# 2 直線上の物体の運動

第 1 章で，我々は 3 次元空間中の運動を考察すると述べたが，まず 1 次元空間（向きを定めた直線上）の物体の運動について詳細に検討する[注1]．

注 1　3 次元空間中の運動は，お互いに直交した 1 次元空間上の運動の組み合わせとして理解することができる．

## 2.1　1 次元運動における座標，速度，加速度♡

運動の様子を表す物理量として，まず向きを定めた直線上の物体の位置を表す $x$〔m〕を定義する．直線の向きは直線に矢印を描くことによって表すことにする[注2]．向きのある直線上にある点を定め，それを原点とする．向きのある直線上のある物体の位置 $x$ の大きさは原点からの距離とする．ただし，物体の位置が原点から直線の矢印の向きにある場合には正の値を，逆向きにある場合には負の値をとるものとする．物体の運動の様子は，この $x$ の時間変化として捉えることができる．

注 2　向きのある直線を考えることは，座標軸を定めることである．

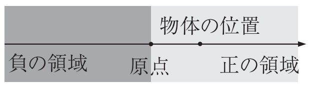



図 2.1　向きのある直線上の位置を表す変数．

1 次元的な運動を測定する方法として，図 2.2 のような記録タイマーと力学台車を使う場合を考えよう．力学台車の各瞬間の位置と記録テープのマークの位置を一対一に対応させることができる[注3]．いいかえると，記録テープに残されたマークの場所から，力学台車の位置を**測定**することができるのである．打刻は一定の時間間隔で行われる[注4]ので，何番目の打刻（マーク）かがわかれば時間がわかる．

注 3　記録テープに打刻するために必要な時間とマークの大きさが十分小さいという**近似**をしている．

注 4　離散時な時刻での測定となっている．

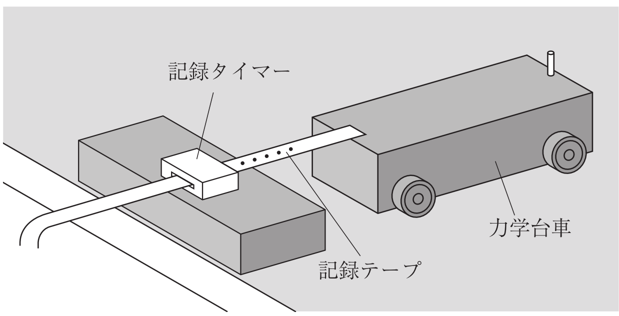



図 2.2　1 次元的な運動の測定．記録タイマーは一定の時間間隔で打刻を行い，その下に置かれた記録テープにマークをつけることができる．記録テープの端は力学台車に固定されており，力学台車の移動に伴い記録テープも動くので，記録テープのマークの場所から力学台車のある瞬間の位置を測定することができる．

では，表 2.1 のような測定結果が得られたとしよう．記録タイマーは 0.10 s 間隔で打刻を行うとする．記録テープを解析することによって，0.10 s 間隔で力学台車の位置を測定することができる．

**表 2.1**　記録テープのマークの位置とそれらから計算された平均の速度と加速度．打刻は 0.10 s 毎に行われる．平均の速度と加速度は，それらを求めるために用いた数値の間に記入することによって，平均していることが明確になるようにした．

| マーク | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$〔m〕 | 0.00 | | 0.20 | | 0.40 | | 0.60 | | 0.80 | | |
| $\bar{v}$〔m/s〕 | | 2.0 | | 2.0 | | 2.0 | | 2.0 | | 2.0 | |
| $\bar{a}$〔m/s$^2$〕 | | | 0.0 | | 0.0 | | 0.0 | | 0.0 | | |
| マーク | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 |
| $x$〔m〕 | 1.00 | | 1.20 | | 1.40 | | 1.60 | | 1.80 | | 2.00 |
| $\bar{v}$〔m/s〕 | | 2.0 | | 2.0 | | 2.0 | | 2.0 | | 2.0 | |
| $\bar{a}$〔m/s$^2$〕 | 0.0 | | 0.0 | | 0.0 | | 0.0 | | 0.0 | | |

物体の運動の様子を表す物理量として，速度を考えよう．$t_1$〔s〕から $t_2$〔s〕の間に物体が $x_1$〔m〕から $x_2$〔m〕まで動いた場合の**平均の速度** $\bar{v}$〔m/s〕を [注5]，

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{2.1}$$

と定義する．表 2.1 には，この平均の速度も示してある．速度は変化することも多いので，各瞬間の刻々と変化する速度（**瞬間の速度**）[注6] も重要な物理量である．この瞬間の速度は式 (2.1) で $t_1$ と $t_2$ の間の時間間隔をきわめて短くしたときの値である．測定例に対応させると，0.10 s だった打刻の時間間隔をきわめて短くすれば良い [注7]．ここで，定義した速度と日常生活で用いられる**速さ**という言葉の違いに注意する必要がある．速さに正負は存在せず，速さは速度の大きさである．

