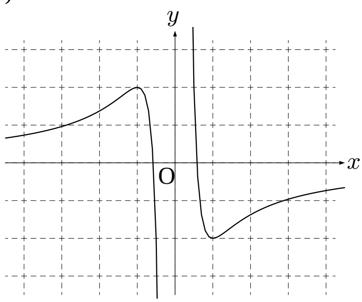
(2)



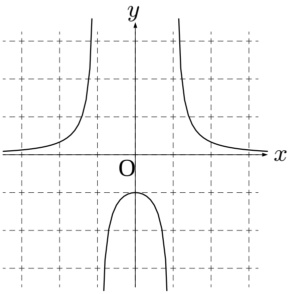
(3)



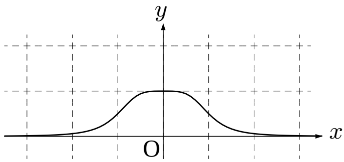
(4)



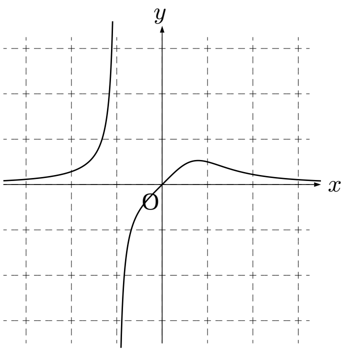
(5)



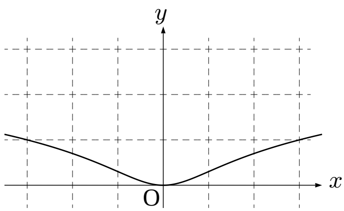
(6)



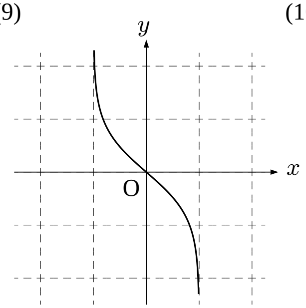
(7)



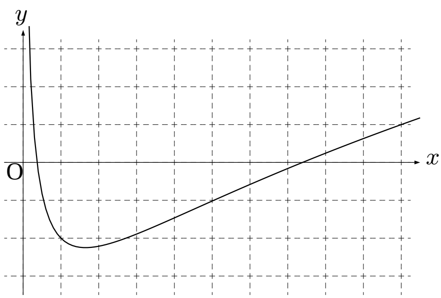
(8)



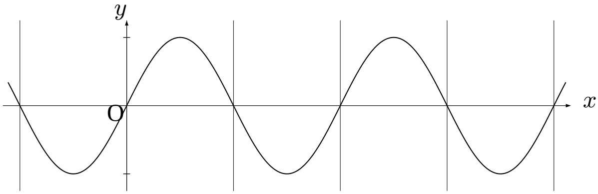
(9)



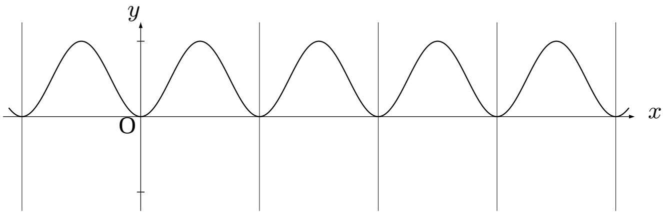
(10)



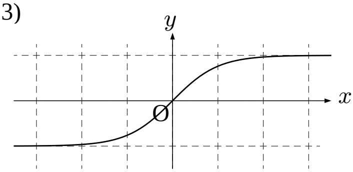
(11)



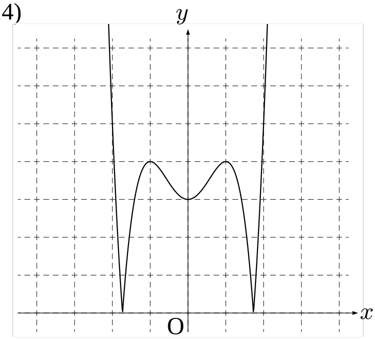
(12)



(13)



(14)



問題 2.36　答えが合わなかったら電卓の角度の単位を確認すること.

問題 2.37　$1-\dfrac{0.1^2}{2!}+\dfrac{0.1^4}{4!}$ で計算する. 値は $0.95500416\cdots$ となる. 第 3 項目が実際には不必要で, その原因は第 2 項までの和がキリのよい数になっているためである.

問題 2.38　(1) $=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=1$　(2) $=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}}{1}=1$　(3) $=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1}=1$

(4) $=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{2x}=1$　(5) $=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2\times 2x}{2x}=1$

(6) $=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$

(7) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{\dfrac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-1/2} 2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos^2 x}\left(1+x^2\right)^{-1/2} \lim_{x\to 0} \dfrac{-\sin^2 x}{x} = 0$

(8) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{3^x \log 3 - 2^x \log 2}{1} = \log 3 - \log 2$

(9) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3} - \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}}{1} = -\dfrac{1}{6}$

(10) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}}{6x} = \dfrac{1}{6}$

(11) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{2\arctan x \dfrac{1}{1+x^2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x^2} \lim_{x\to 0} \dfrac{2\arctan x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2\dfrac{1}{1+x^2}}{\cos x} = 2$

(12) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{2} = 0$

(13) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0$

(14) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + \sin x}{1} = 1$　(15) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{3x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} + 2\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} + 2\cos x}{6} = \dfrac{2}{3}$

問題 2.39　$x \to 0$ のとき分子は 0 に近づくので 0 ではない極限値をもつためには $n \geqq 1$ でなくてはならない．このときロピタルの定理によりこの極限値は $\lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{nx^{n-1}}$ に等しい．同様に理由により $n \geqq 2$ でなくてはならず，この極限値は $\lim_{x\to 0} \dfrac{-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} - \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}}{n(n-1)x^{n-2}}$ に等しい．$n = 2$ だと分子が 0 になるので $n \geqq 3$ でなくてはならない．このとき，分子と分母をそれぞれ x で割ると残った分子は $x \to 0$ のとき 0 にならない．したがって，$n = 3$ のとき与えられた極限は 0 でない値をとる．その値は $\dfrac{-2-1}{3\times 2} = -\dfrac{1}{2}$ である．

章末問題

1 (1)　分子に α の 1 次式が k 個掛けている．

(2)　$\dfrac{(\alpha+1)\alpha\cdots(\alpha-k+1)}{(k+1)!} - \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{(k+1)!}$

$= \dfrac{\alpha\cdots(\alpha-k+1)}{(k+1)!}\left((\alpha+1)-(\alpha-k)\right) = \dfrac{\alpha\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

(3)　隣り合う 2 項で打ち消しあうので最初と最後の項だけ残る．

(4) $\alpha = 1$ とおくと $1 = c_1$ より $c_1 = 1$. $\alpha = 2$ とおくと $2^4 = 2c_1 + c_2$ より $c_2 = 14$, $\alpha = 3$ とおくと $3^4 = 3c_1 + 3c_2 + c_3$ より $c_3 = 36$. $\alpha = 4$ とおくと $4^4 = 4c_1 + 6c_2 + 4c_3 + c_4$ より $c_4 = 24$

(5) $\binom{n+1}{2} + 14\binom{n+1}{3} + 36\binom{n+1}{4} + 24\binom{n+1}{5} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

2 (1) 導関数の符号が正なので単調増大である. (2) $y = f'(c)(x-c) + f(c)$

(3) $c - \dfrac{f(c)}{f'(c)}$ (4) $x = c$ のまわりで 1 次の項までテイラー展開すると $f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \dfrac{1}{2}f''(c^*)(x-c)^2$ を満たす c^* が c と x の間に存在する. $x = c^*$ とすると $f(c^*) > 0$ となる.したがって, $\alpha < c^*$ である. $c^* < c$ は前問と仮定より直ちにでる.

