3

3次元空間中の物体の運動

物体の運動は，必ずしも直線上だけに限られるものではない．そこで，本章では3次元空間中の物体の運動を考察しよう[注1]．高校物理ではあまり触れられなかったベクトルの概念を導入すれば，3次元空間中の物体の運動を記述することが容易になる．

注1　高校物理では空間中の運動はあまり扱わず，平面上（2次元空間）の運動を考察する場合がほとんどである．

3.1　速度の合成と分解♡

まず，直線上の運動に関して，相対速度や速度の合成を考える．例えば，動く歩道上を歩く小人を考える．歩道の進む速度を v_1〔m/s〕，歩道上を歩く小人の速度を v_2〔m/s〕とする．動く歩道に乗っていない小人にとって，動く歩道上を歩く小人の速度は

$$v = v_1 + v_2$$

で表すことができる．v〔m/s〕のことを v_1 と v_2 の**合成速度**といい，合成速度を求めることを**速度の合成**という．v_1 と v_2 の符号が異なっている[注2]場合も成り立つことに注意すること．

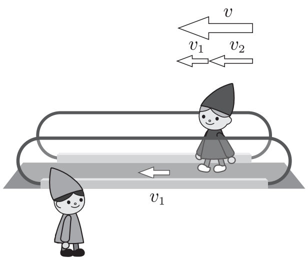


図3.1　動く歩道上を歩いている小人を動く歩道に乗っていない小人が見る．

注2　動く歩道の場合は，逆行することに対応する．ただし，危ないからしてはいけない．

次に，速度 v_{A}〔m/s〕で動く歩道上に乗っている小人Aが速度 v_{B}〔m/s〕で歩道に沿って歩いている小人Bを見た場合には，BはAから見て，速度

$$v_{\mathrm{AB}} = v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}}$$

で動いているように見える．Aから見たBの速度のことを**Aに対するBの相対速度**という．

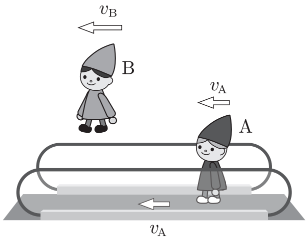


図3.2　動く歩道上に止まっている小人が歩道に沿って歩いている小人を見る．

例題3.1　平行に走っている線路を2台の列車が走っている．

(1)　速度の大きさが 100.0 ± 0.1 km/h の列車Aと 50.0 ± 0.1 km/h の列車Bがすれ違った．列車Aから見た列車Bの速度の大きさを求めよ．ただし，単位は m/s にすること．

(2)　列車Aが列車Bを追い越した．列車Bから見た列車Aの速度の大きさを求めよ．ただし，単位は m/s にすること．

解　(1)　相対速度は

$$100.0 \pm 0.1\ \mathrm{km/h} + 50.0 \pm 0.1\ \mathrm{km/h} = 150.0 \pm 0.2\ \mathrm{km/h}$$

である[注3]．$150.0 \pm 0.2 = 150.2$，149.8 および $150.0\ \mathrm{km/h}$ に $\dfrac{1000\ \mathrm{m/km}}{3600\ \mathrm{s/h}}$ を掛けて m/s に換算すると，41.72，41.61 および 41.66 m/s になる．したがって，解としては誤差を大きくとって $41.7 \pm 0.1\ \mathrm{m/s}$ とする．ただし，$41.6 \pm 0.1\ \mathrm{m/s}$ も可とする．

(2)　同様に，相対速度は

$$100.0 \pm 0.1\ \mathrm{km/h} - 50.0 \pm 0.1\ \mathrm{km/h} = 50.0 \pm 0.2\ \mathrm{km/h}$$

である．50.0 km/h に $\dfrac{1000\ \mathrm{m/km}}{3600\ \mathrm{s/h}}$ を掛けて m/s に換算すると，13.88 m/s になる．すれ違う場合と同様に，解としては誤差を大きくとって $13.9 \pm 0.1\ \mathrm{m/s}$ とする．

注3　誤差は最悪の場合を考えて加算する．

例題 3.2　静水の場合に速さ 3.5 m/s で進む船が，距離 1.0×10^2 m だけ離れた地点 A（川上）B（川下）を往復する．川の流れは 3.0 m/s である．また，岸を散歩する人がいて，川上に向かって速さ 1.0 m/s で歩いている．以下の問に答えよ．川を下る向きを速度ベクトルの正の向きとする．

