「理工系 微分積分学 –第 3 版–」
（荒井正治著・学術図書出版社）
2022 年 3 月 31 日 記
2023 年 3 月 20 日 追記
2025 年 3 月 20 日 追記

先生方へ著者より

本書は発刊以来多くの方々のご協力のもと，刷毎に誤字の訂正や練習問題の解答の誤りの修正等を繰り返し完成度を高めるように努めてきた．特に第 3 版第 9 刷（2019 年 3 月発行）においては従来にはない次のような大きな変更を行った．

1^o　巻末に微積分表と記号表を付けた

2^o　幾つかの解答を追加した

3^o　p.96 の連結の定義が，開集合にしか通用しない定義を全ての集合に対して成り立つ定義と誤解して書いていたのを訂正した．

4^o 例題 5.4.1 の 3 つの証明の順序を，読んで貰いたい順に入れ替えた．

その他小さな変更を随所に行った．

第 3 版第 12 刷（2022 年 2 月発行）において § 2.4 B,C の無限小，無限大の部分を大幅に書き換えた．

また，13 刷（2023 年 3 月発行）において § 2.3 (D) と § 3.4 (D) の極値に関する部分を大幅に書き換えた．

これらの書き直しや，第 8 刷以降の正誤表による修正は，立命館大学非常勤講師の川村勝紀先生のご指摘に触発されたものである．ここで感謝の意を表したい．しかし，そのご指摘を採用し，このような形に文章化した責任はすべて著者にある．

本書は，（数学科とか数理科学科といった数学を専攻するのではない）理工系の学生が初年度に学ぶ解析学の教科書として書かれたものであるが，実数論（いわゆる，ε–δ 論法）を基礎においた論理構成は採用していない．それ以外の点ではできる限り証明を付けたが，実数論が無ければ証明できない命題（連続関数が有界閉区間上では最大値，最小値をとるとか，中間値をとるとかといった命題）は，学生諸君に「なるほど」と思わせる説明を心がけた．また，厳密な証明ではないが，本書のレベルではこれで満足してもらおうという証明を「擬証明」としてかかげるなど，読者に納得感をもたせるように努めた．

理工系の学生が初年度に学ぶべき解析学の内容は，伝統的にほぼ定まっている．1 変数と多変数の微分法と積分法である．その意味では，本書の内容もまた類書とほぼ同じものである．ただ，1 変数（の微分法と積分法）を先に教え，その後多変数（の微分法と積分法）を教えるか（類書はほとんどこれ），微分法（1 変数と多変数）を先に教え，その後積分法（1 変数と多変数）を教えるかの違いとか，1 変数の微分法と積分法を同時に教えるとかの違いはあろう．

著者の勤務する立命館大学の理工系（数理科学科を除く）における解析系の科目では，前期に微分法（1 変数と多変数）を，後期に積分法（1 変数と多変数）を教えることとしているので，本書もそのスタイルに添っている．立命館大学では，前期と後期では担当者が変わることがありえることを前提として，前期には本書の第 1 章から第 3 章までを教え，後期には本書の第 4 章と第 5 章の 5.6 節までを必ず教え，それ以降は担当者の裁量に任せることとしている．この方法だと前期には教えるべきものが多過ぎ学生には過重な負担となるが，限られた時間内に限られたことを教えようとすると致し方なく，担当者各自が丁寧に教えるところ，さらりと触れるところを工夫している．

本書では，時間が無ければ飛ばしても良い箇所を小さな活字にしてあるが，活字の大小は，注意しなければなかなかわからないようだ．

本書は先述したように，実数論に基づかないという前提のもとで，論理性と納得感とのバランスを取りながら執筆した．そのような観点から特に留意した点やいまだに思い悩んでいる点をこの HP に書き連ねることとする．ご講義の際の参考にしていただければ幸いです．

全体

1^o　「偽証明」と「擬証明」(p.5 脚注 8）は著者の造語であるが成功しているだろうか．

2^o　集合の記法は $\{x \in \mathbb{R}\,;\, a \leqq x \leqq b\}$ と $\{f(x)\,|\,x \in \mathfrak{D}(f)\}$ という風に前後の区切りが “;” になったり “|” になったりと不統一であるがご容赦ください．

§1.1　学生諸君は絶対値を含んだ不等式は不得意のようである．例題 1.1.1 の証明中の p.7 の 3 行目

$$(0 \leqq)\ |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\,| = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| < \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}$$

の最後の不等式は例年質問が集中するところである．

例題 1.1.4 について：ここにあげた数列がどれも $n \to \infty$ のときに ∞ に発散することは重要な事実であるが，発散の速さという考えもまた工科系においても重要であるので，そのような考えに慣れさせるために例題をこのような形にした．しかし，そのような考えがこの時点ではまだ難しいと思われるならば，ここにあげた数列を $n \to \infty$ のときに ∞ に発散する数列の例としてあげるだけに止めておいても良いだろう．

§1.3 (D) 三角関数 は高校ですでに学んでいるとした．テイラー展開や微分方程式の解として定義する方法は採用しなかった．三角関数は直感的に円周や等速円運動と関連付けてこそ意味があると考えたからである．