(5) 省略 (6) $c' = \dfrac{1}{2}\left(c + \dfrac{A}{c}\right)$

3 $f(x) = g(x)(x-a)^k$ とおく.$f'(x) = g'(x)(x-a)^k + kg(x)(x-c)^{k-1}$ となる.

4 (1) $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$

(2) $2n$ 次式を n 回微分しているので n 次だけ次数が下がる.

(3) もとの式は $x = 1, -1$ でそれぞれ $(x-1)^n$ と $(x+1)^n$ で割り切れる. 前問よりこの導関数は $x = 1, -1$ でそれぞれ $(x-1)^{n-1}$ と $(x+1)^{n-1}$ で割り切れる. また, ロルの定理により $(-1, 1)$ に $= 0$ を満たす解がある. これを繰り返すことで k 次導関数は $x = 1, -1$ でそれぞれ $(x-1)^{n-k}$ と $(x+1)^{n-k}$ で割り切れ, $(-1, 1)$ で k 個の相異なる解をもつことが示される. $k = n$ のときが求める場合になる.

(4) $P_n^{'}(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}2nx\left(x^2-1\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\dfrac{d^n}{dx^n}x\left(x^2-1\right)^{n-1}$ にライプニッツの定理を用いる.

(5) $P'_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \times$

$$\left((x^2-1)\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left(x^2-1\right)^n + (n+2)2x\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^2-1\right)^n + (n+2)(n+1)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\right)$$

$$= (x^2-1)\frac{1}{2(n+1)}P_n^{''}(x) + \frac{n+2}{n+1}xP_n^{'}(x) + \frac{n+2}{2}P_n(x)$$

(6) 前問の式と ${P_{n+1}}'(x) = xP_n^{'}(x) + (n+1)P_n(x)$ から導く.

5 (1) $H_0(x) = 1, H_1(x) = x, H_2(x) = x^2 - 1$

(2) $H'_n(x) = (-1)^n xe^{x^2/2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2} + (-1)^n e^{x^2/2}\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2/2}$
$= xH_n(x) - H_{n+1}(x)$ (3) 前問を用いて帰納法で示す.

(4) $H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}e^{x^2/2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}(-x)\right)$ にライプニッツの定理を用いて $= xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$ を得る. 前問とあわせて導かれる.

(5) $H_n(x)$ が n 個の相異なる実解をもつとすると隣り合う 2 つの実解ではそのその導

関数の値の符号が異なる. これと (2) とあわせて結論が得られる.
(6)　(2) の両辺を微分した式と (4) を $n+1$ としたときの式から得られる.

6 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$ であり

$$\begin{aligned} x\frac{1+ax^2}{1+bx^2} &= x\left(1+ax^2\right)\left(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+\cdots\right) \\ &= x+(a-b)x^3+\left(-ab+b^2\right)x^5+\left(ab^2-b^3\right)x^7+\cdots \end{aligned}$$

であるから $a-b=-\dfrac{1}{3!}$, $-ab+b^2=b(-a+b)=\dfrac{1}{5!}$ となるように定めればよい. $b=-\dfrac{3!}{5!}=-\dfrac{1}{20}$, $a=b-\dfrac{1}{3!}=\dfrac{23}{60}$ 第 7 次の項の係数は $-\dfrac{1}{7!}-(ab^2-b^3)\neq 0$ である.

7 $e=\dfrac{n}{m}$(m, n は整数) とする. $e=1+\dfrac{1}{1!}+\cdots+\dfrac{1}{m!}+\dfrac{1}{(m+1)!}+\cdots$ より $0<e-\left(1+\dfrac{1}{1!}+\cdots+\dfrac{1}{m!}\right)<\dfrac{1}{(m+1)!}\left(1+\dfrac{1}{m+2}+\left(\dfrac{1}{m+2}\right)^2+\cdots\right)=\dfrac{1}{(m+1)!}\dfrac{1}{1-\frac{1}{m+2}}=\dfrac{m+2}{m!(m+1)^2}$ が得られる.両辺に $m!$ を掛けると仮定より $m!e$ は整数となり, $0<$ 整数 $\leqq \dfrac{m+2}{(m+1)^2}<1$ となり矛盾である.

8 e^x のマクローリン展開の各項が条件から正であり, その中に $\dfrac{x^k}{k!}$ がある. これより, 不等式が成立する. 残りの部分は $e^x=X$ とおけば $x=\log X$ であるから上の不等式は $X>\dfrac{(\log X)^k}{k!}$ となる. これより, $(k!)^{1/k}>\dfrac{\log X}{X^{1/k}}$ となる. $\epsilon>\frac{1}{k}$ を満たす k を選べば $0<\dfrac{\log X}{X^\epsilon}=\dfrac{\log X}{X^{1/k}}\dfrac{1}{X^{\epsilon-1/k}}<(k!)^{1/k}\dfrac{1}{X^{\epsilon-1/k}}\to 0$ となる.

9 行列式を展開した各項は各行各列の成分からひとつづつ選んで掛けたものである.積の微分公式より各項を微分したものはそれぞれの成分のひとつを微分したものの和として表されるのである行の成分だけ微分されているものの項を集めればもとの行列式の特定の行の成分だけ微分した成分をもつ行列式になる. したがって, 結果は各行の成分を微分したものに置き換えた行列式の n 個の和になる.

10 ある区間で上に凸な関数 $f(x)$ に対して不等式

$$\frac{1}{2^m}\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^m})\right)\leqq f\left(\frac{1}{2^m}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)\right)$$

が成立する (帰納法で示す). 一般の n にたいしては $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ とおい

て $x_1, x_2, \cdots, x_n, \bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}$ が 2^m 個になるようにする.これにより

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^m}\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+f(\bar{x})+\cdots+f(\bar{x})\right)\\&\leqq f\left(\frac{1}{2^m}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n+\bar{x}+\cdots+\bar{x}\right)\right)=f(\bar{x})\end{aligned}$$

が得られる.これから共通の $f(\bar{x})$ を整理すればよい.

11 (1) $f(x)=x^{\frac{1}{p}}-\frac{x}{p}-\frac{1}{q}$ とおくと $f'(x)=\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}-\frac{1}{p}$ である. $f'(x)=0$ となる点は $x=1$ で, $\frac{1}{p}-1<0$ よりそこで極大である. $f(1)=1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=0$ より $x>0$ で常に $f(x)\leqq 0$ が成立する. (2) 前問の不等式で $x=\frac{A}{B}$ とおいて両辺に B を掛ければよい. (3) 省略

12 $x\neq 0$ にたいして $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ となり $x\to 0$ とすると極限が存在しない. 一方, $f'(0)=0$ である.

13 n 次の項までのテイラー展開の式と比べれば

$$f^{(n)}(a+\theta h)=f^{(n)}(a)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1}h$$

を満たす c が a と $a+h$ の間に存在する. これより

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{h}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n+1}$$

を得る. 左辺に平均値の定理を用いれば, この値は $f^{(n+1)}(c')\theta$ と表すことができる. ここで, c' は a と $a+h$ の間に存在する適当な数である. $h\to 0$ とすれば連続性と $f^{(n+1)}(a)\neq 0$ により $\displaystyle\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$ が得られる.