(1)　地点 A から地点 B まで進むとき，岸から見た船の速度を求めよ．

(2)　地点 A から地点 B まで進むのに要する時間を求めよ．

(3)　船が地点 A から地点 B まで進んでいるときに，散歩している人が船を見ると，船はどれぐらいの速度で動いているように見えるか？

(4)　地点 B から地点 A まで進むとき，岸から見た船の速度を求めよ．

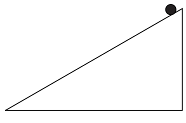
(5)　地点 B から地点 A まで進むのに要する時間を求めよ．

(6)　船が地点 B から地点 A まで進んでいるときに，散歩している人が船を見ると，船はどれぐらいの速度で動いているように見えるか？

解　(1)　$3.5\ \mathrm{m/s} + 3.0\ \mathrm{m/s} = 6.5\ \mathrm{m/s}$

(2)　$1.0 \times 10^2\ \mathrm{m}/(6.5\ \mathrm{m/s}) = 1.5 \times 10^1\ \mathrm{s}$

(3)　$6.5\ \mathrm{m/s} - (-1.0\ \mathrm{m/s}) = 7.5\ \mathrm{m/s}$



(4)　$-3.5\ \mathrm{m/s} + 3.0\ \mathrm{m/s} = -0.5\ \mathrm{m/s}$

(5)　$-1.0 \times 10^2\ \mathrm{m}/(-0.5\ \mathrm{m/s}) = 2 \times 10^2\ \mathrm{s}$

(6)　$-0.5\ \mathrm{m/s} - (-1.0)\ \mathrm{m/s} = 0.5\ \mathrm{m/s}$

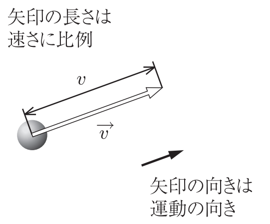


図 3.3　速度．

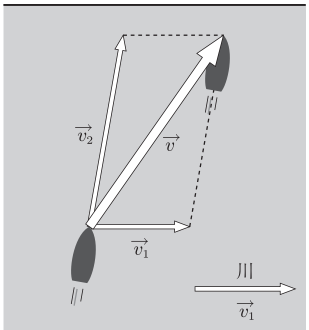
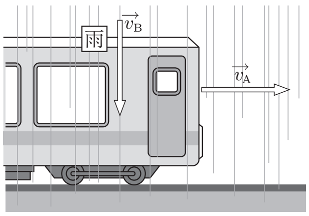
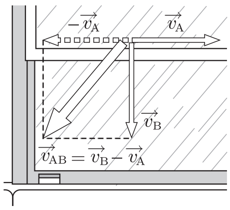


図 3.4　速度の合成．合成速度 $\vec{v}$ は，速度 $\vec{v}_1$ と速度 $\vec{v}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の対角線として求められる．



電車の外から見た雨滴



電車の中から見た雨滴

図 3.5　速度の差の作図法．

物体の運動を考える場合には，その物体の運動する向きも重要である．そこで，速度を大きさ（速度の大きさ＝速さ）だけでなく，向きをもつ物理量として考え，速度を表す文字 v の上に矢印をつけて，$\vec{v}$〔m/s〕のように表す．$\vec{v}$ を図に表す場合には，その大きさに比例した長さの矢印を用いる．矢印の向きでその向きを表す．

幅の広い川を横切る船を考えよう．岸から見た船の運動は図 3.4 のように，川の水の動き（速度 $\vec{v}_1$〔m/s〕で表す）とその水に対する船そのものの運動（速度 $\vec{v}_2$〔m/s〕で表す）を加えたものになる．図からわかるように，岸から見た船の運動を表す $\vec{v}$ は，$\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ を辺とする平行四辺形の対角線として求めることができ，ベクトル合成の平行四辺形の法則という．このようにして得られた $\vec{v}$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

