

物理学概論

—高校物理から大学物理への橋渡し—

[力学編]

近藤 康 著

学術図書出版社

はしがき

本書は、高校の物理と大学の物理の橋渡しをすることを目的に書かれています。高校の物理と大学の物理の大きな違いは数学の取り扱いにある、と著者は考えています。それは、

物理学は実験科学である

ことにも結びついています。物理学で用いられる概念は実験的に検証できるものでなければならず、測定によって数値化できるものでなければなりません^{注1}。その数値化されたものに対して数学が適用されます。すなわち、数学は物理現象を記述するための「言語」なのです。

また、物理学は、

論理的な思考によって自然の振る舞いを原理から考察する

学問ということもできます。物理学を学ぶことを通じてこの論理的な思考法を身につければ、生きていく上で素晴らしい知的な「武器」を得ることができます。そして、その武器の対象を「自然（物理学）」から、「人間の作ったもの（工学）」、「生命（生物学）」、「人間の集団としての活動（経済学）」など様々な分野に広げることができます。この論理は数学を使って展開されます。数学は論理的な思考を記述するための便利な「言語」でもあります。数学は「言語」ですから、慣れるためには、多少の訓練が必要です^{注2}。でも、それだけの努力を行う価値があるものです。

また、数学の中には様々な「道具＝数学の概念」があります。道具は便利なものですが、必ずしも簡単に使いこなせない場合もあります。また、すべての学生がすべての「道具」を同じように使いこなせるようになる必要もないでしょうし、他の勉強との兼ね合いで可能でもないでしょう。

本書では、「ある道具」の使い方に応じて内容を3種類に^{注3}分類しています。

- できるだけ「ある道具」を使わないようにする^{♡注4}
もっとも大切な内容です。すべての学生に学んで欲しい物理を記述しています。理工系以外の学生^{注5}ならば、これらを勉強すれば十分な場合も多いでしょう。高校で学ぶ物理学の内容に対応します。
- 「ある道具」の使い方入門
できるだけ「ある道具」を使わないようにして考えた内容を「ある

注1 幽霊が科学の対象にならないのは、数値化できないからだと思っています。

注2 多くの学生は英語という「言語」の勉強＝訓練に、苦勞しているはずで。

注3 高校の物理と大学の物理の橋渡しをするためです。

注4 記号♡、♠は目次の記号に対応しています。

注5 理工系でも分野によれば、十分な場合も多々あります。

道具」を用いて考え直します。大学での物理学らしい内容となります。理工系の学生は、このレベルの「道具」の使い方は学んで欲しいと思います。

- 「ある道具」の便利さを享受する ◆ 注4

「ある道具」への慣れが必要なので、最初はこの部分は勉強しなくても良いでしょう。また、理工系の学生といえども、必ずしも全員がここの内容を理解する必要はないと思います。

さて、この「ある道具」とは何かわかりますね？ そう、微分・積分とベクトルです。本書では、これらの「道具」の使い方を学ぶ上で最も適したニュートン力学をとりあげました。

注6 手に取っただけでは、ダメですよ。

本書で勉強した注6 大学生は、「数学を使った論理的な思考法」という社会に出て役に立つ知的な「武器」を手に入れることができます。また、高校の物理と大学の物理の橋渡しという観点から、意欲のある高校生にも、本書を使って勉強してもらいたいと思います。多少難しく感じるころはあるかもしれませんが、それは論理の飛躍がないようにしているためです。しっかり勉強すると、論理の飛躍がない分「わかりやすい」と思えるはずですよ。

詳細な章末問題の解答は

<https://www.gakujutsu.co.jp/text/isbn978-4-7806-0862-5/>



に公開します。もしも、本文や解答に間違いを見つけた場合は

ykondo@kindai.ac.jp

までご連絡いただけると幸いです。

目 次

第 1 章	イントロダクション	1
1.1	物理学とは [♡]	1
1.2	測定と誤差 [♡]	2
1.3	実験科学としての物理学	4
1.4	空間と時間	6
1.5	物理法則と単位系 [♡]	6
1.6	次元解析 [♡]	7
1.7	測定の不確かさ	9
1.8	表記法	11
	章末問題	12
	コラム 計算を行う際に注意すべきこと	14
第 2 章	直線上の物体の運動	15
2.1	1次元運動における座標, 速度, 加速度 [♡]	15
2.2	等速直線運動 [♡]	17
2.3	等加速度直線運動 [♡]	18
2.4	物理と微積分	20
2.5	微分と積分の関係	21
2.6	直線上の等速度運動と等加速度運動	21
2.7	微分の公式 [♠]	23
2.8	積分の概念 [♠]	24
2.9	具体的な関数の微分 [♠]	25
	章末問題	26
	コラム 科学者も人の子	29
第 3 章	3次元空間中の物体の運動	30
3.1	速度の合成と分解 [♡]	30
3.2	平面内の運動 [♡]	34
3.3	小物体の運動の測定とベクトルによる運動の記述	37
3.4	平均の速度と加速度, 瞬間の速度と加速度	38
3.5	速度の合成と相対運動	40

3.6	単位ベクトル	41
3.7	3次元空間中の有向線分 [◆]	42
3.8	ベクトルとしての順序をもった数の組 [◆]	43
	章末問題	44
	コラム 教育に実験は必要か?	47
第4章	様々な力とそのはたらき	48
4.1	様々な力 [♡]	48
4.2	力の合成 [♡]	50
4.3	力の測定の難しさ	53
	章末問題	54
	コラム 生意気であれ, 大胆であれ	56
第5章	運動の法則	57
5.1	ニュートンの運動の法則 [♡]	57
5.2	様々な運動 [♡]	59
5.3	ニュートンの運動法則の解釈 [◆]	63
5.4	見かけの力	64
5.5	運動方程式の解法	65
5.6	空気抵抗を受ける物体の落下運動	66
	章末問題	68
	コラム 擬似理論に騙されるな	71
第6章	円運動と振動	73
6.1	等速円運動 [♡]	73
6.2	単振動 [♡]	77
6.3	等速円運動, 単振動と微分	80
6.4	単振動と運動方程式	81
6.5	円運動と運動方程式	82
	章末問題	84
	コラム クラークの3法則	87
第7章	仕事と力学的エネルギー	88
7.1	仕事 [♡]	88
7.2	運動エネルギー [♡]	90
7.3	位置エネルギー [♡]	92
7.4	力学的エネルギー保存の法則 [♡]	94