第 3 章

問題 3.1 (1) $\dfrac{1}{6}x^6$ (2) $\dfrac{1}{8}x^8$ (3) $\dfrac{1}{-2+1}x^{-2+1}=-\dfrac{1}{x}$ (4) $\dfrac{1}{-3+1}x^{-3+1}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x}$
(5) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{1/2+1}=\dfrac{2}{3}x^{3/2}$ (6) $\dfrac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{1/3+1}=\dfrac{4}{3}x^{4/3}$
(7) $\dfrac{1}{-\frac{2}{3}+1}x^{-2/3+1}=3x^{1/3}$ (8) $\dfrac{1}{4}x^4-x^3+x$ (9) $-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{4}x^4$

問題 3.2 (1) $\dfrac{1}{6}(x+3)^6$ (2) $\log|x+1|$ (3) $\dfrac{1}{12}(3x-1)^4$ (4) $\dfrac{1}{4}\sin(4x)$
(5) $\dfrac{2}{15}(5x+2)^{3/2}$ (6) $-\dfrac{1}{10}\dfrac{1}{(5x+2)^2}$ (7) $\dfrac{1}{5}\log|5x+2|$ (8) $-e^{-x}$ (9) $\dfrac{1}{3}e^{3x}$

問題 3.3 (1) $x\log x-\displaystyle\int x\times\frac{1}{x}dx=x\log x-x$ (2) $xe^x-\displaystyle\int 1\times e^x dx=xe^x-e^x$
(3) $(x+3)e^x-\displaystyle\int 1\times e^x dx=(x+3)e^x-e^x$

(4) $\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2$

(5) $\frac{1}{3}x^3\log x-\int\frac{1}{3}x^3\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3$

(6) $x(\log x)^2-\int x\times 2\log x\frac{1}{x}dx=x(\log x)^2-2(x\log x-x)$

(7) $x(-\cos x)-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x$

(8) $x^2\sin x-\int 2x\sin x dx=x^2\sin x-\left(2x(-\cos x)+2\int\cos x dx\right)=$
$x^2\sin x-(2x(-\cos x)+2\sin x)$

(9) $=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx=e^x\sin x-\left(e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)dx\right)$ これより,
$2\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-e^x\cos x$. 両辺を 2 で割ればよい.

(10) $=e^x\cos 2x-\int e^x(-2\sin 2x)dx=e^x\cos 2x-\left(-2e^x\sin 2x-\int(-2)e^x(2\sin 2x)dx\right)$
これより, $5\int e^x\sin 2x=e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x$ 両辺を 5 で割ればよい.

(11) $x(\log x)^3-\int x\times 3(\log x)^2\frac{1}{x}dx=x(\log x)^3-\left(3x(\log x)^2-\int 6x\log x\frac{1}{x}dx\right)$
$=x(\log x)^3-\left(3x(\log x)^2-6(x\log x-x)\right)$

(12) $x\sin(\log x)-\int x\cos(\log x)\frac{1}{x}dx$
$=x\sin(\log x)-\left(x\cos(\log x)-\int x(-\sin(\log x))\frac{1}{x}dx\right)$
これより, $2\int\sin(\log x)dx=x\sin(\log x)-x\cos(\log x)$. この両辺を 2 で割ればよい.

問題 3.4　省略

問題 3.5　定数の分だけ異なる. この差は積分定数に含まれる.

問題 3.6　(1) $2x^2+1=t$ とおく. $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\left(2x^2+1\right)^3$
(2) $x^4-2=t$ とおく.$\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\left(x^4-2\right)^6$　(3) $x^3-1=t$ とおく.$\frac{1}{3}\log\left|x^3-1\right|$
(4) $x^2=t$ とおく. $-\frac{1}{2}\cos x^2$　(5) $x^3=t$ とおく.$\frac{1}{3}\sin x^3$　(6) $3x^2=t$ とおく.
$\frac{1}{6}\cos 3x^2$　(7) $x^2+4=t$ とおく. $\frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{3/2}$　(8) $1+e^x=t$ とおく. $\log(1+e^x)$
(9) $x+4=t$ とおくと $\int(t-4)t^5dt$ となる. $\frac{1}{7}(x+4)^7-\frac{4}{6}(x+4)^6$

(10) $\sin x = t$ または $\cos x = t$ とおく. $\dfrac{1}{2}\sin^2 x$ (11) $\cos x = t$ とおく. $-\dfrac{1}{3}\cos^3 x$

(12) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ なので $\cos x = t$ とおけばよい. $-\log|\cos x|$

(13) $\sin x = t$ とおく. $\dfrac{1}{4}\sin^4 x$

(14) $\displaystyle\int \sin x \left(1 - \cos^2 x\right) dx$ と変形して $\cos x = t$ とおく. $-\cos x + \dfrac{1}{3}\cos^3 x$

(15) $\log x = t$ とおく. $\dfrac{1}{2}(\log x)^2$ (16) $\dfrac{1}{2}(\arcsin x)^2$ (17) $\log x = t$ とおく. $-\dfrac{1}{\log x}$

(18) $\log x = t$ とおく. $\log|\log x|$

問題 3.7 (1) $\displaystyle x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

(2) $\displaystyle \frac{x^3}{3}\arctan x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^3}{3}\arctan x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{1+x^2} dx$ ここで $1+x^2 = t$

とおくと残りの積分は $\displaystyle\int \frac{1}{6}\frac{t-1}{t} dt = \frac{1}{6}(t - \log t)$ より

$\dfrac{x^3}{3}\arctan x - \left(\tfrac{1}{6}\left(1 + x^2 - \log\left(1+x^2\right)\right)\right)$

(3) $\displaystyle \frac{x^3}{3}\arcsin x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

ここで $1 - x^2 = t$ とおくと残りの積分は $\displaystyle\int \left(-\frac{1}{6}\right)\frac{1-t}{t^{1/2}} dt = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(2t^{1/2} - \frac{3}{2}t^{3/2}\right)$

より $\dfrac{x^3}{3}\arcsin x - \left(-\dfrac{1}{6}\right)\left(2\sqrt{1-x^2} - \tfrac{3}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\right)$

(4) $x^2 = t$ とおくと $\displaystyle\int \frac{1}{2} t \sin t \, dt = \frac{1}{2}(-t\cos t + \sin t)$ となる. $\dfrac{1}{2}\left(\sin x^2 - x^2\cos x^2\right)$

(5) $\dfrac{x^2 \sin\left(1+x^2\right) + \cos\left(1+x^2\right)}{2}$ (6) $\dfrac{\left(x^6-1\right)\log\left(x^3+1\right)}{6} - \dfrac{\left(x^3+1\right)^2}{12} + \dfrac{x^3+1}{3}$

問題 3.8 (1) 分子と分母の多項式の次数をそれぞれ r, s としたとき $m = r - s$ とる.
(2) $\log|x|$ では前問の条件を満たす m が存在しない. また、$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$ なので問 1 の条件が成立しない.