**注 5**　$\bar{v}$ のように『$^-$』（バー）をつけたのは，これが $t_1$ から $t_2$ という間の**平均の速度**を表すためである．

**注 6**　瞬間の速度には『$^-$』のない記号 $v$ を用いる．定義が明確でない点（**きわめて**という言葉）に注意．

**注 7**　表 2.1 は速度が一定で，平均の速度と瞬間の速度が同じ場合である．

次に，速度の変化の割合，すなわち加速度を考えよう．$t_1$ から $t_2$ の間に物体の瞬間速度が $v_1$〔m〕から $v_2$〔m〕まで変化した場合の**平均の加速度** $\bar{a}$〔m/s$^2$〕を [注8]，

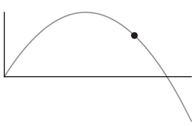
$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \tag{2.2}$$

と定義する．表 2.1 には，この平均の加速度も示してある [注9]．加速度は変化することも多いので，各瞬間の刻々と変化する加速度（**瞬間の加速度**）[注10] も重要な物理量である．この瞬間の加速度は式 (2.2) で $t_1$ と $t_2$ の間の時間

**注 8**　$\bar{a}$ のように『$^-$』（バー）をつけたのは，これが $t_1$ から $t_2$ という間の**平均の加速度**を表すためである．

**注 9**　表 2.1 は速度が一定で，したがって平均の加速度と瞬間の加速度がどちらも 0.0 m/s$^2$ の場合である．

**注 10**　瞬間の加速度には『$^-$』のない記号 $a$ を用いる．定義が明確でない点（**きわめて**という言葉）に注意．



間隔をきわめて短くしたときの値である．速度が正でも，その大きさが減少する場合の加速度は式 (2.2) からわかるように負になる[注11]．

注 11　加速度と速度の正負は必ずしも一致しない．

**例題 2.1**　以下の場合の平均の速度を求めよ．東向きを $x$ 軸の正の向きとする．

(1)　原点から東へ 3.6 km 離れた点 A に，$6.0 \times 10^1$ 分で行った．

(2)　原点から西へ 3.6 km 離れた点 B に，$6.0 \times 10^1$ 分で行った．

(3)　原点から点 A へ $6.0 \times 10^1$ 分で行き，そこから原点へ $6.0 \times 10^1$ 分で戻った．

**解** (1)　点 A の座標は $3.6 \times 10^3$ m，原点からそこまで 1 時間（$3.6 \times 10^3$ s）かけて動いたので，平均の速度は 1.0 m/s である．

(2)　点 B の座標は $-3.6 \times 10^3$ m である．同様に考えて，$-1.0$ m/s である．

(3)　出発点に戻ってきたので，全体としての移動距離は 0.0 m．したがって，平均の速度は 0.0 m/s である．

## 2.2　等速直線運動 ♡

動く歩道に乗った人の運動のような，一定の速さ $v_0$〔m/s〕で直線上を進む物体の運動（**等速直線運動**）を考えよう（図 2.3 参照）．時刻 $t = 0$ s における位置を $x_0$〔m〕とすると，ある時刻 $t$〔s〕における位置 $x$〔m〕は，式 (2.1) より[注12]

$$x - x_0 = v_0 t \tag{2.3}$$

となる．$x - x_0$ は時刻 $t = 0$ s から $t$ までの位置ベクトルの変化で**変位**という．時刻 $t = 0$ s から $t$ までの移動距離は速度を表す直線と $t$ 軸の間の面積だから，図 2.3 からも式 (2.3) がわかる．

表 2.1 は，このような等速直線運動の測定結果を表している．

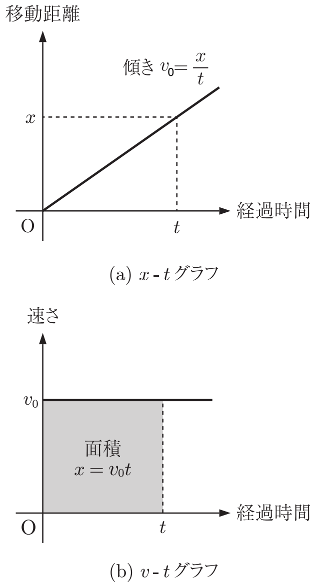



**図 2.3**　等速直線運動のグラフ．$x_0 = 0$ m の場合．

注 12　ここでは，瞬間の速度と平均の速度は同じである．

## 2.3　等加速度直線運動 ♡

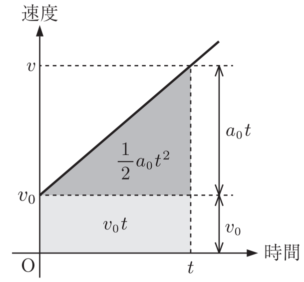



**図 2.4**　等加速度直線運動の $v$ - $t$ グラフ．$v_0 > 0$ かつ $a_0 > 0$ の場合．

**注 13**　図を描くために，$a > 0$ かつ $v_0 > 0$ の場合を考える．

重力のもとでの鉛直方向の運動のように，一定の加速度 $a_0$〔m/s$^2$〕で直線上を物体が運動する**等加速度直線運動**を考えよう．時刻 $t = 0$ s における速度（初期速度）を $v_0$〔m/s〕，位置（初期位置）を $x_0$〔m〕とする．式 (2.2) から，ある時刻 $t$〔s〕における速度 $v$〔m/s〕は，