7.5	ベクトルの内積	96
7.6	仕事と仕事率	97
7.7	保存力	100
7.8	偏微分 (偏導関数) : 多変数の関数への微分の拡張	101
7.9	ポテンシャルエネルギーと保存力	102
7.10	ストークスの定理と保存力 [◆]	103
7.11	保存力のもとでの運動と運動エネルギー [◆]	105
	章末問題	107
	コラム back-of-the-envelope-calculation	110
第 8 章	運動量と角運動量	111
8.1	運動量 [♡]	111
8.2	面積速度と角運動量 [♡]	112
8.3	ベクトルの外積	114
8.4	中心力のもとでの保存量	115
8.5	円運動	118
8.6	保存量の概念 [◆]	118
	章末問題	120
	コラム 対称性と保存量	123
第 9 章	質点系の運動	124
9.1	直線上を運動する物体の衝突 [♡]	124
9.2	平面上での物体の衝突 [♡]	125
9.3	反発係数 [♡]	127
9.4	衝突によるエネルギーの減少	128
9.5	3 個の質点について	129
9.6	孤立系	131
9.7	質点系と重心	131
9.8	重心の運動方程式の導出 [◆]	132
9.9	質点系に作用する力のモーメントとその角運動量 [◆]	133
	章末問題	135
	コラム 空中で飛行機を支える力	138
第 10 章	剛体の力学	141
10.1	力のモーメント [♡]	141
10.2	剛体のつりあい ^{I♡}	142

10.3 重心 [♡]	144
10.4 剛体の自由度と回転	144
10.5 剛体のつりあい II	145
10.6 剛体の回転運動 [♡]	147
10.7 多重積分	149
10.8 さまざまな物体の重心 [♣]	150
10.9 様々な物体の慣性モーメント [♣]	153
章末問題	156
コラム 恒星間宇宙船	160
第 11 章 万有引力による運動	162
11.1 天体の運行と物理学 [♡]	162
11.2 第 1 および第 2 宇宙速度 [♡]	164
11.3 ベクトルを用いた万有引力の表式	166
11.4 万有引力による位置エネルギー [♣]	166
11.5 万有引力のもとでの運動 [♣]	167
章末問題	171
コラム 宇宙人はいる?	174
索引	179

イントロダクション

物理学は、測定を通して自然を理解しようとする学問である。何をどのようにして測定するか？ その測定結果をどのように表現するか？ が大切である。

1.1 物理学とは

物理学では、概念を数量的な関係^{注1}によって表すので、対象を数量的に表す必要がある。そのような物理学で対象とする量のことを**物理量**と呼び、

$$\text{物理量} = \text{数値} \times \text{単位}$$

のように**基準となる量（単位）**をもとに、その量の何倍かによって表す^{注2}。対象が基準となる量の何倍であるかを求める作業が**測定**である。もっとも基本となる物理量を表1.1にまとめる。物理学では、宇宙の大きさのような非常に大きな物理量から原子核の大きさのような非常に小さな物理量まで扱う必要がある^{注3}。そこで^{注4}、 $7.0 \times 10^{26} \text{ m}$ や $1.0 \times 10^{-15} \text{ m}$ のように指数を使って表すことが多い。

表 1.1 基本となる物理量

物理量	単位	記号
距離	メートル	m
時間	秒	s
質量	キログラム	kg
電流	アンペア	A

物理学では、物理量間の関係が数式として表される。例えば、速さ^{注5}は、

$$\text{速さ} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = \frac{\text{移動距離} [\text{m}]}{\text{経過時間} [\text{s}]}$$

である。このように、**基本となる物理量を組み合わせることによって**、新たに様々な物理量を考えることができる。また、速さ $v [\text{m/s}]$ 、距離 $x [\text{m}]$ 、時間 $t [\text{s}]$ ^{注6} のように、**物理量を表す英文字を用いて** $v = \frac{x}{t}$ のように簡潔に表すことが多い。

注1 ここで示した数量的な関係とは、数式のことを指す。

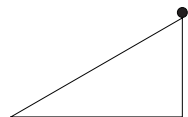
注2 $A = B$ は “A is B.” のことで、“=” は “is” と読む。ここでは、「物理量は数値 × 単位である」と読む。古い英語の論文では、数式はピリオドで終わり、be 動詞をつかった文として扱われていた。

注3 本書の表紙を参照のこと。

注4 $\text{G}(10^9)$ 、 $\text{M}(10^6)$ 、 $\text{k}(10^3)$ 、 $\text{m}(10^{-3})$ 、 $\mu(10^{-6})$ 、 $\text{n}(10^{-9})$ のような10の整数乗倍を表す接頭語を使う場合もある。

注5 距離 $5.0 \times 10^1 \text{ m}$ を時間 $1.0 \times 10^1 \text{ s}$ で移動した場合の速さは、 $5.0 \text{ m/s} = (5.0 \times 10^1) \text{ m} / (1.0 \times 10^1) \text{ s}$ となる。数値も単位も両辺で等しい。

注6 高校では、変数を表す英文字の後にその物理量の単位をつけることが基本である。しかしながら、煩雑さを避けるために単位を省略することもある。 $t [\text{s}]$ のような「変数 [単位]」での [単位] は、変数がどのような物理量を使うかを示す「メモ」であると考えれば良いだろう。