問題 3.9 $I_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x^2+1} + \arctan x\right)$, $I_3 = \dfrac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{x}{x^2+1} + \arctan x\right)$,

$I_4 = \dfrac{x}{6\left(x^2+1\right)^3} + \dfrac{5x}{24\left(x^2+1\right)^2} + \dfrac{5}{16}\left(\dfrac{x}{x^2+1} + \arctan x\right)$

問題 3.10 (1) $\dfrac{1}{3}(\log|x| - \log|x+3|)$ (2) $\dfrac{\log|x-3|}{12} + \dfrac{1}{4}\log|x+1| - \dfrac{1}{3}\log|x|$

(3) $\dfrac{1}{2}(\log|x-1|+\log|x+1|)-\log|x|$ (4) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$

(5) $\log|x|-\dfrac{1}{2}\log\left(x^2+1\right)$ (6) $\arctan(x+1)$

(7) $-\dfrac{1}{2}\arctan x+\dfrac{1}{4}(\log|x-1|-\log|x+1|)$

(8) $\dfrac{5}{12}\log|x-2|-\dfrac{1}{3}\log|x-1|-\frac{5}{12}\log|x+2|+\frac{1}{3}\log|x+1|$

(9) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{6}\log\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{3}\log|x-1|$

(10) $\dfrac{3\arctan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{8}-\dfrac{\log\left(x^2+4\right)}{8}+\dfrac{\log|x|}{4}+\dfrac{3}{4x}$

(11) $4\log|x-2|-4\log|x-1|+\dfrac{3}{x-1}$

(12) $\dfrac{-\log|x-2|+\log|x+2|}{32}-\dfrac{3}{16(x-2)}+\dfrac{1}{16(x+2)}$

問題 3.11　(1) $\dfrac{2}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}}-2(x+3)^{\frac{3}{2}}$

(2) $\dfrac{9}{8}\left(\dfrac{1}{(u-1)^2}-\dfrac{1}{(u+1)^2}\right)+\dfrac{21}{8}\left(\dfrac{1}{u-1}+\dfrac{1}{u+1}\right)-\dfrac{3}{8}(\log(u-1)-\log(u+1))$

ただし $u=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$ (3) 省略

問題 3.12　(1) $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{u}{u-x-1}-\dfrac{u}{u+x+1}+\log\dfrac{u+x+1}{u-x-1}\right)$(ただし $u=\sqrt{x^2+2x+2}$)

(2) $\dfrac{\left(x^2-a^2\right)^{5/2}}{5}+\dfrac{a^2\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}{3}$ (3) $\dfrac{1}{2}xu+\dfrac{a^2}{4}\log\left|\dfrac{u+x}{u-x}\right|$(ただし, $u=\sqrt{x^2+a^2}$)

(4) $\dfrac{(x^2+2x+2)^{3/2}}{3}-$ ((1) の答) (5) (3) の答でと同じ. (ただし, $u=\sqrt{x^2-a^2}$)

(6) $u+\dfrac{a}{2}\log\dfrac{u-a}{u+a}$ (ただし, $u=\sqrt{x^2+a^2}$)

問題 3.13　省略

問題 3.14　問題 3.5 と同じ.

問題 3.15　(1) $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ と変形して計算する. $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x$

(2) $\cos^3 x=\cos x(1-\sin^2 x)$ と変形して計算する. $\sin x-\dfrac{\sin^3 x}{3}$

(3) $\cos x=t$ とおく. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\log\left|\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right|=\log\left|\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

問題 3.16　(1) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと $\displaystyle\int\dfrac{2}{1-t^2}dt=\log\left|\dfrac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|=\log\left|\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

(2) $-\dfrac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}$　(3) $\dfrac{1}{2}\bigl(x-\log(t^2+1)+\log(t^2-2t-1)\bigr)$. ただし, $t=\arctan\dfrac{x}{2}$

問題 3.17　m または $n=0$ として公式を用いればよい. たとえば次の通り.

$$\int \cos^m x\,dx = \frac{1}{m}\cos^{m-1} x\sin x + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x\,dx$$

問題 3.18　定理 3.8 の漸化式をそれぞれの指数の絶対値が小さくなるような公式を選んで用いればよい. 漸化式を用いなくても計算できるものもある. そのときはここに挙げた結果と形が異なることがあるので注意すること.

(1) $\dfrac{1}{4}\cos x\,\sin^3 x+\dfrac{1}{8}(-\sin x\,\cos x+x)$

(2) $\dfrac{1}{5}\cos x\,\sin^4 x-\dfrac{1}{15}\bigl(\cos x\,\sin^2 x+2\cos x\bigr)$ ($\cos x=u$ とおいてもよい.)

(3) $\dfrac{1}{7}\cos x^2\sin^5 x+\dfrac{2}{35}\sin^5 x$ ($\sin x=u$ とおいてもよい.)

(4) $\dfrac{1}{2}\tan^2 x+\log|\cos x|$　(5) $\dfrac{\tan^3 x}{3}$

(6) $\dfrac{\cos^2 x}{2}+\log|\sin x|$ ($\sin x=u$ とおいてもよい.)　(7) $\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{4}\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

(8) $\dfrac{1}{\cos x\,\sin x}-2\dfrac{\cos x}{\sin x}$　(9) $\dfrac{1}{3\cos^3 x\,\sin x}+\dfrac{4}{3\cos x\,\sin x}-\dfrac{8\cos x}{3\sin x}$

問題 3.19　(1) $x-\log(1+e^x)$　(2) $2x-e^{-x}-2\log(e^x-1)$　(3) $e^x-\log(1+e^x)$

(4) $3u+\log(u-1)-\dfrac{1}{2}\log(u^2+u+1)-\sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(u+\dfrac{1}{2}\right)\right)$

ただし $u=\sqrt[3]{1+e^x}$　(5) $\log\dfrac{u-1}{u+1}$ ただし $u=\sqrt{1+e^x}$

(6) $2\arctan u+\log\dfrac{u-1}{u+1}$ ただし $u=\sqrt{\dfrac{1-e^x}{1+e^x}}$

問題 3.20　(1) $\left[\dfrac{x^5}{5}\right]_0^2=\dfrac{32}{5}$　(2) $\left[\dfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_9^0=18$　(3) $\Bigl[\log x\Bigr]_2^1=\log 2$

(4) $\Bigl[-\cos x\Bigr]_o^{\frac{\pi}{2}}=1$　(5) $\Bigl[\sin x\Bigr]_0^{\pi}=0$　(6) $\Bigl[e^x\Bigr]_0^2=e^2-1$

問題 3.21　(1) $t=3x-2$ とおく. $\left[\dfrac{1}{15}t^5\right]_{-5}^1=\dfrac{1042}{5}$

(2) $t=x^3-1$ とおく. $\left[\dfrac{1}{12}t^4\right]_{-9}^0=-\dfrac{2187}{4}$

(3) $t=1+x^2$ とおく. $\left[\dfrac{1}{2}\log t\right]_2^5=\dfrac{\log(5/2)}{2}$

(4) $t=1-x$ とおく. $\left[-\dfrac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^0=\dfrac{2}{3}$

(5) $t=2x^2+1$ とおく. $\left[\frac{3}{8}t^{2/3}\right]_3^9=\frac{3}{8}\left(9^{2/3}-3^{2/3}\right)$

(6) $t=1-x^2$ とおく. $\left[-\frac{1}{2}\left(2t^{1/2}-\frac{2}{3}t^{3/2}\right)\right]_1^0=\frac{2}{3}$

(7) $t=1+e^x$ とおく.

$$\int_2^{1+e}\frac{dt}{t(t-1)}=\log e-\log(1+e)-(\log 1-\log 2)=1+\log 2-\log(1+e)$$

(8) $t=\arcsin x$ とおく. $\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{32}$

(9) $t=\arctan x$ とおく. $\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{32}$　(10) $t=\sin x$ とおく. $\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$

(11) $t=\sin x$ とおく. $\left[-\frac{1}{3}t^{-3}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1=\frac{8}{9\sqrt{3}}-\frac{1}{3}$

(12) $t=1+\cos x$ とおく. $\left[-\log t\right]_{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\log\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$

問題 3.22　(1) $\int_1^{10}\frac{1}{2}\log t\,dt=\left[t\log t-t\right]_1^{10}=10\log 10-1$

(2) $\left[\frac{1}{3}(x+1)^3(x-3)\right]_{-1}^3-\int_{-1}^3\frac{1}{3}(x+1)^3=-\frac{1}{12}4^4$　(3) π

問題 3.23　(1) $\left[\frac{1}{m+1}(x-a)^{m+1}(x-b)^n\right]_a^b-\int_a^b\frac{n}{m+1}(x-a)^{m+1}(x-b)^{n-1}dx$

$=\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}$

(2) $\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}(b-a)^{m+n+1}$

問題 3.24　(1) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ で $0\leqq\sin x\leqq 1$ であるから, $\sin^n x\geqq\sin^{n+1}x$ である. この不等式は常に等号が成立しないので問題の不等式が得られる.