$$v - v_0 = a_0t \tag{2.4}$$

となる．

この場合の $v$ - $t$ グラフは，図 2.4 のようになる[注 13]．時刻 $t = 0$ s から $t$ までの移動距離は速度を表す直線と $t$ 軸の間の面積だから，時刻 $t$ における $x$ 座標を $x$〔m〕として，図 2.4 から

$$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}a_0t^2 \tag{2.5}$$

となることがわかる．式 (2.4)，(2.5) から $t$ を消去すると，

$$v^2 - {v_0}^2 = 2a_0(x - x_0) \tag{2.6}$$

が得られる．

次に，$v_0 > 0$ かつ $a_0 < 0$ の場合の等加速度直線運動を考えよう．式 (2.4), (2.5), (2.6) は $a_0$ に負の値を代入すれば，そのまま成り立つ．$v$ - $t$ グラフと $x$ - $t$ グラフは図 2.5 のようになる．グラフからわかるように，$x$ の最大値は，$v = 0$ m/s となる時刻 $t_{\max} = -\dfrac{v_0}{a_0}$ に，$x_{\max} = -\dfrac{{v_0}^2}{2a_0}$ となる．ここで，$a_0 < 0$ であるので，$t_{\max} > 0$ かつ $x_{\max} > 0$ であることに注意．

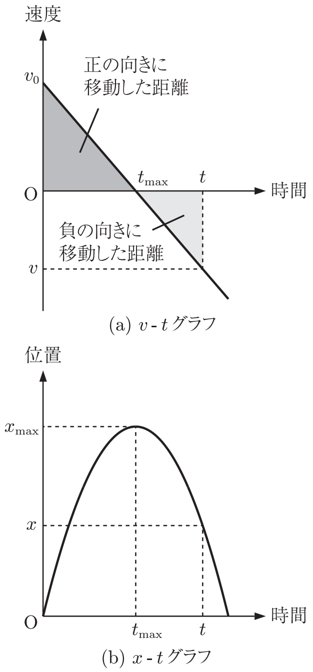



**図 2.5**　$v_0 > 0$ かつ $a < 0$ の場合の等加速度直線運動の $v$ - $t$ および $x$ - $t$ グラフ．

高校物理では，鉛直方向の運動として自由落下，鉛直投げ下ろし，そして鉛直投げ上げの 3 種類の運動を勉強した．これらの運動は，加速度が重力加速度 $g$〔m/s$^2$〕の等加速度直線運動として理解される．重力加速度の正負は，鉛直下向きあるいは鉛直上向きのどちらを基準にとるかによって決まる．

- 自由落下：$v_0 = 0$.
- 鉛直投げ下ろし：$v_0$ と $g$ が同符号.
- 鉛直投げ上げ：$v_0$ と $g$ が異符号.

**例題 2.2**　高さ $h$〔m〕のビルの屋上からボールを自由落下させた．

(1)　ボールが地面に落ちるまでに必要な時間はいくらか？

(2)　そのときのボールの速度を求めよ．

ただし，重力加速度の大きさを $g$〔m/s$^2$〕とする．

**解**　ビルの屋上を座標の原点として鉛直下向きに座標軸 $x$ をとる（座標軸を明確にすることが大切である）．この座標軸で重力加速度は正の値をとる．

(1)　ボールが地面に落ちるまでの時間を $t$ とすると，その間にビルの高さだけ動く（変位する）ので，式 (2.5) より

$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

となる．したがって，地面に落ちるまでの時間は

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

となる．

(2)　そのときのボールの速さを $v$ とすると，式 (2.4) と上で求めた $t$ より

$$v=gt=\sqrt{2gh}$$

となる．ここで，向きも考慮すると，地面に落ちるときの速度は鉛直下向きに大きさ $v=gt=\sqrt{2gh}$ である．

**例題 2.3**　高さ $h$〔m〕のビルの屋上から，ボールを時刻 $t=0\,\mathrm{s}$ に自由落下させた．同時に地上から初速度の大きさ $v_0$〔m/s$^2$〕で，別のボールを鉛直上向きに投げ上げた．

(1)　ボールが衝突する時刻を求めよ．

(2)　衝突する高さを求めよ．

ただし，重力加速度の大きさを $g$〔m/s$^2$〕とする．また，衝突は地面より上で起こったものとする．

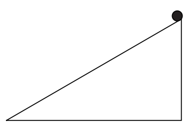
**解**　地上を座標の原点として鉛直上向きに座標軸 $x$ をとる（座標軸を明確にすることが大切である）．この座標軸で重力加速度は負の値をとる．また，投げ上げるボールの初速度は正である．自由落下させるボールを A とする．時刻 $t$ の A の位置 $x_{\mathrm{A}}$ は

$$x_{\mathrm{A}}=h+\frac{1}{2}(-g)t^2$$

となる．投げ上げるボールを B とする．時刻 $t$ での B の位置 $x_{\mathrm{B}}$ は

$$x_{\mathrm{B}}=v_0t+\frac{1}{2}(-g)t^2$$

となる．



(1)　ボールが衝突するとは，ある時刻 $t$ で

$$x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}}$$

となることである．すなわち，

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

である．この式から，

$$t = \frac{h}{v_0}$$

と衝突する時刻が得られる．

(2)　上で得られた $t$ を $x_{\mathrm{B}}$ の式（$x_{\mathrm{A}}$ の式でも OK）に代入すると，衝突する高さ

$$v_0 \frac{h}{v_0} - \frac{1}{2}g\left(\frac{h}{v_0}\right)^2 = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{h}{v_0}\right)^2 = h\left(1 - \frac{gh}{2{v_0}^2}\right)$$