§2.3 (D) と §3.4 (D) 極大・極小　第 12 刷までの定義 2.3.1 は間違っていた（これもまた川村先生のご指摘)．文章では，「$f(x)$ が $x = a$ で極大値をとるとは，そこで最大値をとることである」と書いていた．これは，広義極大値の定義である．一方，第 12 刷までの式 (2.3.2) は狭義の極大値の定義である．文章と式とが一致していなかったのである．

そこで，広義と狭義の両方を書くべきだろうが，それでは煩雑でわかりずらくなるのではなかろうかとか，もっとも重要な定理は定理 2.5.3 の $n = 2$ の場合だろうとか考えて，いままでどおり狭義だけを定義し，導入してみた．しかし，それでは例題 3.4.1 の証明がうまくいかないことに気付いた．最大値，最小値を問う問題に応用するためには，狭義の定義だけではうまくいかないようだ．結局，広義と狭義の両方を書くことにした．

なお，例題 2.3.2 の解には「定理 2.3.6 により」という文言は使われていない．それを使うならば，この極小値が最大値でもあるということを証明するべきであるが，一言ではすみそうにない．ここでは，定理 2.3.6 そのものではなく，その証明のアイデアを使っている．（この項 2023 年 3 月 20 日 追記）

§2.4 (B) 無限小，(C) 無限大 いわゆる order は，工科系にとっては必須の事項だと思って書き込んでおいたが，深入りしすぎたかもしれない．

この部分は第 12 刷 (2022 年 2 月発行) で大きく書き換えた．その理由は次のとおりである．いつも鋭い指摘を頂いている川村先生から練習問題 2.4 (B) 2. の不備が指摘された．$f(x) = O(x^\alpha)$ では $f(x) = x^p$ $(p > \alpha)$ がその例として許され，$g(x)$ についても同様であるから，γ が定まらないとのご指摘である．そこで，$O\,(x^\alpha)$, $O\,(x^\beta)$ を α 位, β 位におきかえることにした．

あらためて α 位 の定義を読み返してみてその不正確さに気付いた．$(x-a)^\alpha$ は $x < a$ で α が非整数のときには（本書のレベルでは）意味をもたない．そこだけなら，$(x-a)^\alpha$ を $|x-a|^\alpha$ に書き換えればよいであろう．しかし，この場合 $\sin x/|x|$ は $x \to 0$ のとき収束しないので 「$\sin x$ は 1 位の無限小である」という命題が成り立たなくなる．この命題が成り立たないようなら「何位の無限小」という概念自体が価値の無い概念に思える．この場合だと，分子にも絶対値を付ければうまく切り抜けられる．あちらこちらに絶対値を付ければ論理的にはうまくいくが，わかりやさ，納得しやすさの点ではどうであろうか．なぜ絶対値が必要かをくどくど説明することは本質を見失わせることになるであろう．そこで，思い切って $x \to +0$ の場合だけを書き，それ以外のときは「同様に」と誤魔化しておい

た．その誤魔化しに気付くほどの学生ならば，その解決策も自力で見つけられるであろう．

同位の無限小の定義にも問題がある．本書では

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell \quad \text{が存在して} \quad \ell\neq 0 \qquad (*)$$

であることを同位の無限小の定義とした．このような定義を採用している成書もあるが

$$f(x)=O(g(x)) \quad \text{かつ} \quad g(x)=O(f(x)) \qquad (x\to+0) \qquad (**)$$

を同位の無限小の定義とするのが一般的である．何度も書くが，私としては，「$\sin x$ は 1 位の無限小である」という命題だけは譲れない．この命題を定義 $(**)$ のもとで証明しようとすると，$(*)$ を証明したうえで，

$$(*) \quad \text{ならば} \quad (**)$$

という定理に訴えることになるのではなかろうか．しかし，この定理の証明は §2.6 (B) の議論を先取りすることになり，ここで取り上げるのはためらわれる．

そういう訳で，同位の無限小の定義には $(*)$ を採用した．

§2.5 と §3.5 テイラーの定理　第 3 版 14 刷までは，第 2 章と第 3 章では，「テイラー展開」という語を，定義することなくテイラーの定理 (定理 2.5.1 と定理 3.4.2) の意味に使いながら，他方，§6.3 D でその語をべき級数の意味で定義していた (前者は有限の項数，後者は無限の項数)．

正しくは，「テイラー展開」という語は §6.3 D で定義した意味に限るべきであるから，第 3 版 15 刷以降ではそのように改め，第 2 章と第 3 章ではそれまで「テイラー展開」と書いていたところを「テイラーの定理」に書き改めた．(この項 2025 年 3 月 20 日追記)

§2.6 (B) 極限についての補足　ここでは，いわゆる ε–δ について触れられているが，著者としては，これを「極限の厳密な定義」として書いたのではなく，単なる「極限の 1 つの捉え方」というスタンスで書いた．また，収束の速さという考えは工科系においては重要なことであろう．この部分は，後では極力使わないようにしようとしたが，例題 2.6.3（と練習問題 2.6 (B) 3.）を何度か使わざるをえなかった．