(2) 左側の不等式は前問を, 右辺の等式は例題 3.15 を利用せよ.

(3) $I_{2n-1}\geqq I_{2n}\geqq I_{2n+1}$ と奇数の添え字の定積分の値を用いる.

問題 3.25　上端で定義されていないときは $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$ で定める. 両端で定義されていないときは区間を分けて別の極限として定義する.

問題 3.26　(1) $\frac{\pi}{2}$　(2) $\alpha<1$ のとき存在し, 値は $\frac{1}{1-\alpha}$

問題 3.27　(1) $u=e^{-x}$ とおけ.　(2) $u=zx$ とおけ.

問題 3.28　(1) 広義積分が存在するための条件を区間の両端で考えよ.

(2) $u=1-x$ とおく.　(3) 部分積分を用いよ.　(4) $1=x+(1-x)$ を用いる.

(5) $1 = x + (1-x)$ を用いる. (6) (3) と (4) を用いよ. (7) $\cos^2 x = u$ とおく.
(8) $\alpha = \dfrac{x}{1-x}$ とおく.

問題 3.29　x をパラメータそのものと思えばよい.

問題 3.30　(1) $2\left(5^{3/2}-1\right)$ (2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\left(\log\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$
(3) $\frac{1}{2}\left(e-e^{-1}\right)$ (4) 8

章末問題

1 部分積分を用いて計算する. ルジャンドルの多項式を積分したものは区間の両端で 0 になることに注意すること. $m \neq n$ のとき 0, $m = n$ のとき $\dfrac{2}{2n+1}$.

2 (1) $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)dx - \frac{1}{2}(f(a)+f(x))(x-a) - K(x-a)^3$ とおき, 定数 K を $F(b) = 0$ を満たすように定める. $F(c') = 0$ となる c' が存在する (ロルの定理). $F'(c)$ を直接計算し, その K を含まない部分が $f(a)$ の値を $x = c'$ で 1 次の項までテイラー展開したものなのでその剰余項を用いれば $K = -\dfrac{f''(c)}{12}$ と表される.

(2) 前問を利用して各小区間の積分を加える.

3 n を正の整数とする. $I_n = \displaystyle\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\sin x}{x}dx$ とおく. $n > 1$ のとき,

$$I_n = \int_{2(n-1)\pi}^{(2n-1)\pi} \sin x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\pi}\right)dx = \int_{2(n-1)\pi}^{(2n-1)\pi} \frac{\pi\sin x}{x(x+\pi)}dx$$

これより $0 < I_n < \dfrac{1}{(2n-1)(2n-2)}$ となり, 積分が収束する. 一方,

$\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{(n+\frac{1}{4})\pi}^{(n+\frac{3}{4})\pi} \frac{dx}{x} \geqq \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{n+\frac{3}{4}}$ よりこれらの和は無限大に発散.

4 (1)　θ が $\theta + d\theta$ に変化したときその部分の面積は $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ で近似できる. (2) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を用いて θ をパラメータとして曲線を表す公式に代入する.

5 (1) πa^2 (2) $\dfrac{3}{2}\pi a^2$ (3) $\dfrac{1}{2}a^2$ (4) $\dfrac{4}{3}\pi^3$

6 (1) $2\pi a$ (2) $8a$ (3) a (4) $\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\dfrac{1}{2}\log\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$

第 4 章

問題 4.1　(1) $y = x,\ y - -x,\ y = -x-1$ の各線上の点が境界点である.
(2) 有理数の近くには必ず無理数があるのでこの集合のすべての点が境界点である.

問題 4.2　(1) 開集合, (2) どちらでもない.

問題 4.3　これ以外に条件を満たす集合の補集合も同じ条件を満たす.これらの集合の境界点を考えると両者の集合に含まれていなければならない.もとの集合と補集合に共通点が存在することになり矛盾する.したがって, これ以外には存在しない.

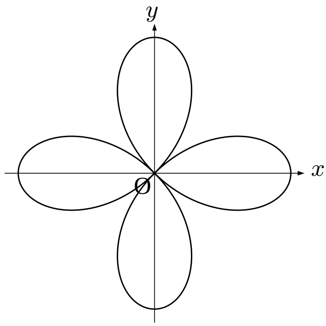
問題 4.4　開区間は開集合, 閉区間は閉集合になる. 実数全体は開集合かつ閉集合である.

問題 4.5　(1) $\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{4}\pi\right)$ (2) $(2, 0)$ (3) $(2, \pi)$ (4) $\left(2, \dfrac{1}{6}\pi\right)$ (5) $\left(\sqrt{2}, \dfrac{3}{4}\pi\right)$ (6) $\left(2, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

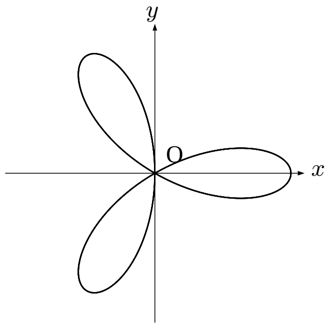
問題 4.6　それぞれの点の極座標を $(r_{\mathrm{A}}, \theta_{\mathrm{A}}), (r_{\mathrm{B}}, \theta_{\mathrm{B}})$ とすると面積は $\dfrac{1}{2} r_{\mathrm{A}} r_{\mathrm{B}} \left|\sin(\theta_{\mathrm{A}} - \theta_{\mathrm{B}})\right|$ である. 加法定理で展開して直交座標に直せばよい.

問題 4.7　(1) $r^2 = r\cos\theta$ より $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円

(2)



(3)



(4) $x = 1$ という直線 (5) $y^2 = 1 - 2x$ という放物線 ($r = 1 - r\cos\theta$ としてから両辺を 2 乗する.) (6) 中心が原点から平行移動した楕円. $3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 + 4y^2 = \dfrac{4}{3}$

問題 4.8　原点から直線に垂線をおろし, その足の座標の極座標が (r_0, α) であったとすれば $r\cos(\theta - \alpha) = r_0$ となる.

問題 4.9　$0 < e < 1$ のとき楕円, $e = 1$ のとき放物線, $e > 1$ のとき双曲線.

問題 4.10　(1) $\left(2, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ (2) $\left(4\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ (3) $\left(4\sqrt{3}, \dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{3}\right)$

問題 4.11

	x-y 平面	y-z 平面	x-z 平面
円柱座標	$z = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 0$
球座標	$\theta = \pi/2$	$\phi = \pi/2$	$\phi = 0$

問題 4.12　(1) $x = 0$ として近づいた場合は 0, $x = y$ として近づくと $\dfrac{1}{2}$ となり, 近づ

き方で値が異なるので極限値は存在しない. (2) 0

問題 4.13 $\mathrm{P} = (p_1, p_2, \cdots, a_n), \mathrm{Q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ とおく.
$d(\mathrm{P},\mathrm{Q})^2 - (d(\mathrm{P},\mathrm{O}) + d(\mathrm{Q},\mathrm{O}))^2$
$= -2(p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n) - 2(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2)^{1/2}(q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_n^2)^{1/2} \leqq 0$
(ヘルダーの不等式 96 ページ参照)