が得られる．

## 2.4　物理と微積分

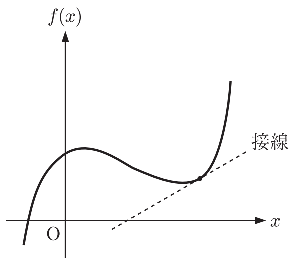



**図 2.6**　関数 $y = f(x)$ における接線の傾きを求める（微分する）．

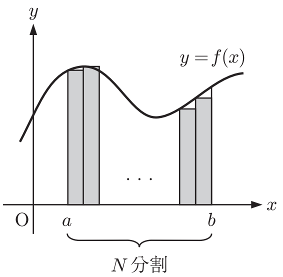



**図 2.7**　関数 $y = f(x)$ を $x = a$ から $x = b$ まで $N$ 個の区間に分割する．

高校では数学で微積分の勉強を行っているにもかかわらず，物理学の勉強に応用することは避けられている．ニュートンは力学への応用を考えて微積分学を発明したのだから，高校でも力学の勉強に微積分学を応用すべきではないだろうか？　実際，力学を理解するためには微積分の考えが必要で，高校物理の中で微積分という言葉をあらわにせずに微積分を用いている．

微分はある関数 $f(x)$ の接線の傾き，あるいはその関数の「平均の変化率の極限」であり，

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2.7}$$

によって表される．

一方，ある関数 $f(x)$ の範囲 $a$ から $b$ の定積分を求めるという操作は，その関数 $f(x)$ と $x$ 軸，および $x = a$ と $x = b$ で囲まれる図形の面積を求めることであり，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + \frac{b-a}{N}i\right)\frac{b-a}{N} \tag{2.8}$$

で求めることができる．

高校物理では，$v$-$t$ グラフの接線の傾きを求める（＝微分を行う）[注 14] ことにより加速度を求め，$v$-$t$ グラフの面積を求める（＝積分を行う）ことに

**注 14**　物理では，独立変数として時間 $t$ をとることが多く，$t$ で微積分することが多い．

より変位を求めている．すなわち，微積分という言葉を使わずに，その概念を用いていたのである．

**例題 2.4**　$y=x$ のグラフの $x=0$ から $x=1$ までの積分を，$N$ 個の長方形に分割してその面積の和を求めることによって行え．

**解**　この区間を $N$ 個に分割すると，

$$S_{\blacksquare} = \sum_{0\le i\le N-1}\left(\frac{i}{N}\right)\frac{1-0}{N} = \frac{N-1}{2N} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}$$

$$S_{\square} = \sum_{0\le i\le N-1}\left(\frac{i+1}{N}\right)\frac{1-0}{N} = \frac{N+1}{2N} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}$$

$S_{\blacksquare} < S < S_{\square}$ なので，$N\to\infty$ とすることによって，$S$ は $\dfrac{1}{2}$ となることがわかる．

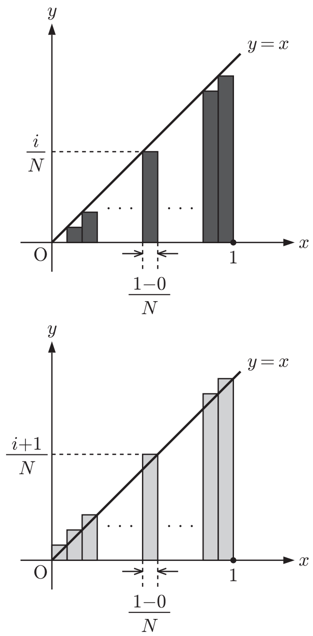


**図 2.8**　例題 2.4 の $S_{\blacksquare}$（上）と $S_{\square}$（下）

## 2.5　微分と積分の関係

不定積分は

$$F_a(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

と定義される．$\xi$ が独立変数である．図 2.9 を参照して，

$$F_a(\xi+\Delta\xi) = F_a(\xi) + f(\xi)\Delta\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{F_a(\xi+\Delta\xi)-F_a(\xi)}{\Delta\xi} = f(\xi)$$

$$\Downarrow \quad \Delta\xi\to 0$$

$$\frac{d}{d\xi}F_a(\xi) = f(\xi)$$

すなわち，$\dfrac{d}{dx}F_a(x) = f(x)$ であり，積分が微分の逆演算であることがわかる [注 15]．

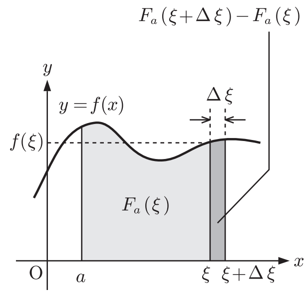


**図 2.9**

**注 15**　$\dfrac{d}{dx}(F_a(x)+c) = f(x)$，ただし $c$ は任意定数．

## 2.6　直線上の等速度運動と等加速度運動

直線上の物体の等速度運動と等加速度運動を微積分を用いて，統一的に理解しよう．ただし，位置の測定の曖昧さをなくすために [注 16]，大きさをもたない**質点**を考える．加速度が時間的に変化しない（定数の）場合を考え，そ

**注 16**　大きさがある物体では，どの部分の位置を測定するかによって測定結果が異なり，位置測定が曖昧になる．

の値を $a_0$ とする[注 17].