§3.1 の開集合だとか領域だとかには深入りせず，問 3.1.3 でそのイメージを掴ませることとした．閉集合はその定義を脚注で与えるにとどめたが，それで良かったかどうかは 1 つ次の項で検討する．

p.96 の連結の定義 は第 8 刷までは間違っていたので訂正した．ここでは，連結性は $\mathbb{R}^N$ 内の開集合に対してしか定義しないこととした．一般の集合 A の連結の定義を，相対位相の言葉を使わずに述べると

$$A=(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2), G_1, G_2: \text{開集合}, A\cap G_1\cap G_2=\emptyset \Longrightarrow A\cap G_1=\emptyset \text{ または } A\cap G_2=\emptyset$$

となり，何が何だかわからなくなる．開球が連結であるということすら証明できないのでは意味がないだろう．

§3.3 合成関数の偏微分法　連鎖律にまつわる話は少し丁寧に書いたつもりである．写像 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ における

$$\Delta\boldsymbol{x}\mapsto\Delta\boldsymbol{y}$$

の 1 次の部分の行列表示であるヤコビ行列については是非触れておきかったが，線形代数の講義においても線形性がクローズアップされるのは後期になってからであるという状況では，学生に対する説得力に欠ける嫌いもあるが，定理 3.3.4 の擬証明では威力を発揮している．

閉集合と定理 3.4.5 と例題 3.5.1　ここの書き方は悩んだ末のことである．

定理 3.4.5 の有界閉領域とあるところを有界閉集合に置き換えるべきかどうかという点である．どうせ証明しないのだから難易度は同じある．そうすれば例題 3.4.1 だけではなく，例題 3.5.1 でも最大値，最小値の存在が保証されるというわけである．

ただ，この教科書では閉集合は p.96 の脚注で定義を述べただけであり，全然説明していない．ここで閉集合の概念を使うためには学生諸君に閉集合に対するイメージを与えておかなければならない．それは，定義を与えた p.96 ではなく，それを使う必要がおこった p.127 で行うのが適切であろう．

さらに，最低限

1^o　閉領域が閉集合であること

2^o　円周 $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$ が閉集合であること

を証明しなければならない．期末の只でさえ時間の無いときにこれだけのことを教えるのは大変だろうと思って，現行のような書き方とした．別の教え方も当然ありえよう．

§4.1 原始関数　不定積分の公式を初級コースと中級コースに分け，「中級コースの公式は暗記しなくても良いですよ」という教え方が可能な書き方にしておいた．

§4.1 原始関数

1^o　p. 154 で導入したリーマン和を表す記号

$$R(\Delta,\, [a,b],\, f)$$

は，正確には分点の代表点 ξ_i の取りかたにも依存するのであるから，

$$R(\Delta,\, \{\xi_i\},\, [a,b],\, f)$$

と書くべきものであるがこのままにしておく．

2^o　「「定積分の定義に従って，関数 $f(x)=x$ が $[a,b]$ 上で定積分可能であることを証明し，その定積分の値を求めよ」という問題を出そうとしたが，難しいので止めた．どなたか，簡単な証明（本書の練習問題 (A) のレベル）をご存じでしょうか.」と書いたところ，川村先生からエレガントな証明を頂いた．皆様も考えてみてはいかがでしょうか.

§4.4 微分積分と数理モデル　ここは，微分方程式の解法を目的とはしていず，数学が具体的な問題の解決に役立ちますよ，ということを言いたかったのであるから，担当者によっては飛ばすこともありえよう．

第 5 章 重積分　重積分の定義は，伝統的には，

1^o　長方形上での重積分の定義

2^o　面積確定な集合とその上での重積分の定義

3^o　基本集合の定義

4^o　基本集合が面積確定であり，その上での連続関数が可積分であることの紹介

と進むが，本書では「面積確定」という概念は表に出さず，

基本集合の定義とその上での重積分の定義

だけに話を限定した．

§5.7 ストークスの定理などは全然教えないということもありえようし，2 次元（A. 線積分・グリーンの定理）の部分だけ講義するということも考えられよう．

§6.2 の定義 6.4.2 の**絶対一様収束**という語について：ある先生から「そのような用語はあるのか」と指摘され，慌てて調べてみると，使用例が無いわけではないが，ほとんど無く，ポピュラーな用語ではないことがわかった．

多くの類書では，ワイエルシュトラスの優級数定理（定理 6.2.9）の結論を

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \text{ が収束し，} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ が一様収束する} \tag{$*$}$$

と書いており，それから導かれる巾級数の理論も

$$\text{収束円の内部では絶対収束し，収束円の完全内部では一様収束する} \tag{$**$}$$

という形になっているようである．

$(*)$ を絶対一様収束と呼んでいる本もあるが，これは本書での定義とは異なる．本書の意味で絶対一様収束する関数列は，当然 $(*)$ を満たすが，逆は必ずしも正しくはない．練習問題 6.2 (B) 5. はその反例である．

なお，本書で絶対一様収束と呼んだものを「絶対かつ一様収束」と呼んでいる本もあったが，小生にはこの語は $(*)$ に相応しい語のように思われる．