問題 4.14 (1) $z_x = 3x^2 + 2y^2 + 0, z_y = 0 + 4xy + 3y^2$
(2) $z_x = 3\left(x^2 - xy + y^3\right)^2(2x - y), z_y = 3\left(x^2 - xy + y^3\right)^2(-x + 3y^2)$
(3) $z_x = \left(3x^2 - 3y^2\right)\left(x^4 - y^4\right) + \left(x^3 - 3xy^2\right) \cdot 4x^3,$
$z_y = -6xy\left(x^4 - y^4\right) + \left(x^3 - 3xy^2\right)\left(-4y^3\right)$ (4) $z_x = z_y = -\dfrac{1}{(x+y)^2}$
(5) $z_x = \dfrac{y\left(x^3 + y^3\right) - xy \cdot 3x^2}{\left(x^3 + y^3\right)^2}, z_y = \dfrac{x\left(x^3 + y^3\right) - xy \cdot 3y^2}{\left(x^3 + y^3\right)^2}$
(6) $z_x = \dfrac{\left(x^2 + y^2\right) - 3x \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^4}, z_y = -3\dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^4}$
(7) $z_x = z_y = \cos(x + y)$ (8) $z_x = -y\sin xy, z_y = -x\sin xy$
(9) $z_x = \dfrac{1}{\cos^2\frac{1}{x-y}}\left(-\dfrac{1}{(x-y)^2}\right), z_y = \dfrac{1}{\cos^2\frac{1}{x-y}}\dfrac{1}{(x-y)^2}$
(10) $z_x = z_y = e^{x+y}$ (11) $z_x = e^y, z_y = xe^y$
(12) $z_x = 2xe^{x^2+y^2}, z_y = 2ye^{x^2+y^2}$ (13) $z_x = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}, z_y = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$
(14) $z_x = \dfrac{1}{1 + (x + y^2)^2}, z_y = \dfrac{1}{1 + (x + y^2)^2}2y$
(15) $z_x = \dfrac{1}{y\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}}, z_y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$ (16) $z_x = z_y = \dfrac{1}{x+y}$
(17) $z_x = \dfrac{1}{x}, z_y = \dfrac{1}{y}$
(18) $z_x = -\dfrac{1}{\left(\log\left(x - y^2\right)\right)^2}\dfrac{1}{x - y^2}, z_y = -\dfrac{1}{\left(\log\left(x - y^2\right)\right)^2}\dfrac{-2y}{x - y^2}$
(19) $z_x = e^{x^2+3y}(2x\sin x + \cos x), z_y = 3e^{x^2+3y}\sin x$
(20) $z_x = e^{3x-4y}\left(1 + 3(x + y)\right), z_y = e^{3x-4y}\left(1 - 4(x + y)\right)$
(21) $z_x = e^{x^2-3y^3}\left(2x\log(x + 2y) + \frac{1}{x+2y}\right), z_y = e^{x^2-3y^3}\left(-9y^2\log(x + 2y) + \frac{2}{x+2y}\right)$

問題 4.15 すべての関数で $z_{xy} = z_{yx}$ が成立している. 結果は省略.

問題 4.16 第 1 次偏導関数が変数の数 3 種類あり, それぞれについて第 2 次偏導関数が 3 種類づつあるので, 全体では $3 \times 3 = 9$ 種類ある.

問題 4.17 第 2 次偏導関数は省略
(1) $u_x = 3x^2 - 6xy + y^3z^2, u_y = -3x^2 + 3xy^2z^2 + 2xyz^4, u_z = 2xy^3z + 4xy^2z^3$
(2) $u_x = (y + z)(2x + y + z), u_y = (x + z)(2y + x + z), u_z = (x + y)(2z + x + y)$

(3) $u_x = u_y = u_z = -\dfrac{1}{(x+y+z)^2}$

(4) $u_x = \dfrac{y+z}{xy+yz+zx}, u_y = \dfrac{x+z}{xy+yz+zx}, u_z = \dfrac{x+y}{xy+yz+zx}$

(5) $u_x = \sin\left(y-z^2\right), u_y = -\sin\left(y-z^2\right) + (x-y)\cos\left(y-z^2\right),$
$u_z = -2z(x-y)\cos\left(y-z^2\right)$

(6) $u_x = yz^2e^{xyz^2}, u_y = xz^2e^{xyz^2}, u_z = 2xyze^{xyz^2}$

問題 4.18　式 (4.12) より, $\begin{pmatrix} f_u & g_u \\ f_v & g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$ が成立する. この両辺の行列式をとればよい.

問題 4.19　$z_r = z_x x_r + z_y y_r$ などの式に, 式 (4.1) の両辺を偏微分した式 $x_r = \cos\theta,\ y_r = \sin\theta$ などを代入すればよい.

問題 4.20　$r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x}$ より, $r_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{r\cos\theta}{r}$.

問題 4.21　この関係式はすでによく使っている. $z_x = \dfrac{dz}{dt}t_x,\ z_y = \dfrac{dz}{dt}t_y$

問題 4.22　$z_{uv} = z_{xx}x_u x_v + z_{xy}(x_u y_v + x_v y_u) + z_{yy}y_u y_v + z_x x_{uv} + z_y y_{uv}$. z_{vv} は z_{uu} の式で u のところを v に変えればよい.

問題 4.23　例題 4.12 の場合であれば, そこで得られた式をもう一度微分すればよい.

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d}{dt}z_x\frac{dx}{dt} + z_x\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d}{dt}z_y\frac{dy}{dt} + z_y\frac{d^2y}{dt^2} \\ &= z_{xx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2z_{xy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + z_{yy}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + z_x\frac{d^2x}{dt^2} + z_y\frac{d^2y}{dt^2}\end{aligned}$$

となる. 残りも同様である. また, いままでに得られた公式をこれらの場合に合うように記号を書き直してもよい.

問題 4.24　例題 4.13 で得られた公式に代入して z_{xx} を計算すればよい.

$$\begin{aligned} z_{xx} &= z_{rr}{r_x}^2 + 2z_{r\theta}r_x\theta_x + z_{\theta\theta}{\theta_x}^2 + z_r r_{xx} + z_\theta\theta_{xx} \\ &= z_{rr}\cos^2\theta + 2z_{r\theta}\cos\theta\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) + z_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + z_r(\cos\theta)_x + z_\theta\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)_x \\ &= z_{rr}\cos^2\theta + 2z_{r\theta}\cos\theta\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) + z_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + z_r(-\sin\theta\,\theta_x) \\ &\quad + z_\theta\left(-\frac{r\cos\theta\,\theta_x - r_x\sin\theta}{r^2}\right) \\ &= z_{rr}\cos^2\theta - 2z_{r\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r} + z_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + z_r\frac{\sin^2\theta}{r} + z_\theta\left(\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\right)\end{aligned}$$

z_{yy} も同様に計算すれば $z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta} + \dfrac{1}{r}z_r$ となる.

問題 4.25　(1) ${z_u}^2 + {z_v}^2$　(2) $z_{uu} + z_{vv}$

問題 4.26　$u_{rr} + \dfrac{2}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \dfrac{\cos\theta}{r\sin\theta}u_\theta + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\phi\phi}$

問題 4.27　省略

問題 4.28　極値をもつ条件から $f_{xx}(a,b)$ と $f_{yy}(a,b)$ は同じ符号になるから.

問題 4.29　(1) 固有多項式は $(A-\lambda)(C-\lambda)-B^2 = \lambda^2-(A+C)\lambda+(AC-B^2) = 0$ となる. 判別式は $(A+C)^2 - 4(AC-B^2) = (A-C)^2 + B^2 \geqq 0$ となり常に実数解をもつ.　(2) 解と係数の関係から「固有多項式の定数項が正 $\Longleftrightarrow$ 固有値が同符号」である. 定数項が行列式に一致していることに注意.