と表す．

次に，速度 $\vec{v}_\mathrm{A}$〔m/s〕で動いている電車に乗った人が速度 $\vec{v}_\mathrm{B}$〔m/s〕で落ちてくる雨粒を見る場合を考える．A から見た B の速度を直線上の運動と同様に，**A に対する B の相対速度**と呼び，

$$\vec{v}_\mathrm{AB} = \vec{v}_\mathrm{B} - \vec{v}_\mathrm{A}$$

となる．$\vec{v}_\mathrm{AB}$ は図 3.5 のように求めることができる．

例題 3.3　秒速 $3.50 \times 10^1\ \mathrm{m/s}$ で直進している電車を考える．電車の進む向きは y 軸の正の向きである．電車の進む向きに直交するように道路があり，そこを $1.50 \times 10^1\ \mathrm{m/s}$ で自動車が走っている．自動車の走る向きは x 軸の正の向きである．また，雨が降っていて，その雨粒の速さは鉛直下向きに $7.0\ \mathrm{m/s}$ である．鉛直下向きを z 軸の正の向きとする．以下の問に答えよ．

(1)　地上に固定した座標系から見た電車，自動車，雨粒の速度ベクトルを求めよ．

(2)　電車から見た自動車の速度ベクトルを求めよ．

(3)　電車から見た雨粒の速度ベクトルを求めよ．

(4) 自動車から見た雨粒の速度ベクトルを求めよ．

解 (1) 電車の速度を $\vec{v}_{\mathrm{t}}$ とすると，$\vec{v}_{\mathrm{t}} = (0.0, 3.50\times 10^1, 0.0)\ \mathrm{m/s}$,
自動車の速度を $\vec{v}_{\mathrm{a}}$ とすると，$\vec{v}_{\mathrm{a}} = (1.50\times 10^1, 0.0, 0.0)\ \mathrm{m/s}$,
雨粒の速度を $\vec{v}_{\mathrm{r}}$ とすると $\vec{v}_{\mathrm{r}} = (0.0, 0.0, 7.0)\ \mathrm{m/s}$ である．

(2) $\vec{v}_{\mathrm{a}} - \vec{v}_{\mathrm{t}} = (1.50 \times 10^1, -3.50 \times 10^1, 0.0)\ \mathrm{m/s}$

(3) $\vec{v}_{\mathrm{r}} - \vec{v}_{\mathrm{t}} = (0.0, -3.50 \times 10^1, 7.0)\ \mathrm{m/s}$

(4) $\vec{v}_{\mathrm{r}} - \vec{v}_{\mathrm{a}} = (-1.50 \times 10^1, 0.0, 7.0)\ \mathrm{m/s}$

例題 3.4 地上 h〔m〕の高さから小物体 A を落とすと同時に，その真下の地面から小物体 B を初速度 v_0〔m/s〕で真上に投げ上げた．重力加速度を g〔m/s^2〕とする．ただし，鉛直上向きを z 軸の正の向きとする．

(1) 小物体 A と B の速度の時間変化を表すグラフを描け．ただし，$v_0 = 9.8\ \mathrm{m/s}$，$g = -9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とし，小物体 A を落とした瞬間を 0.0 s として，2.0 s 後までのグラフを描くこと．また，ここでは衝突することは考慮しなくて良い．

(2) 小物体 A から見た小物体 B の速度を求めよ．

(3) 小物体 A と B が衝突する時刻 t_{C}〔s〕を求めよ．ただし，地面より上で衝突するものとする．

(4) $v_0 = 9.8\ \mathrm{m/s}$, $g = -9.8\ \mathrm{m/s^2}$ のとき，小物体 A と B が，ちょうど地面で衝突する場合の高さ h を求めよ．

解 (1) 小物体 A は初速度 0 m/s で，加速度 g〔m/s^2〕で速度を「増す」ので，$v_{\mathrm{A}}(t) = 0 + gt = gt$ である．一方，小物体 B は初速度 v_0〔m/s〕で，加速度 g〔m/s^2〕で速度を「増す」ので，$v_{\mathrm{B}}(t) = v_0 + gt$ である．