1.2 測定と誤差

注7 「真の値」という概念については1.7節で考察する。

物理学では測定によって物理量の測定値を得るが、測定値と真の値^{注7}の間には常に差がある。測定値と真の値との差を誤差（絶対誤差）という。また、真の値に対する誤差の割合を相対誤差といい、測定値の精度を表す指標として用いられる。

$$\text{誤差} = \text{測定値} - \text{真の値}, \quad \text{相対誤差}[\%] = \frac{\text{誤差}}{\text{真の値}} \times 100$$

誤差は、測定器具の目盛の不確かさ、測定者のくせなど、様々な原因によって生じる。

物理量を測定する場合には、一般に測定器具の最小目盛の $\frac{1}{10}$ までを目分量で読みとる。例えば、図1.1から、19.2 mmと板1辺の長さを読みとることができる。数字の1と9は間違いないが、最後の桁の数字の2は測定者によって変化する可能性があり誤差を含んでいる。しかしながら、9ではないことは明らかなので意味がある数字である。そこで、上の1と9と2を有効数字といい、有効数字は3桁であるという。有効数字の桁数が明らかになるように $\square.\square\square\square \times 10^n$ の形で測定値を表す。上の場合は、 1.92×10^1 mmである。

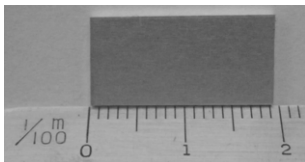


図1.1 板の1辺の長さの測定。
最小目盛は1 mmである。

誤差のある数値を計算する場合には、以下のルールに従う。

- 足し算, 引き算

計算結果の末位を、もっとも末位の高い数値にそろえる^{注8}。

$$\begin{array}{r} 11.\underline{5} \\ +) 1.\underline{25} \\ \hline 12.\underline{75} \\ \text{最終の解 } 12.\underline{8} \end{array}, \quad \begin{array}{r} 11.\underline{5} \\ -) 1.\underline{84} \\ \hline 9.\underline{66} \\ \text{最終の解 } 9.\underline{7} \end{array}$$

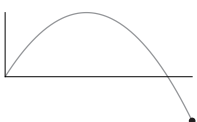
- 掛け算, 割り算

計算結果の桁数を、有効数字の桁数の最も少ない数値にそろえる。

$$\begin{array}{r} 1.\underline{15} \times 10^2 \\ \times) 1.\underline{5} \times 10^1 \\ \hline 0.\underline{575} \times 10^3 \\ 1.\underline{15} \times 10^3 \\ \hline 1.\underline{725} \times 10^3 \\ \text{最終の解 } 1.\underline{7} \times 10^3 \end{array}, \quad 1.\underline{15}/1.\underline{5} = 0.\underline{7666}\dots = \underline{7.7} \times 10^{-1} \quad \text{最終の解}$$

- 定数を含む計算

円周率 π や自然対数の底 e のような定数は、測定値の桁数よりも1



桁多い有効桁をもった数値で近似して計算すれば良い。

例題 1.1 有効数字を考慮して次の計算をせよ。

- (1) $0.11 + 1.01$
- (2) $1.0 + 1.11$
- (3) $1.31 - 1.11$
- (4) $1.1 - 1.01$
- (5) $(9.9 \times 10^{-1}) \times (9.9 \times 10^{-1})$
- (6) $9.9 \times 10^{-1} \times 0.9$
- (7) $(9.9 \times 10^{-1})/3.0$
- (8) $(9.9 \times 10^{-1})/3$

解 (1) $0.11 + 1.01$

どちらも小数第2位まで有効桁があるので、

$$0.11 + 1.01 = 1.12 \quad \rightarrow \quad 1.12$$

となる。

(2) $1.0 + 1.11$

最初の数は有効桁が小数第1位までなので、計算した後に小数第2位を四捨五入する。したがって、

$$1.0 + 1.11 = 2.11 \quad \rightarrow \quad 2.1$$

となる。

(3) $1.31 - 1.11$

どちらも小数第2位まで有効桁があるので、

$$1.31 - 1.11 = 0.20 \quad \rightarrow \quad 2.0 \times 10^{-1}$$

となる。小数第2位の0は意味があるので省いてはいけない。

(4) $1.1 - 1.01$

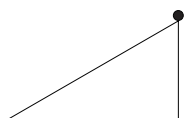
最初の数は有効桁が小数第1位までなので、計算した後に小数第2位を四捨五入する。したがって、

$$1.1 - 1.01 = 0.09 \quad \rightarrow \quad 0.1 = 1 \times 10^{-1}$$

となる。

(5) $(9.9 \times 10^{-1}) \times (9.9 \times 10^{-1})$

有効数字と指数を別々に計算して、最後に有効数字を有効桁に丸める。ここでは、どちらも有効桁は2桁なので2桁に丸



める.

$$(9.9 \times 9.9) \times 10^{-2} = 98.01 \times 10^{-2} \rightarrow 9.8 \times 10^{-1}$$

(6) $(9.9 \times 10^{-1}) \times 0.9$

有効数字と指数を別々に計算して、最後に有効数字を有効桁に丸める。ここでは、有効桁が1桁の数があるので、1桁に丸める。

$$(9.9 \cdot 9) \times 10^{-2} = 89.1 \times 10^{-2} \rightarrow 9 \times 10^{-1}$$

(7) $(9.9 \times 10^{-1})/3.0$

有効数字と指数を別々に計算して、最後に有効数字を有効桁に丸める。ここでは、どちらも有効桁は2桁なので2桁に丸める。

$$9.9/3.0 \times 10^{-1} = 3.3 \times 10^{-1} \rightarrow 3.3 \times 10^{-1}$$

(8) $(9.9 \times 10^{-1})/3$

有効数字と指数を別々に計算して、最後に有効数字を有効桁に丸める。ここでは、有効桁が1桁の数があるので、1桁に丸める。

$$9.9/3 \times 10^{-1} = 3.3 \times 10^{-1} \rightarrow 3 \times 10^{-1}$$

1.3 実験科学としての物理学

物理学は測定を基礎とおく。ここで、測定とは

ある基準に対して、対象がどれぐらいの大きさであるかを知る行為である。例えば、あるものの長さの測定とは、その長さが基準となる物差しが目盛いくつに相当するかを知る行為である。