問題 4.30　峠

問題 4.31　(1) 極値の候補 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ そこで極小

(2) 極値の候補 $(0,\pm1), \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ このうち $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ で極大, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ で極小

(3) 極値の候補 $(\pm1,\mp1)$(複号同順) $(0,0), (\pm\sqrt{3},0)$ このうち $(\pm1,\mp1)$ で極大.

(4) 極値の候補 $(0,0), (-1,-1)$, $(-1,-1)$ で極大.

(5) 極値の候補 $(0,0), (\pm1,\pm1)$(複号同順), $(\pm1.\pm1)$(複号同順) で極小.

(6) 極値の候補 $\left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$, そこで極値をもたない.

(7) $f_x = \dfrac{(x^2+y^2+1)-x(2x)}{(x^2+y^2+1)^2}$, $f_y = -\dfrac{x\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2}$ $f_y = 0$ より $x = 0$ または $y = 0$. $x = 0$ のとき $f_x = 0$ より $y^2+1 = 0$ となり解なし. $y = 0$ のときは同様にして $x = \pm1$. 極値を取る点の候補は $(\pm1,0)$. そこで極値をもたない.

(8) 極値の候補 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$(複号同順), $+$ の方で極大, $-$ の方で極小.

(9) 極値の候補 $(0,0)$, そこで極値をもたない.

(10) 極値の候補 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \pm\dfrac{2}{\sqrt{10}}\right)$(複号同順), $+$ で極大 $-$ で極小.

(11) 極値の候補なし.

(12) 極値の候補 $(0,0), \left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$, $(0,0)$ は極値をもたない. 残りの点で極小.

問題 4.32　$f(x,y) = 0$ の両辺を x で微分すれば合成関数の偏微分の公式より $f_x\dfrac{dx}{dx} + f_y\dfrac{dy}{dx} = 0$ が得られる. これを解けば目的の式が得られる.

問題 4.33　$F(x,y) = x - f(y)$ とおくと $F(x,y) = 0$ で定められる陰関数の導関数は $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{1}{-f'(y)}$

問題 4.34　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}$ の両辺を x で微分する. そのとき $\dfrac{d}{dx}f_x=(f_x)_x\dfrac{dx}{dx}+(f_x)_y\dfrac{dy}{dx}$ となる. $\dfrac{dy}{dx}$ は $-\dfrac{f_x}{f_y}$ で置き換える.

問題 4.35　(1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$ 極値の候補　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $y=\mp\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (複号同順) となる点. $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極小, $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき極大

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2+y}{x+y^2}$ 極値の候補　なし

問題 4.36　クラメールの公式の分母の行列式が陰関数が存在するための条件と同じ.

問題 4.37　(1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{z-x}{z-y}, \dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{y-x}{y-z}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2(z-x)}{x^2(z-y)}, \dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{z^2(y-x)}{x^2(y-z)}$

問題 4.38　一致する.

問題 4.39　(1) 最大値 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, 最小値 $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　(2) 最大値 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, 最小値 $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(3) 最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 最小値 -1　(4) 最大値 2, 最小値 $\dfrac{2}{3}$

問題 4.40　消去して解く方が計算が少し面倒である (と思う).

問題 4.41　$x^2+y^2-\lambda(ax+by+c)$ とおいて解く. はじめに λ の値を求め, それを条件式に代入して求めるとよい. 答は $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

問題 4.42　前問と同様にして解けばよい. 答は $\dfrac{1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$.

問題 4.43　四角形 ABCD で $\angle A=\phi, \angle C=\psi$ とおく. これを用いて面積の式を作る. △ABD と △CDB が共通の辺 BD をもつので余弦定理から条件式を作る.

問題 4.44　式 (4.34) で積分の上端に α が入るために計算が簡単にならない.

問題 4.45　上端, 下端と $f(x,y)$ に含まれる x をそれぞれ別の変数に見立ててそれらとの合成関数と考えればよい. 結果は $f(x,\phi(x))\phi'(x)-f(x,\psi(x))\psi'(x)+\displaystyle\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f_x(x,y)dy$

問題 4.46　$f'(x)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{y\cos xy}{(1+y^2)^2}dy$ より

$$f'(0)=\int_0^\infty \frac{y}{(1+y^2)^2}dy=\left[-\frac{1}{2\,(1+y^2)}\right]_0^\infty=\frac{1}{2}$$

章末問題

1 (1) $u_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2} u_{xx} = \dfrac{2\left(x^2+y^2+z^2\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$ である. x, y, z について対称だから置き換えることで他の変数に関する偏導関数も計算できる.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{6\left(x^2+y^2+z^2\right) - 4\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} = \frac{2}{x^2+y^2+z^2}$$

(2) $u_x = -\dfrac{1}{2}\, 2x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$ より

$u_{xx} = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + x\,\frac{3}{2}\,2x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}$, 前問と同様にして

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = -3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} + 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2} = 0$$

2 行列式を展開して計算する. 一般化するために行列式の導関数の公式 (第 2 章 章末問題 9) を用いる. 行列式は転置しても値が同じであるから行に関して微分しても列に関して微分してもよい. ここでは行に関して微分した方がよい.

(1) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 2x & 0 & 0 \end{vmatrix}$ である. はじめの項は第 1 行の成分がすべて 0 なのでその値も 0 である. 第 2 項は対応する各変数で偏微分したものを加えると, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ となり第 1 行と第 2 行が等しいので 0. 第 3 番目の項も同様に対応する項を加えると 0.

(2) (1) と同様. 答は 0.

3 0 (計算した式は 1 次元の熱伝導の方程式である.)

4 $x = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i,\ y = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ (n 個の点の重心である.)

5 a と b を変数と思って計算をする.

$$a = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\bar{x}^2}, b = \frac{\bar{x}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\bar{x}^2}$$ ここで $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \bar{y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

である.

6 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1),\ \mathrm{Q}(x_2, y_2, z_2)$ とおき, さらに与えられた直線の方程式の値をそれぞれ $k_1,\ k_2$ とおいて変数 $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, k_1, k_2$ を用いたラグランジュの未定係数法を用いる. $L = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$

$-\lambda_1(x_1 - a_1 - k_1 r_1) - \lambda_2(y_1 - b_1 - k_1 s_1) - \lambda_3(z_1 - c_1 - k_1 t_1)$

$-\lambda_4(x_2-a_2-k_2r_2)-\lambda_5(y_2-b_2-k_2s_2)-\lambda_6(z_2-c_2-k_2t_2)$
$L_{x_1}=0$ より $2(x_1-x_2)=\lambda_1$ が, $L_{k_1}=0$ より $\lambda_1r_1+\lambda_2s_1+\lambda_3t_1=0$ が得られる. この式に上の λ たちの値を代入して $(x_1-x_2)r_1+(y_1-y_2)s_1+(z_1-z_2)t_1=0$ となる. 直線 ℓ_1 の方向ベクトル (r_1,s_1,t_1) と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は直交している. ℓ_2 たいしても同様.

7 (1) $\alpha=c$, $\beta=-c$ (あるいはその逆). (2) $z=f(x+cy)+g(x-cy)$ ただし ($f(u)$, $g(u)$ は 2 次導関数までが存在する任意の関数)

8 (1) $n=2$ のとき $a_{11}{x_1}^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}{x_2}^2$,
$n=3$ のとき $a_{11}{x_1}^2+a_{22}{x_2}^2+a_{33}{x_3}^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1$

(2) $2\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k$

(3) 行列 A の固有ベクトル (条件式を $-\lambda(\cdots)$ で加えておくと λ は A の固有値になる).

(4) 最大値, 最小値はそれぞれ A の固有値のうち最大のものと最小のものになる.

9 (1) 前問 (1) の関数 (2) 条件の式を t で微分してそのあと $t=1$ とおけばよい.