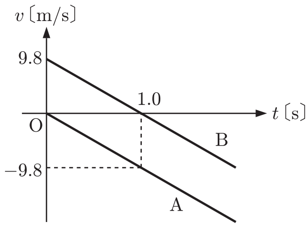


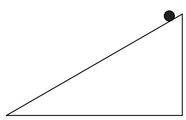
図 3.6

(2) 図 3.6 からわかるように，小物体 A から見た小物体 B の速度は常に v_0〔m/s〕である．

(3) t_{C} は $h = v_0 t_{\mathrm{C}}$ より求めることができ，$t_{\mathrm{C}} = h/v_0$ となる．

(4) t_{C} の間に小物体 A は $-\dfrac{1}{2}g{t_{\mathrm{C}}}^2$ だけ変位する．小物体 A の位置が地面であるためには，

$$h = -\frac{1}{2}g{t_{\mathrm{C}}}^2 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{h}{v_0}\right)^2$$



でなければならない．したがって，$h = -\dfrac{2{v_0}^2}{g}$ となる．g は負なので，h は正であることに注意．数値を代入すると，$h = 2.0 \times 10\,\mathrm{m}(19.6\,\mathrm{m})$ となる．また，衝突するのは $2.0\,\mathrm{s}$ 後である．

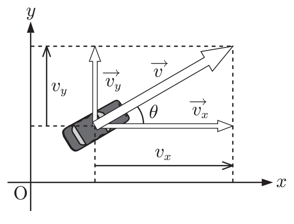


図 3.7　速度ベクトルの x 軸と y 軸への分解．$\vec{v}_x = (v_x, 0)$，$\vec{v}_y = (0, v_y)$ である．

速度の合成とは逆に，速度 $\vec{v}$ を 2 つの速度 $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ に分けることもできる．1 つの速度を 2 つの速度に分解することを**速度の分解**といい，分解された $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ を，それぞれ**分速度**という．速度の分解では，図 3.7 のように，互いに直交した 2 本の直線に平行な，2 つの速度ベクトルに分解する場合が特に重要である．その 2 本の直線を，座標の x 軸と y 軸とする．速度 $\vec{v}$ をそれぞれの方向に分解したものを，$\vec{v}$ **の** x **成分**（v_x〔m/s〕），$\vec{v}$ **の** y **成分**（v_y〔m/s〕）と呼び，$\vec{v} = (v_x, v_y)$ と書くことができる．

例題 3.5　図 3.7 で，v_x と v_y を $|\vec{v}|$ と θ で表せ．

解　図より，

(1)　$v_x = |\vec{v}|\cos\theta$

(2)　$v_y = |\vec{v}|\sin\theta$

となる．

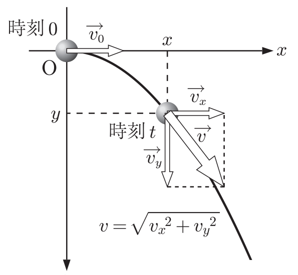


図 3.8　水平投射．物体の速度の大きさは $\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$ となり，その向きはその物体の進む向きである．すなわち，速度の向きは軌道の接線の方向に一致する．

注 4　$t = 0\,\mathrm{s}$ において，$x = 0\,\mathrm{m}$ とする．

注 5　$t = 0\,\mathrm{s}$ において，$y = 0\,\mathrm{m}$ とする．

3.2　平面内の運動 ♡

平面内の運動の速度ベクトルを，直交した x 軸と y 軸方向の成分に分解して考察する．最初に，水平投射を考えよう．図 3.8 のように x 軸と y 軸をとる．原点 O から水平方向（x 軸方向）に初速 v_0〔m/s〕で投げる．そして，物体の運動の速度を x 軸と y 軸に分解して考える．物体は x 軸方向には速度 v_0 の等速度運動を行う．したがって，時刻 t〔s〕における x 軸方向の速度の成分を v_x〔m/s〕，位置を x〔m〕[注 4] と書くことにすると，

$$v_x = v_0, \quad x = v_0 t$$

である．一方，鉛直方向（鉛直下向きを y 軸の正の向きとする）には，自由落下と同じ運動を行う．時刻 t における物体の速度の成分を v_y〔m/s〕とし，位置を y〔m〕[注 5] とする．また，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とすると，

$$v_y = gt, \quad y = \frac{1}{2}gt^2$$

となる．物体の運動の軌道は，x, y を表す式から t を消去することにより，

$$y = \frac{g}{2{v_0}^2}x^2$$

と得られる．

次に，斜方投射（物体を斜め上方に投射した場合）を考えよう．水平投射と同じように，水平方向と鉛直方向の運動に分解する．鉛直上向きを y 軸の正の向きとする．水平方向はやはり等速度運動になり，鉛直方向は鉛直投げ上げ[注6]と同じ運動をする．図 3.9 のように，x 軸方向の運動は，初速度が $v_0 \cos\theta$ になるので，