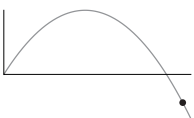
そして、物理学は、その測定に基づいて

自然現象を原理から理解する試みを行う

学問である。その試みとは、以下のようなサイクルを行うことを意味している。

- 測定を行う
- 測定結果を説明するモデル（理論）を作る
- そのモデルに基づいて予想を行う ^{注9}
- 予想に対応した結果が得られるはずの測定を行う

注9 本書で学ぶのは、この「予想を行う方法」である。



- 予想と新たに測定した結果が合致するかどうかを判定し、合致しなければモデルを改良する

ただし、予想と新たに測定した結果が合致するかどうかの判定には、

- 測定には様々な不確かさが避けられない
- どの程度の精度を要求するか

を考慮する必要がある。

例えば、ニュートン力学とアインシュタインの相対性理論を比較しよう。物体の運動速度が光速よりも十分小さい我々の日常生活の範囲内の現象の理解には、ニュートン力学は必要十分な精度の予想を行える。実際、月着陸を実現したアポロ計画ではニュートン力学で十分であった。しかしながら、光速に近い運動を行う素粒子では、相対性理論が予想する時間の伸びに対応した寿命の伸びが観測されている。あるいは、飛行機の運行に伴うわずかな時間の伸びも、原子時計という高精度の時計を用いることによって観測できている。また、GPSでは相対性理論を考慮しないと十分な精度が得られないことも知られている。一方、相対性理論も、宇宙初期を説明する理論（モデル）としては不十分であることが知られている。これらは、目的や測定の精度に応じて必要なモデルが異なってくるという典型的な例である。このような物理学の特徴を

物理学は近似の学問である

ということが出来る。いいかえると、「物理学は重要なことだけを選んで、そこに考えることを集中する学問」ということも出来る。

本書では、十分成功したと誰もが認めるモデル（ニュートン力学）を理解し、そのモデルに従って予想をいかに行うかを学ぶ^{注10}。

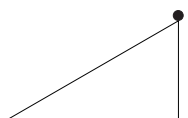
物理学は、別のいい方をすると、

最少の法則によって対象を説明する論理の枠組みを作る

学問である。数学と物理学はどちらも論理の枠組みを作る学問ではあるが、大きな違いがある。数学は公理を仮定した上で論証によって定理を導き出す。一方、物理学は公理を仮定するという立場をとらず、自然界を説明できるかどうかを正誤の判断基準^{注11}になる。したがって、物理学では実験技術の進歩に伴い新しい現象や物質が発見されることによって、新しい論理の枠組みが要請されることがある。例えば、量子力学や相対性理論という新しい論理の枠組みが20世紀に構築された。本書で学ぶ古典力学も、ニュートンらによって17世紀に新たに構築された論理の枠組みである。

注10 本書で学ぶことは、実験事実や観測に基づいて本質を理解する体験である。

注11 物理学の法則は、実験や観測に基づき発見されるものである。物理学の法則や数学の公理は証明できない。



注12 高校では、あえて空間と時間を意識しなかったが、ここでは自然現象の舞台を再確認しよう。

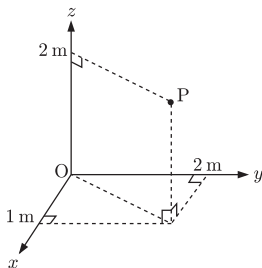


図1.2 3次元空間中の点Pの位置の指定方法。

注13 この数値の組をベクトルとすることができる。ベクトルについては第3章で詳細に議論する。

注14 1mは、光が真空中を1s間に進む距離の299792458分の1の長さとして定義されている。

注15 時間が一方にしか進まないことを、時間の矢という。

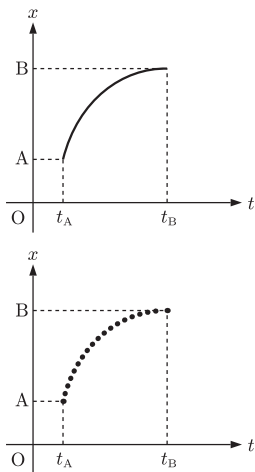


図1.3 連続的な物理量と、その不連続な測定結果。

注16 セシウム133原子の基底状態の2つの超微細準位間の遷移に対応する放射の9192631770周期の継続時間が、1sと定義されている。

1.4 空間と時間

「自然界の現象」という表現^{注12}は、現象が起こる空間と現象が起こる順序、すなわち時間が存在していることを意味している。

本書で取り扱う現象の舞台となる空間は、四方上下に無限の広がりをもっていると考えられる。この空間中には互いに直交する3本の直線をとることができるので、3次元空間という。この空間中の点Pは、空間中にお互いに直交する3本の座標軸を導入して、図1.2のように3つの数値の組^{注13}を決めることによって指定することができる。これらの数値の単位はメートル^{注14}である。

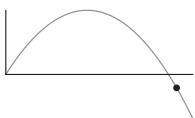
時間は一様に流れ、始めも終わりもなく無限に続いていると考えられる。高温の物体から低温の物体へは熱が伝わるが、低温の物体から高温の物体へ熱が伝わることはないという、一方向にしか進まない現象^{注15}が観測される。このことより、時の流れは止められず、逆戻しすることはできないと考えられる。時間は連続していると考えられるので、ある物体の空間中の位置も連続的に変化するはずである。したがって、横軸に時間を、縦軸に物体の位置をとってグラフを描くと連続した線になり、不連続にジャンプすることはありえない。一方、測定は原理的に連続的に行うことはできない。物理学は不連続にしか得ることができない自然についての情報から、連続的に起こる自然現象を論理的に再構成する学問ということができる。