速度 $v$ を微分[注 18]することによって，加速度 $a_0$ を得ることができるので，逆に $a_0$ を積分[注 18]することによって，$t$ における $v$ を求めることができ[注 19]，

$$v - v_0 = \int_0^t a_0 \, dt' = a_0 t \tag{2.9}$$

となる[注 20]．ここで，$v_0$ は時刻 $t = 0\,\mathrm{s}$ における速度であり，積分を行う際に現れる積分定数に対応する．数学では，積分定数としては記号 $c$ を使うことが多いが，物理学ではその意味を考慮して，$c$ 以外の物理変数を表す文字を[注 21]使うことがある．

速度を積分することによって，$t$ における位置 $x$ を求めることができ，

$$x - x_0 = \int_0^t (a_0 t' + v_0) \, dt' = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t \tag{2.10}$$

となる[注 22]．ここで，$x_0$ は時刻 $t = 0\,\mathrm{s}$ における位置であり，積分を行う際に現れる積分定数に対応する．$v$ や $x$ が時間 $t$ の関数であることを明確にするために，$v(t)$ や $x(t)$ と書くことがある．

$a_0 = 0\,\mathrm{m/s^2}$ の場合，等速度運動になることは明らかであろう．すなわち，等速度運動は等加速度運動の特殊な場合（加速度がゼロ）と考えることができる．また，加速度が一定でない場合は[注 23]，

$$v(t) - v_0 = \int_0^t a(t') \, dt', \qquad x(t) - x_0 = \int_0^t v(t') \, dt'$$

を計算すれば，速度と位置を時間の関数として求めることができる[注 24]．積分定数は初期条件を満たすように決める．ひとたび $a(t)$ が与えられたならば[注 25]，$v(t)$ と $x(t)$ を求めることは単なる数学の問題となる．

**注 17** 国際単位系では，$a_0$ の単位は $\mathrm{m/s^2}$ である．

**注 18** 時間 $t$ についての微分と積分である．

**注 19** 微分と積分は逆演算である．

**注 20** 式 (2.9) の右辺は，加速度を積分することによって求めた時刻 $0\,\mathrm{s}$ から $t$ までの速度の変化である．

**注 21** ここでは，定数であることを表すために下付添え字の 0 を用いている．

**注 22** 式 (2.10) の右辺は，速度を積分することによって求めた時刻 $0\,\mathrm{s}$ から $t$ までの変位である．

**注 23** 時間の関数であることを強調するために，引数 $t$ を用いて，$a(t), v(t), x(t)$ のようにと表した．

**注 24** 慣性航法装置の原理である．

**注 25** 加速度を与える法則をニュートンが発見した．

---

**例題 2.5** エレベータの運動を考える．

(1) 地上で静止した状態から $1.0 \times 10\,\mathrm{s}$ 後に上向きの速度が $1.0 \times 10\,\mathrm{m/s}$ になった．一定の加速度であったと仮定して加速度を求めよ．

(2) その後，$1.0 \times 10\,\mathrm{s}$ は一定の速度で上昇を続けた．このときの加速度を求めよ．

(3) 最上階で止まる時は，やはり $1.0 \times 10\,\mathrm{s}$ かけて静止した．このときの加速度を求めよ．

(4) このエレベータが止まった階は地上からどれくらいの高さか？

**解** (1) 速度の変化率を求めればよいので，鉛直上向きに

$\dfrac{\text{速度変化}}{\text{時間}} = (1.0\times 10\,\mathrm{m/s})/(1.0\times 10\,\mathrm{s}) = 1.0\,\mathrm{m/s^2}$ である.

(2) 速度の変化はないので，$0.0\,\mathrm{m/s^2}$.

(3) 速度の変化率を求めればよいので，鉛直上向きに $\dfrac{\text{速度変化}}{\text{時間}} = (-1.0\times 10\,\mathrm{m/s})/(1.0\times 10\,\mathrm{s}) = -1.0\,\mathrm{m/s^2}$ あるいは，鉛直下向きに $1.0\,\mathrm{m/s^2}$.

(4) 図 2.10 において，速度の時間変化を表すグラフと $t$ 軸の間の面積を求めれば良い.

$$\frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{m/s^2})(1.0\times 10\,\mathrm{s})^2 + (1.0\times 10\,\mathrm{m/s})(1.0\times 10\,\mathrm{s})$$
$$+(1.0\times 10\,\mathrm{m/s})(1.0\times 10\,\mathrm{s}) + \frac{1}{2}(-1.0\,\mathrm{m/s^2})(1.0\times 10\,\mathrm{s})^2$$
$$= 200\,\mathrm{m} = 2.0\times 10^2\,\mathrm{m}$$

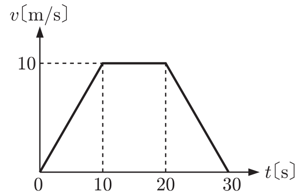



**図 2.10** エレベーターの速度（ベクトル）の時間変化.

## 2.7 微分の公式♠ [注 26]

以下の微分の公式を理解しておくことが必要である [注 27].