注 6　水平投射とは異なり，初速度に鉛直方向の成分がある．

$$v_x = v_0 \cos\theta, \quad x = v_0 t \cos\theta$$

となり，y 軸方向の運動は，初速度が $v_0 \sin\theta$ で加速度が反対向きでその大きさが g〔m/s^2〕の加速度運動になるので，

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt, \quad y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

となる．x, y から t を消去すると，

$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x^2$$

となる．

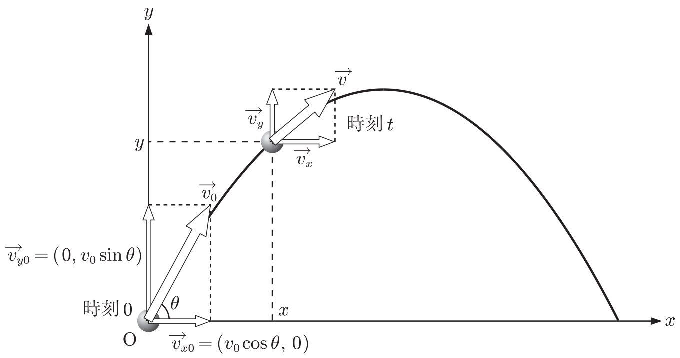


図 3.9　斜方投射．物体の初速度の大きさは v_0 で，その向きは水平方向に対して角度 θ だけ上向きである．$|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2}$ である．

ここで，もっとも遠くに物体を到達させるために必要な投げ上げる角度を考える．上の式を変形すると[注7]

注 7　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を使う．

$$y = x\left(\frac{2{v_0}^2\sin\theta\cos\theta - gx}{2{v_0}^2\cos^2\theta}\right) = x\left(\frac{{v_0}^2\sin 2\theta - gx}{2{v_0}^2\cos^2\theta}\right)$$

となる．したがって，小物体が地面についたときの x 座標は $\dfrac{{v_0}^2}{g}\sin 2\theta$ となる．これを最大とする θ は $\dfrac{\pi}{4}$ であり，その最大値は $\dfrac{{v_0}^2}{g}$ となる．

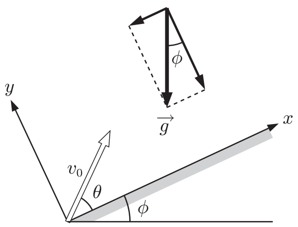


図 3.10

例題 3.6　水平から角度 ϕ〔rad〕をなす斜面の最下部から，その斜面に対して角度 θ〔rad〕だけ上向きに初速度の大きさ v_0〔m/s〕で小物体を投げ上げた．斜面に沿って上向きに x 軸をとり，それと垂直に y 軸をとって，以下の問に答えよ（図 3.10）．ただし，鉛直下向きの重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕$(g > 0)$ とし，原点は投げ上げた地点とする．

(1)　初速度の x 成分と y 成分を求めよ．

(2)　重力加速度の x 成分と y 成分を求めよ．

(3)　投げ上げた瞬間を時刻 0 s として，ある時刻 t〔s〕の x，y 座標を求めよ．ただし，斜面に再びぶつかるまでを考える．

(4)　斜面にぶつかるときの時刻を求めよ．

(5)　斜面にぶつかるときの x 座標を求めよ．

解　(1)　図 3.10 より，$v_x = v_0 \cos\theta$ と $v_y = v_0 \sin\theta$ となる．

(2)　図 3.10 より，$g_x = -g\sin\phi$ と $g_y = -g\cos\phi$ となる．図 3.9 とは異なり，y 軸方向の運動だけでなく，x 軸方向の運動も等加速度運動である．