ある事象から別の事象までの時間間隔は、その間に周期的な現象を観測して、その現象がその時間間隔の間に何回起こったかを数えることによって測定することができる。例えば、振り子時計は振り子の周期運動が何回起こったかを測定する装置である。時間の単位は1s^{注16}である。

現在、宇宙の大きさは有限で、しかも始まりもあったことがわかっている。しかしながら、我々が興味をもつ現象によっては、空間は無限で時間に始まりも終わりもないと近似することが可能である。本書で議論するのは、そのような近似が許される現象である。

1.5 物理法則と単位系[♡]

物理法則は物理量間の関係を数式で表したものである。例えば、ニュートンは、物体の運動では質量、加速度、力がお互いに関係していることに気



づき,

$$\text{質量} \times \text{加速度} = \text{力}$$

という物理法則を発見した。左辺は質量と加速度の積であり、右辺は力である。数式の両辺では数値も単位も等しくなければならない。この例では、質量の単位 (kg)、加速度の単位 (m/s^2)、そして力の単位 (N, ニュートン)の間には、 $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ という関係がなければならない。このように、様々な単位の間には法則を通じて関係があるはずである。そこで、このような相互に関連した単位の体系^{注17}のことを単位系という。我々が使う単位系は国際単位系 (SI)^{注18}で、時間 (s)、長さ (m)、質量 (kg)、電流 (A)、温度 (K)、光度 (cd ^{注19})、物質質量 (mol) の7つの単位を基本とした単位系である。

物理法則を表す数式は、各物理量を表す英文字による記号を使うと、簡潔に表現できるので、便利である。例えば、ニュートンの発見した運動法則ならば^{注20},

$$ma = F$$

と表す。ただし、 m, a, F はそれぞれ質量、加速度、力という物理量を表すこととする。すなわち、これらの記号には単位も含まれている。別のいい方をすると、このニュートンの発見した法則は単位系によらずに成り立つ^{注21}ことを意識して学ぶということである。ただし、本書では国際単位系での単位を意識するために、各章の最初の基礎的な(♡のついた)セクションでは、高校での表記に従って、 $F[\text{N}]$ のように変数に単位をつけて表している。

1.6 次元解析 ♡

力学における任意の物理量は、長さ、時間、質量の基本量を表す因数の^{べき}乗の積として表すことができ、これらの乗を次元と呼ぶ。この次元を応用すれば、複数の物理量間の関係を予測することができる。

長方形の面積は2辺の積で、三角形の面積は底辺の長さ^と高さの積の半分^で表される。このように様々な図形の面積は係数を無視すれば、なんらかの[長さ] × [長さ] で表すことができる。同様に考えると、体積や角度も次のように[長さ]の乗で表すことができる^{注22}。

- [面積] = [長さ] × [長さ] = [長さ]²
- [体積] = [長さ] × [長さ] × [長さ] = [長さ]³
- [角度] = $\frac{[\text{長さ}]}{[\text{長さ}]}$ = [長さ]⁰

注17 高校では、単位は学んでも、それを体系だったものとはあまり捉えない。

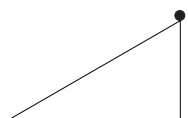
注18 国際単位系は英語で International System of Unit とかく。略称の SI はフランス語表記の *Système International d'unités* に由来する。

注19 cd はカンデラと読む。

注20 高校での表記に従えば、「質量 m [kg]、加速度 a [m/s^2]、力 F [N] の間には、関係 $ma = F$ がある」となる。

注21 通常、我々は国際単位系しか用いないので、このように意識する必要はあまりない。しかしながら、原理を理解しておくことは大切である。

注22 角度は、その角を見込む弧の長さとその円の半径の比(弧度法)によって定義できる。



注23 本書では, $[*]$ は $*$ の次元を表す記号とする. このような関係が [長さ]^{注23} の次元による面積, 体積, 角度の表現である.

この考えを拡張すると, 本書で現れる様々な物理量を, [長さ] = L, [質量] = M, [時間] = T を表す因数の冪乗の積として表すことができる. ここで,

注24 基本物理量としては, 他に電流, 温度, 物質質量, 光度がある. L, M, T は国際的に定められた長さ, 質量, 時間を表す記号である^{注24}.

例題 1.2 いくつかの物理量の次元について考えてみよう.

- (1) 速度の次元
- (2) 加速度の次元
- (3) 力の次元
- (4) 運動量の次元

解 (1) 速度の次元

$$[\text{速度}] = \left[\frac{\text{距離}}{\text{時間}} \right] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

(2) 加速度の次元

$$[\text{加速度}] = \left[\frac{\text{速度}}{\text{時間}} \right] = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$$

(3) 力の次元

$$[\text{力}] = [\text{質量} \cdot \text{加速度}] = MLT^{-2}$$

(4) 運動量の次元

$$[\text{運動量}] = [\text{質量} \cdot \text{速度}] = MLT^{-1}$$

物理的な関係を表す数式においては, 両辺の次元が一致しなくてはならない. したがって, 既知の物理量の組み合わせが求めたい物理量の次元に一致するように式を立てれば, 正しい関係になっている可能性が高い.