- $\dfrac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \left(\dfrac{d}{dx}f(x)\right)g(x) + f(x)\left(\dfrac{d}{dx}g(x)\right)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x}\\ &\quad+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\cdot(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x}\\ &= \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) + f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)\end{aligned}$$

- $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{g(x)} = -\dfrac{1}{(g(x))^2}\dfrac{d}{dx}g(x)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \frac{1}{g(x)^2}\lim_{\Delta x\to 0} -\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\ &= -\frac{1}{(g(x))^2}\frac{d}{dx}g(x)\end{aligned}$$

注 26 本書では，進んだ内容を扱っているセクションのタイトルに♠をつけて，読者の注意を引くようにした.

注 27 一度は自らの手で証明しておくこと．その後は公式として使ってもよい.

- $y = f(x),\ x = g(t) \Rightarrow y = f(g(t))$ であるとき，$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\left(g(t+\Delta t)\right) - f\left(g(t)\right)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\left(g(t+\Delta t)\right) - f\left(g(t)\right)}{g(t+\Delta t) - g(t)} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}
\end{aligned}
$$

その他の微積分に関する知識（例えば，多変数関数の微分の応用である偏微分や多重積分）は，使用する際に触れる．

## 2.8　積分の概念♠

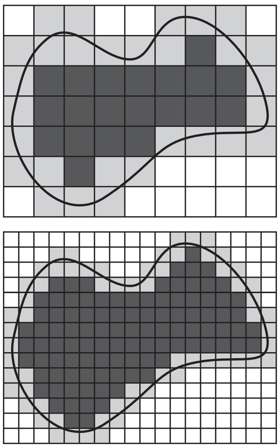


**図 2.11**　積分の概念．不規則な図形の面積の求め方．

積分の考え方を理解するために，不規則な図形の面積を求める場合を考えよう．図 2.11 のように不規則な図形の上に方眼紙を重ねて，図形の中に完全に入っている正方形（黒正方形）とわずかでも良いから図形に重なっている部分がある正方形（灰色正方形）を考えよう．この不規則な図形の面積 $S$ は，明らかに黒正方形の面積の和と黒と灰色の正方形の面積の和の間にある．ここで，マス目の大きさがより小さい方眼紙を用いて行うと，不規則な図形の面積をより正確に求めることができる．

方眼紙のマス目の大きさをどんどん小さくして正方形の数を数えることを行えば，不規則な図形の面積 $S$ をいくらでも正確に求めることができる．

**例題 2.6**　図 2.11 の図で，面積 $S$ のとりうる範囲を求めよ．上の図の正方形の 1 辺の長さは 1 m で，下の図の 1 辺の長さは 0.5 m である．

解
- 図 2.11 の上図で灰色と黒の正方形の数の和は 49 個，黒の正方形の数は 20 個である．したがって，$20 < S < 49\ \mathrm{m}^2$ である．
- 図 2.11 の下図で灰色と黒の正方形の数の和は 166 個，黒の正方形の数は 102 個である．したがって，$25.5 < S < 41.5\ \mathrm{m}^2$ である．

## 2.9　具体的な関数の微分♠

具体的にいくつかの関数の微分を，式 (2.7) に従って考えてみよう[注 28].

注 **28**　関数の微分の結果を単に暗記するのではなく，図を用いて理解することが大切である．

- $f(x) = 1$

  $f(x)$ のグラフより，その傾きは 0 であることは明らかである．したがって $\dfrac{df(x)}{dx} = 0$ である．また，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1)-(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

- $f(x) = x$

  $f(x)$ のグラフより，その傾きは 1 であることは明らかである．したがって $\dfrac{df(x)}{dx} = 1$ である．また，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

- $f(x) = x^2$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x.$$

- $f(x) = \sin x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} \cos(x + \Delta x/2)$$
$$= \cos x.$$ [注 29]

  また，

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1,\ \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$$

  となることは，図 2.12 より明らかである．

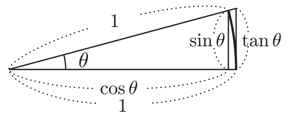



図 **2.12**　$\theta$ が微小な場合は，$\sin\theta \sim \theta \sim \tan\theta$，$\cos\theta \sim 1$ である．

注 **29**　三角関数の公式 $\sin\theta_1 - \sin\theta_2 = 2\sin\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$ を用いた．

- $f(x) = e^x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$
$$= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$ [注 30].