(3)　初速度と加速度，および $t = 0$ s での位置がわかっているので，

$$x = (v_0\cos\theta)t + \frac{1}{2}(-g\sin\phi)\,t^2$$

$$y = (v_0\sin\theta)t + \frac{1}{2}(-g\cos\phi)\,t^2$$

となることがわかる．

(4)　斜面にぶつかるのは y 座標がゼロのときである．したがって，y 座標を表す式にゼロを代入すると，

$$\begin{aligned} 0 &= (v_0\sin\theta)t + \frac{1}{2}(-g\cos\phi)\,t^2 \\ &= t\left(v_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt\cos\phi\right) \end{aligned}$$

となる．したがって，

$$t = \frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\phi}$$

のときに，斜面にぶつかる．

(5)　x 座標を与える式に，求めた時刻を表す式を代入すると

$$(v_0\cos\theta)\frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\phi} - \frac{1}{2}(g\sin\phi)\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\phi}\right)^2$$

$$= \frac{2{v_0}^2 \sin\theta\cos\theta}{g\cos\phi} - \frac{2{v_0}^2 \sin^2\theta\sin\phi}{g\cos^2\phi}$$

$$= \frac{2{v_0}^2 \sin\theta}{g\cos^2\phi}\left(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi\right)$$

のように斜面にぶつかるときの x 座標が求まる．ここで，$\phi = 0$ を代入すると図 3.9 の場合と同じ結果を得ることができる．

3.3　小物体の運動の測定とベクトルによる運動の記述

1 次元運動の様子（物体の位置の時間変化）を測定することは，記録タイマーを用いて行うことが，高校物理では詳細に議論されている．しかしながら，2 次元（平面上）あるいは 3 次元（空間中）運動の測定についてはあまり議論されておらず，位置の時間変化が与えられていることを前提として進んでいる．物理学が実験科学であるという観点から，2 次元あるいは 3 次元運動での測定方法を議論する必要があるだろう．そこで，3 次元空間を運動している小物体の位置の仮想的な，しかし実現可能な，測定について考えよう．

この小物体に，一定の時間間隔 δ で光を照射し，その運動の様子を撮影する．十分遠方から撮影すれば，視差の影響を無視して [注 8]，この小物体のある面に対する「影」を δ 毎に記録することができる．この面には，図 3.11 のように，2 つの直交する向きを定めた直線が引かれており，それぞれにはメートル単位の目盛が刻まれている．この 2 本の直線をそれぞれ x 軸および y 軸と呼ぶことにする [注 9]．そして，この x 軸と y 軸を用いて測定された「影」の位置を表す数値を x 座標および y 座標と呼ぶこととする．

同様に，xy 面に垂直で y 軸を含む第 2 の面を考える．この面内に x 軸と直交するもう 1 つの向きを定めた直線を描き，それを z 軸と呼ぶことにする．この z 軸にもやはりメートル単位の目盛が刻まれている．この第 2 の面に対する「影」の位置を同様に測定することによって，z 座標 [注 10] を得ることができる．これらの x, y, z 座標は，位置を表すという共通の性質をもっているので，ひとまとめにして (x_i, y_i, z_i) と表記すれば便利である [注 11]．そして，このひとまとめにしたものを