では, 単振り子の周期 T について考えてみよう. 周期を決定する要因として考えられるのは, 振り子のおもりの質量 m , 長さ l , 重力加速度 g のみである^{注25}. 未知変数 x, y, z を用いて,

$$T = \alpha l^x m^y g^z \tag{1.1}$$

と表すことができる. ここで, α は次元をもたない定数である. 次元解析を行うと^{注26}

$$[T] = [\alpha][l]^x [m]^y [g]^z \tag{1.2}$$

となる. 基本量を表す記号で書くと

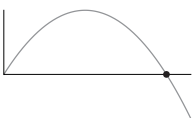
$$T = L^x M^y (LT^{-2})^z = L^{x+z} M^y T^{-2z} \tag{1.3}$$

となり,

$$x + z = 0, y = 0, -2z = 1 \tag{1.4}$$

注25 次元解析を行うので, 単位はつけない.

注26 斜体 T と立体 T は全く別のものを表している.



である。これらより、 $x = 1/2, y = 0, z = -1/2$ が得られる。したがって、

$$T = \alpha \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1.5}$$

が得られる^{注27}。

注27 α の値は次元解析では得られない。

例題 1.3 ばね定数が k 、おもりの質量が m のばね振り子がある。このばね振り子を水平な台の上において振動させる。この振動の周期 T の次元解析を行って、 T, k, m の間の関係を考察せよ。

解 関連する物理量は T, m, k のみである。したがって、それらの間になんらかの関係が期待される。その関係を

$$T = \alpha m^x k^y$$

とおこう。 α は無次元の定数である。ばね定数の次元は $\left[\frac{\text{力}}{\text{長さ}} \right] =$

$$\frac{\text{MLT}^{-2}}{\text{L}} = \text{MT}^{-2}$$

$$T = M^x (\text{MT}^{-2})^y = M^{x+y} T^{-2y}$$

である。したがって、

$$x + y = 0, -2y = 1$$

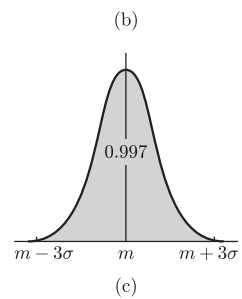
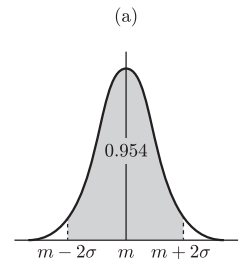
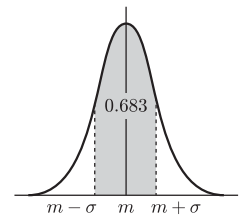
が得られる。解くと

$$y = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$$

となる。ゆえに、

$$T = \alpha \sqrt{\frac{m}{k}}$$

が得られる。

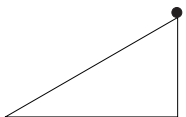


1.7 測定の不確かさ

高校では、測定値と真の値の差を誤差と定義したが、真の値は原理的にわからないので、誤差を求めることは不可能になってしまう。そこで測定可能な量のみから、測定の不確かさの目安を得る方法を考えよう。

ある物理量の測定を多数行った際、測定条件は同一なのに測定値がばらついてしまう。測定を多数繰り返すと、測定値は図 1.4 のように釣り鐘状の正規分布と呼ばれる分布を示すことが多い。以下では、測定値の分布は正規分布であることを仮定する。

図 1.4 測定値のばらつき。測定値が $\mu - \sigma$ と $\mu + \sigma$ の間になる確率は 68.3%、測定値が $\mu - 2\sigma$ と $\mu + 2\sigma$ の間になる確率は 95.4%、そして、測定値が $\mu - 3\sigma$ と $\mu + 3\sigma$ の間になる確率は 99.7% である。



注 28 n 回測定して、その i 番目の測定値を m_i とする。平均値は $m = \frac{1}{n} \sum_i m_i$ で、標準偏差 σ は $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_i (m_i - m)^2$ の平方根である。

注 29 正規分布で N が多数の場合、 N 回の平均値のバラツキは測定値のバラツキの $1/\sqrt{N}$ 倍になることが知られている。

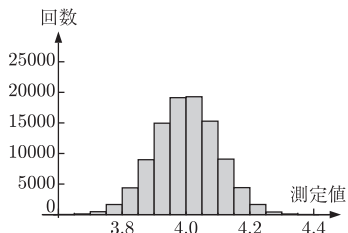


図 1.5 ある測定対象を小数点以下 2 桁まで 100000 回測定した場合の測定値のヒストグラム (ある測定値があらわれる回数を示す)。平均値は 4.00 で標準偏差は 0.10 であることを読み取ることができる。

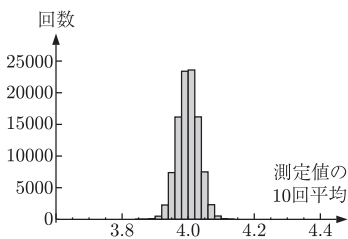


図 1.6 図 1.5 の測定値を、10 回平均した場合の平均値のヒストグラム。

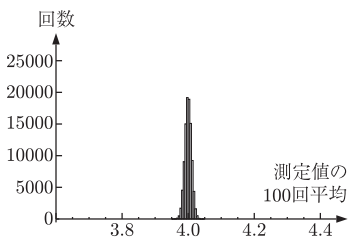


図 1.7 図 1.5 の測定値を、100 回平均した場合の平均値のヒストグラム。

多数の測定を繰り返すことによって、その平均値 m と標準偏差 σ を求めることができる注 28。統計学によれば、測定値が $m - \sigma$ と $m + \sigma$ の間になる確率は 68.3% になる。そこで、 $m \pm \sigma$ によって物理量の測定値を表すこととする。特に σ を標準不確かさといい、高校での誤差と同様に扱うことができる。物理量を測定する際、測定器具の最小目盛の $\frac{1}{10}$ まで測定した場合を考えよう。その場合、最小目盛までは確実に読みとることができるので、測定値の標準偏差は測定器具の最小目盛の $\frac{1}{10}$ と同程度だと考えることができる。先に挙げた板の長さを測定した図 1.1 の例ならば、 19.2 ± 0.1 mm と表記できることになる。したがって、1.2 節の測定値に対する計算方法は妥当である。