10 $F(u,v)=0$ の両辺を 変数 x,y で偏微分する. 得られた式を F_u と F_v に関する連立方程式と思えば条件から係数行列が逆行列をもたないことがわかる. この条件と同値な条件が求めるものである.

11 (1) 閉集合 (2) 閉集合 (3) 閉集合 (4) 開集合 (5) 開集合

(6) 関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ が連続なのでもし点 P が与えられた集合に含まれていれば, それに十分近い点の値も a より大きい. つまり開集合である.

(7) 前問と同様に考えれば集合 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|f(x_1,x_2,\cdots,x_n)<a\}$ も開集合である. 与えられた集合はこの集合の補集合と前問の補集合の共通部分で, 開集合の補集合は閉集合であるからこれは閉集合である.

(8) 前問の解説より閉集合

第 5 章

問題 5.1 (1) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^2(x+y)dy=\int_0^1\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_0^2dx=3$ (2) 3 (3) 0

(4) $\dfrac{27}{4}$ (5) $-\dfrac{8}{3}$ (6) $-\dfrac{21}{2}$ (7) 2 (8) $\dfrac{1}{2}(e^4-e-e^{-2}+e^{-5})$ (9) $9\log 2-\dfrac{9}{2}$

(10) $-\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{\pi}{2}$ (11) $-\dfrac{e^2-3}{2}$ (12) $\arctan 2-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\log 5}{4}+\dfrac{\log 2}{2}$

問題 5.2 x で先に積分すると根号が現れないので計算が楽になっている.

問題 5.3 (1) $\dfrac{1}{24}$ (2) $\dfrac{1}{12}$ (3) 1 (4) $\dfrac{1}{8}$ (5) $\dfrac{1}{15}$ (6) 0 (7) $\dfrac{1}{3}$ (8) $\dfrac{7}{20}$ (9) $\dfrac{1}{15}$

(10) 積分が $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x}xy\,dy+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}xy\,dy$ になることに注意する. 関数と領域の形から後の積分は 0 である. 答も 0

(11) 積分は $\displaystyle\int_{-1}^{3} dx \int_{x^2}^{2x+3} xydy$ となる. 答は $\dfrac{164}{3}$

(12) 根号の中は 0 以上だから積分の下限は 0 であることに注意. 答は $\dfrac{1}{30}$

問題 5.4　(1) 順序を交換すれば $\displaystyle\int_1^2 dy \int_y^2 \frac{x}{y}dx$ となる. 答は $2\log 2 - \dfrac{3}{4}$

(2) 順序を交換すれば $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{y^3} \sqrt{x+y^3}\, dx$ となる. 答は $\dfrac{4}{33}\left(\sqrt{8}-1\right)$

問題 5.5　$\displaystyle\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$ で $x = t^2$ と変数変換する. 答は $\sqrt{\pi}$.

問題 5.6　(1) $0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ となる. 答えは $\dfrac{2\pi}{3}$

(2) $1 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ となる. 答えは $\dfrac{15}{32}\pi$

(3) $0 \leqq r,\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ となる. 答えは $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$

(4) $r^2 \leqq r + r\cos\theta$ より $0 \leqq r \leqq 1 + \cos\theta,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ となる. 答えは 3π

(5) $0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ となる. 答えは $\pi \log 2$

(6) $r^2 \leqq r\cos\theta$ より $0 \leqq r\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ となる. 答えは $\dfrac{8}{15}$

問題 5.7　省略

問題 5.8　変換 (5.10) を用いればよい. B-関数が現れることに注意.

問題 5.9　(1) $\dfrac{1}{450}$　(2) $\dfrac{17}{24} - \log 2$　(3) $\dfrac{e-2}{2}$　(4) $x^2 = u,\ \dfrac{y}{2} = v$ とおく. $\dfrac{8\pi}{5}$

問題 5.10　(1) $\dfrac{128}{3}$　(2) $2\pi + \dfrac{8}{3}$　(3) $\dfrac{4}{3}$　(4) $\dfrac{1}{10}$　(5) $2\pi + \dfrac{\pi}{2} - 1$　(6) $\dfrac{1}{48}$

問題 5.11　答は $r^2 \sin\theta$. $0 \leqq \theta \leqq \pi$ であるから $\sin\theta \geqq 0$ であることに注意.

問題 5.12　(1) $\dfrac{4\pi}{5}$　(2) $4\pi - \pi^2$

問題 5.13　省略

問題 5.14　$\displaystyle\frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}\right)} \int_0^1 f(t) t^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}-1} dt$

問題 5.15　前問を利用する. x, y, z の符号に制限がないことに注意する. 分子に現れる $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ は Γ 関数の性質を利用すると分母の Γ 関数の値と約分できる. 答は $\dfrac{8\pi abc}{5}$.

問題 5.16　$\dfrac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta)}$

問題 5.17　(1) 常に値 1 をとる関数 (2) 常に値 0 をとる関数 (3) A の補集合を $\bar{A}$ で表す. x が集合 A の要素であれば $\varphi_A(x) = 1$ であり $\varphi_{\bar{A}}(x) = 0$ であることに注意する.

(4) $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A \varphi_B,\ \varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \varphi_B$

問題 5.18 (1) $\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{8\pi}{3}-\dfrac{32}{9}$ (3) $\dfrac{16}{3}$

問題 5.19 x と $x+h$ の間に挟まれる部分の表面積は底辺が $2\pi|f(x)|$ で高さが $\sqrt{h^2+(hf'(x))^2}$ の長方形とみなせるから

問題 5.20 (1) $z=\dfrac{1}{3}(1-x-2y)$ より $\displaystyle\iint_{\substack{x+2y\leqq 0\\ x\geqq 0,\,y\geqq 0}}\sqrt{1+\left(\tfrac{1}{3}\right)^2+\left(\tfrac{2}{3}\right)^2}dxdy=\frac{\sqrt{14}}{12}$

(2) $\pi\left(1+\log(1+\sqrt{2})\right)$ (3) 8π (4) 省略

章末問題

1 (1) $\dfrac{4c_1c_2}{\left\|\begin{matrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{matrix}\right\|}$ (2) $\dfrac{8d_1d_2d_3}{\left\|\begin{matrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{matrix}\right\|}$ 外側の '|' は絶対値の記号である.

2 部分積分より $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}H_m(x)H_n(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}H_{m-1}(x)H_n'(x)dx$
$\displaystyle=n\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}H_{m-1}(x)H_{n-1}(x)dx$ を示せ. これより $m>n$ のときは値が 0 になる.
$m=n$ のときは $\displaystyle n!\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}n!$ となる. 最後の積分は例題 5.4 を参照

3 $ax^2=u, by^2=v$ とおけば例題 5.7 に帰着される.

4 $\displaystyle\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1}du=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

5 変数 x,y に関する重積分を変数 u,v に関する重積分に直す. 後は

$$z_u=z_xx_u+z_yy_u,\ z_v=z_xx_v+z_yy_v$$

を逆に解いて $z_x=-\dfrac{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$ などの式を得る. これを代入すればよい.

6 (1) $x^2=t$ とおくと与えられた積分は $\displaystyle\int\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$ となる. これを 0 から ∞ 間で積分する広義積分が収束することは第 3 章章末問題 3 と同様に証明される.
(2) 省略
(3) 問題にあるように置換すればよい.
(4) $\displaystyle I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\sin t dt\int_0^{\infty}e^{-tx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}\sin te^{-tx^2}dt$

ここで $\displaystyle\int \sin t e^{-tx^2} dt = \frac{1}{1+x^4}(-\cos t - x^2 \sin t)e^{-tx^2}$ から直ちに得られる.

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ を用いる.

($x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ と因数分解できることに注意.)

(6) $\displaystyle\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$