注 **30**　$e$ の定義

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 1$$

を用いた．ここで，$\varepsilon$ は微小な数を表す際によく使われる文字である．

- $f(x) = \log_e x$

  $y = \log_e x$ は $x = e^y$ と書き直すことができる．

  これを，$x$ で微分すると，$1 = \dfrac{de^y}{dx} = e^y \dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dy}{dx}$，したがって

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

## 章末問題

**問題 2.1**$^{\heartsuit}$　以下の単位換算を行え．

(1)　$9.0 \times 10^1$ km/h は何 m/s か[注 31]．

(2)　1.0 m/s は何 km/h か．

**注 31**　h は hour の略である．

**問題 2.2**$^{\heartsuit}$　以下の場合の平均の速度を求めよ．北向きを $y$ 軸の正の向きとする．

(1)　原点から北へ $7.2 \times 10^1$ km 離れた点 A に，$6.0 \times 10^1$ 分で行った．

(2)　原点から南へ $3.6 \times 10^1$ km 離れた点 B に，$6.0 \times 10^1$ 分で行った．

(3)　原点から点 A へ $6.0 \times 10^1$ 分で行き，そこから原点へ $9.0 \times 10^1$ 分かけて戻った．

**問題 2.3**$^{\heartsuit}$　地上に静止していたエレベータが一定の加速度で上昇して，10 s 後には速度 12 m/s に達した．すぐに一定の加速度で減速を開始して，5 s で速度がゼロになった．速度がゼロになったときに最上階に達した．鉛直上向きを正の向きとする．

(1)　加速時の加速度を求めよ．

(2)　減速時の加速度を求めよ．

(3)　最上階は地上何 m か？

**問題 2.4**$^{\heartsuit}$　列車が一定の加速度 $a$ で駅を出発した．列車の先端が停止していた地点（点 A とする）を列車の後端が通過するとき，その速度は $v$ であった．列車の進行方向を正の向きとする．

(1)　列車の後端が点 A に達するまでの時間 $t_0$ を求めよ．

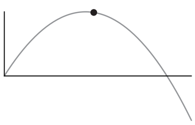
(2)　この列車の長さ $L$ を求めよ．

(3)　この列車の真ん中が点 A を通過したときの列車の速度 $v_{\mathrm{m}}$ を求めよ．

**問題 2.5**$^{\heartsuit}$　静止していた自動車 A が時刻 $t = 0$ s に一定の加速度で加速を始めた．また，$t = 0$ s に一定の速度 10 m/s の自動車 B が，自動車 A を追い越していった．A は出発して 100 m 進んだところで，B と同じ速度になった．

(1)　A の加速度の大きさを求めよ．

(2)　A が B に追いつくまでの走行距離を求めよ．



**問題 2.6**$^{\heartsuit}$　図 2.13 は $t = 0.0\,\mathrm{s}$ に原点にいた 1 次元運動を行う質点の速度 $v$ と時刻 $t$ の間の関係を示したものである．

(1)　$0.0\,\mathrm{s} \leq t \leq 18.0\,\mathrm{s}$ における加速度を表すグラフを描け．

(2)　$t = 0.0\,\mathrm{s}$ から $t = 18.0\,\mathrm{s}$ の間の移動距離を求めよ．

(3)　$t = 0.0\,\mathrm{s}$ から $t = 18.0\,\mathrm{s}$ の間の変位を求めよ．

(4)　質点の位置 $x$ を時刻 $t$ の関数として表せ．ただし，$0.0\,\mathrm{s} \leq t \leq 6.0\,\mathrm{s}$ の場合と $6.0\,\mathrm{s} \leq t \leq 18.0\,\mathrm{s}$ の場合に分けて考えること．

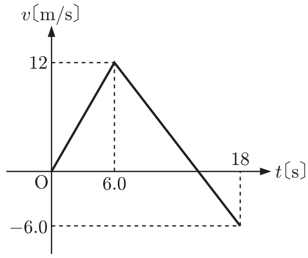



**図 2.13**　1 次元運動を行う質点の速度の時間変化．

**問題 2.7**$^{\heartsuit}$　重力加速度 $g$ のもとでの運動を考える．

(1)　質点 A を高さ $h_0$[注 32] から初速度 $0\,\mathrm{m/s}$ で落とした．時刻 $t$ での高さ $h_{\mathrm{A}}(t)$ を求めよ．また，その質点の速度と加速度を求めよ．

(2)　質点 A の真下で高さ $0\,\mathrm{m}$ から初速度 $v_0$ で質点 B を真上に投げ上げた．時刻 $t$ での高さ $h_{\mathrm{B}}(t)$ を求めよ．また，その質点の速度と加速度を求めよ．

(3)　質点 A と B が衝突する時刻はいつか？　$h_{\mathrm{A}}(t) = h_{\mathrm{B}}(t)$ から求めよ．

(4)　衝突する時刻を，相対速度と最初の高さの差 $h_0$ から考察せよ．

**注 32**　$h_0 > 0$ とする．

**問題 2.8**　以下の関数の区間 [1,2] の定積分を，「区間 [1,2] を $N$ 個に分割してその面積を足し合わせてから，$N \to \infty$ の極限をとる」ことによって，求めよ．

(1)　$f(x) = 1$

(2)　$f(x) = x^2$

**問題 2.9**　$x$ 軸上を質点が動いている．質点の位置が以下のように表されているときの速度，加速度を求めよ[注 33]．

(1)　$x(t) = \dfrac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$

(2)　$x(t) = r_0 \sin \omega t$

(3)　$x(t) = r_0 e^{-\gamma_0 t}$

**注 33**　0 の下付き添え字がついている文字（$a_0, v_0, x_0$ など）は定数を表すものとする．

**問題 2.10**　以下の関数の微分を，微分の定義に従って計算せよ．

(1)　$f(x) = \sqrt{x}$

(2)　$f(x) = \dfrac{1}{x}$

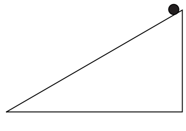
**問題 2.11**　以下の関数の微分を行え．

(1)　$f(x) = \pi x^2$

(2)　$f(x) = \dfrac{4\pi}{3}x^3$

(3)　$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(4)　$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$