測定を繰り返してその平均値を計算しよう。図 1.5、1.6 そして 1.7 からわかるように、平均する測定値の数が多数であるほど、平均値のバラツキは小さくなる注 29。

例題 1.4 棒の長さを 10 回測定したところ、以下の測定値が得られた。有効桁を考慮して測定値 (棒の長さ) の平均値と標準偏差を求めよ。もしも 1 回測定した場合に、どのような測定値が得られると期待できるか？

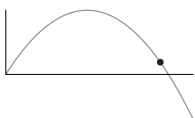
表 1.2 棒の長さの測定。

回数	1	2	3	4	5
棒の長さ [mm]	75.4	75.5	75.7	75.4	75.6
回数	6	7	8	9	10
棒の長さ [mm]	75.5	75.7	75.5	75.6	75.6

解 各測定値を x_i と書く。その平均 \bar{x} は、 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 75.55$ mm である。有効数字を考慮すると、この棒の長さの測定値の平均値は 75.6 mm である。

一方、標準偏差は、 $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}{10}} = 0.108$ mm である。有効桁を考慮すると 0.1 mm が標準偏差になる。

したがって、棒の長さの測定値は 75.6 ± 0.1 mm になる。



1.8 表記法

表記に関する注意をまとめた。

- 物理量を表す記号と単位

♡のついたセクションでは、最初に出てきた文字変数に対してのみ高校物理の教科書の記述と同様に x [m] のようにその単位を [] の中に入れて記述する。ただし、2度目以降は単位を記さない。本来、物理量を表す文字変数は数値とその単位が組み合わさったものであり、高校の表記法は「奇妙な」ものである^{注30}。しかしながら、本書の目的である「高校物理と大学物理の橋渡し」という観点から、できるだけ高校物理の教科書の表記法からスムーズに大学での表記法に移行できるように上のような対応を行う。♡のつかないセクションでは記号には単位が含まれているという立場から x のように記述する。

- SI (Système International d'Unités, 国際単位系) の使用

<https://www.nmij.jp/library/units/si/> を参照のこと。

- ベクトルの表現

ベクトルは『 \vec{F} 』のように上矢印で表す。ISO^{注31}では斜太字 \mathbf{F} ^{注32}を用いることになっているが、本書では学習者が慣れている高校数学の表記法に準拠する。ふたつのベクトルの間の演算である内積は『 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ 』、外積は『 $\vec{A} \times \vec{B}$ 』^{注33}のように、標準的な表記にしたがう。

- ベクトルの成分表示

ベクトル \vec{a} の成分を表示する場合は、 (a_x, a_y, a_z) のように記述する。多くの教科書で行われている、単位ベクトル $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ を用いた $a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ のような表記は行わない^{注34}。

- 微分記号

微分はライブニッツに従って『 $\frac{dx}{dt}$ 』のように表記する^{注35}。

- ギリシャ文字^{注36}

表 1.3 ギリシャ文字

A	α	alpha	B	β	beta	Γ	γ	gamma	Δ	δ	delta	E	ε	epsilon
Z	ζ	zeta	H	η	eta	Θ	θ	theta	I	ι	iota	K	κ	kappa
Λ	λ	lambda	M	μ	mu	N	ν	nu	Ξ	ξ	xi	O	\omicron	omicron
Π	π	pi	P	ρ	rho	Σ	σ	sigma	T	τ	tau	Y	υ	upsilon
Φ	φ	phi	X	χ	chi	Ψ	ψ	psi	Ω	ω	omega			

注30 x [m] は x が 5 m を表しているのならば、5 m [m] と記しているようなものである。

注31 International Organization for Standardization の略で、スイスのジュネーブに本部を置く非政府機関（国際標準化機構）の略称である。

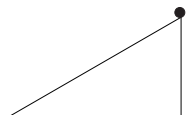
注32 高校の物理の教科書では、強調を表すために「ベクトルでないものに対して、太字を用いる」ことがあるので注意が必要である。

注33 多くの学生が「 \times 」をスカラー量の積の記号と混同する。そこで、以前の版では「 \wedge 」を用いていた。

注34 $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ である。

注35 微分記号は高校数学に準拠して斜体 d で示す。ISOでは立体 d である。また、簡略表示『 x' 』、ニュートン表示『 \dot{x} 』は使用しない。

注36 角度には θ 、角速度には ω など、特定の物理量に対応させる文字はおおよそ決まっている。本書で勉強すれば、自然と覚えることができるだろう。



 章末問題

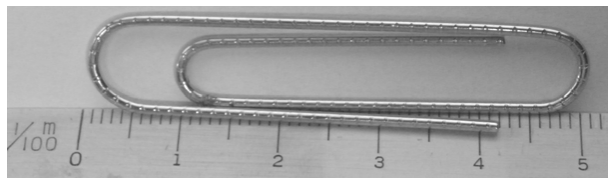
問題 1.1[♡] 力学に関連して固有の単位をもつ物理量（周波数，力，エネルギー（仕事），仕事率）の単位記号と国際単位系による単位を表にまとめよ。

表 1.4 力学に関連する固有の名称を持つ SI 組み立て単位.

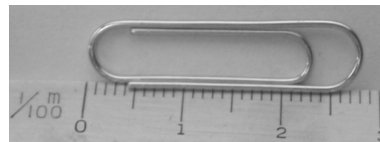
物理量	単位	単位記号	SI 基本単位による表現
周波数			
力			
エネルギー			
仕事率			

問題 1.2[♡] 以下のクリップの長さを測定せよ。

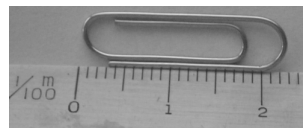
(1)



(2)

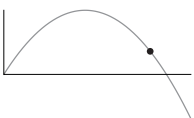


(3)



問題 1.3[♡] 有効数字を考慮して次の計算をせよ。

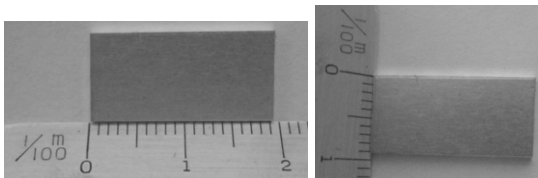
- (1) $2.11 + 1.11$
- (2) $1.0 + 1.11$
- (3) $2.11 - 1.11$
- (4) $2.0 - 1.00$
- (5) $(8.8 \times 10^{-1}) \times (8.8 \times 10^{-1})$
- (6) $(8.8 \times 10^{-1}) \times (8 \times 10^{-1})$



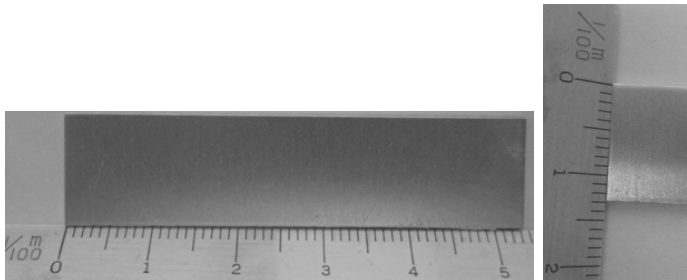
- (7) $1.2/3.0$
- (8) $1.2/3$
- (9) $1.0 + \pi$
- (10) $\pi - 2.00$
- (11) $\pi \times 2.00$
- (12) $\pi/3.0$

問題 1.4[♡] 次の 2 枚の板の縦と横の長さを測定して、面積を求めよ。

(1)



(2)

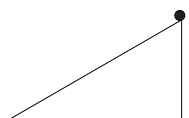


問題 1.5[♡] ばね定数が k 、おもりの質量が m のばね振り子がある。このばね振り子を鉛直につり下げて、振動させる。この周期 T の次元解析を行って、 T, k, m, g の間の関係を考察せよ。ただし、 g は重力加速度である。

問題 1.6 さいころのある 1 辺の長さを 10 回測定したところ、以下の測定値が得られた。有効桁を考慮して、その平均値と標準偏差を求めよ。もしも 1 回測定した場合に、どのような測定値が得られると期待できるか？

表 1.5 さいころの 1 辺の長さの測定。

回数	1	2	3	4	5
棒の長さ [mm]	10.5	10.5	10.6	10.4	10.6
回数	6	7	8	9	10
棒の長さ [mm]	10.6	10.7	10.5	10.6	10.5



◆————— 計算を行う際に注意すべきこと —————◆

物理学は実験科学であるので、モデルを立てそのモデルに従って結果を予想することができないといけない。そして、その予想を行う上で、数値計算を避けて通ることはできない。ここでは、数値計算を行う上で注意すべきことを重要な順に挙げよう。具体例としては、多数の鉛筆の長さを測定して、その平均値を計算する場合を考える。

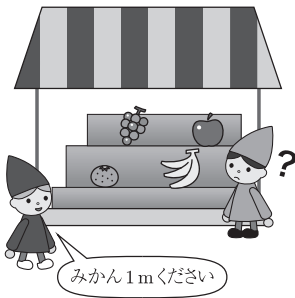


図 1.8 次元は正しい？

注 37 「オーダー (order)」ともいう。

注 38 冗談商品として、長さ 40 cm くらいの「鉛筆」はあるけれど。

- 次元 (鉛筆の質量の平均値を求めていないか？)

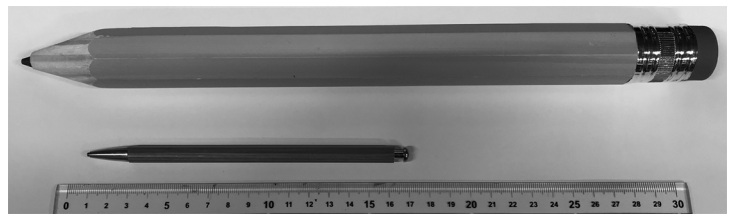
次元が合わなければ、どのような計算だろうと全く意味がないことは明らかである。また、次元があっているかどうかの判定は簡単にできる場合が多い。いわば、「『みかんを 1 m ください』と言っていないか」をチェックすべきだということである。

- 正負 (鉛筆の長さの平均値が負になっていないか？)

例えば、宇宙が膨張するのか？ 収縮するのか？ ということの問題にする必要があるということである。身近な例では、君たちの成績が良くなるか、悪くなるかという問題も同様なことがいえて、両者では全く異なった結果をもたらす。

- 程度^{注 37} (鉛筆の長さの平均値が 1 m になっていないか？^{注 38})

以前、小学校では、 π を 3 として計算するということが問題になったことがあった。これは、 π は誤差 5% 程度を許せば、3 に近似できるという意味であった。計算では、まず大まかな結果を知ることが重要である。そして、常識と一致するかを考える必要がある。ある人の身長を計算した結果、例えば 10 m になれば間違っていることは明らかである。



- ファクター (鉛筆の長さの平均値が 10 cm か 11 cm かのどちらかであるか？)

注 39 3.14 と 3.15 のどちらにすべきか？としても良い。

π の例を挙げると、3.1 と近似すべきか 3.2^{注 39} とすべきか？ ということである。このレベルまで達すると、常識的な判断というものとは通用せず、間違いなく計算する必要がある。しかしながら、「次元」、「正負」、そして「程度」のチェックをクリアしていれば、正しい計算を行っている可能性は非常に高い。

以上のことを考えると、計算に電卓を使うことは教育的ではないかもしれない。電卓を使うと多数の桁数の「結果」が出てきて、ファクターにばかり注意が集中して、それよりも大切な「次元」、「正負」、そして「程度」に対する考察が疎かになりがちである。