(5)　$f(x) = e^{1+x}$

(6)　$f(x) = e^{x^2}$

(7)　$f(x) = \sin x\ e^x$

(8)　$f(x) = \tan x$　ただし，$-\pi/2 < x < \pi/2$

(9)　$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$　ただし，$x \neq 0$

**問題 2.12**　以下の関数の微分を [ ] 内の変数で行え.

(1)　$h(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t$　$[t]$

(2)　$y(t) = r_0 \sin \omega t$　$[t]$

(3)　$x(t) = r_0 \cos \omega t$　$[t]$

(4)　$\phi(r) = \dfrac{GMm}{r^2}$　$[t]$

(5)　$f(x,t) = A \sin 2\pi \left( \dfrac{x}{\lambda} - \dfrac{t}{T} \right)$　$[x]$

(6)　$f(x,t) = A \sin 2\pi \left( \dfrac{x}{\lambda} - \dfrac{t}{T} \right)$　$[t]$

**問題 2.13**　以下の関数の不定積分を行え.

(1)　$f(x) = \sin^2 x$

(2)　$f(x) = \cos^2 x$

(3)　$f(x) = \sin^3 x$

(4)　$f(x) = \cos^3 x$

(5)　$f(x) = xe^{-x^2}$

(6)　$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

(7)　$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

(8)♠　$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + A}}$

**問題 2.14**　以下の定積分を行え.

(1)　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$

(2)　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx$

(3)　$\displaystyle\int_0^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$，ただし $a > 0$

(4)　$\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1 + x^2} dx$

**問題 2.15**♠　以下の定積分を行え.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$$

## 科学者も人の子

物理学が実験科学である以上，万有引力定数など基礎物理定数の測定は非常に重要である．しかしながら，基礎物理定数の測定に関して Intellectual phase-locking[注 34] と名づけられた興味深い傾向が知られている．それは，

同一時期に測定された基礎物理定数は一致する

という傾向である．この傾向だけならば，測定を行った物理学者の努力を賞賛すればよい．なぜなら，基礎物理定数の測定で要求される非常に高い相対的な精度（$10^{-9}$ など，あるいはもっと[注 35]）を達成するには，大変な努力が必要だからである．ところが，賞賛ばかりできないことは以下の事実から明らかである．別の測定手法（おそらくはより精度の高い結果が期待される）が開発されて測定されると，以前の結果と新しい結果は誤差範囲を超えて一致しないことがある．そして，「以後しばらく測定される基礎物理定数は新しい値に一致する傾向がある」のである[1,2]．

このIntellectual phase-locking は，残念ながら慎重に実験を行っている研究者が，いわゆる「権威ある」データに囚われていることを意味しているのだろう．科学者は，科学者[注 36] である以上「意図的にデータを粉飾する」ことはないはずである．では，なぜ無意識にしろ，自然をありのままに見つめることに失敗するのだろうか？おそらく，

実験における誤差の原因の追求をいつやめるか？

という判断の問題である．精密な実験を行うということは，実験誤差の原因をとり除き続けるということである．科学者といえども人の子であり，「権威あるデータ」と結果が一致したときに，誤差の原因がなくなったと判断してしまい，他の誤差の原因を見落としてしまうのだろう．

科学は人間の営みである以上，「このような間違いをなくす」ことは難しい．それでも，科学者は最大限の努力を払って，このような間違いを減らす必要がある．さもなければ，科学の停滞を招いてしまうだろう[注 37]．ここでは，基礎物理定数の測定を例に挙げたが，どのような研究でも起こりうることであり，注意しなければならない．

また，間違いを犯してしまったときには，できるだけ早く訂正を行う必要がある．間違いを犯すのは，科学者としての能力が十分ではないということになるかもしれない．しかしながら，間違いを訂正すれば科学者であり続けることはできる．

**注 34**　「知的な位相同期」とでも訳すのだろうか？

**注 35**　光格子時計では $1 \times 10^{-18}$ の精度が期待できる．

**注 36**　自然をありのままに見つめ，「データの粉飾などを行わない」人でなければ，科学者ではない．科学者の定義である．

**注 37**　このIntellectual phase-locking は，2016 年以降にときどき新聞を賑わしてる「データの捏造」とは別「次元」の問題である．

### 参考文献

[1] 兵藤申一，『物理実験者のための 13 章』（東京大学出版会，1976）．

[2] B. N. Taylor, D. N. Langenberg, and W. H. Parker, “The Fundamental Physical Constants”, *Scientific American* **223** (1970) 62.