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \tag{3.1}$$

と書き，i 番目の位置ベクトルと呼ぶことにする [注 12]．光の発光間隔が一定であるので，i 番目の発光時の「影」ならば，

$$t = \delta i$$

注 8　これは近似であり，本書で考える対象が物理学であることの現れである．

注 9　影を投射した面を xy 面とする．

注 10　小物体の大きさは十分小さく，小物体の大きさがこれらの座標の不確かさの原因にならないと「近似」する．

注 11　下付添え字の i は i 番目に測定されたものであることを示す．

注 12　x_i, y_i, z_i は，位置ベクトル $\vec{r}_i$ の x, y, z 成分という．

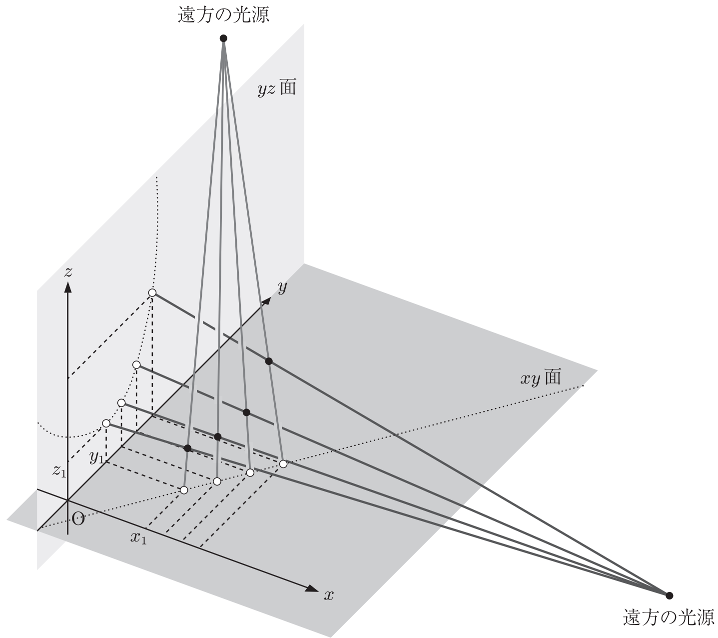


図 3.11　小物体（黒丸）の運動とその影（白抜き丸）．x, y, z 座標の求め方．

から時刻がわかる．

以上のような仮想的な測定により，表 3.1 のように時刻 $t_i = \delta i$ における位置ベクトル $\overrightarrow{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ が得られる．ただし，1 番目の発光時の時刻を δ とすることにしよう．ここでは，測定に不確かさはないとする．この位置ベクトルも，高校で学んだ速度と同じ平行四辺形の法則に基づいて和を考えることができることは明らかであろう．

3.4　平均の速度と加速度，瞬間の速度と加速度

仮想的な小物体の位置測定から，小物体の時刻 t_i における平均の速度 $\overline{\overrightarrow{v}}_i$ を次のように定義することは自然であろう [注 13, 14]．

注 13　変数の上に棒を引いて，平均を表すこととする．

注 14　各成分に注目すると，1 次元の場合と同じ定義になっている．

$$\overline{\overrightarrow{v}}_i = \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\delta},\ \frac{y_{i+1} - y_i}{\delta},\ \frac{z_{i+1} - z_i}{\delta}\right) = \frac{(x_{i+1} - x_i,\ y_{i+1} - y_i,\ z_{i+1} - z_i)}{\delta} \tag{3.2}$$

したがって，$\overline{\overrightarrow{v}}_i$〔m/s〕は位置ベクトルを用いて，$\dfrac{\overrightarrow{r}_{i+1} - \overrightarrow{r}_i}{\delta}$ と表すこともできる．同様に，平均の加速度 $\overline{\overrightarrow{a}}_i$ を

注 15　$\displaystyle\lim_{\delta\to 0} \frac{\overline{\overrightarrow{v}}_i - \overline{\overrightarrow{v}}_{i-1}}{\delta} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\overline{\overrightarrow{v}}_{i+1} - \overline{\overrightarrow{v}}_i}{\delta}$ である．

$$\overline{\overrightarrow{a}}_i = \frac{\overline{\overrightarrow{v}}_i - \overline{\overrightarrow{v}}_{i-1}}{\delta} = \frac{\overrightarrow{r}_{i+1} - 2\overrightarrow{r}_i + \overrightarrow{r}_{i-1}}{\delta^2} \tag{3.3}$$

によって定義することも自然である [注 15]．これらの式に従えば，表 3.1 のよ

表 3.1 一定時間間隔で測定した $\vec{r} = (x, y, z)$．時間の単位は s，x, y, z の単位は m とする．x と y 軸方向の運動はそれぞれ一定の速度 1.0 m/s と 2.0 m/s であり，加速度は 0.0 m/s^2 である．一方，z 軸方向の運動は等加速度運動で，その加速度は -1.0×10 m/s^2 である．

t	x	$\bar{v}_x$	$\bar{a}_x$	y	$\bar{v}_y$	$\bar{a}_y$	z	$\bar{v}_z$	$\bar{a}_z$
0.00	0.00			0.00			0.00		
		1.0			2.0			4.5	
0.10	0.10		0.0	0.20		0.0	0.45		-1.0×10
		1.0			2.0			3.5	
0.20	0.20		0.0	0.40		0.0	0.80		-1.0×10
		1.0			2.0			2.5	
0.30	0.30		0.0	0.60		0.0	1.05		-1.0×10
		1.0			2.0			1.5	
0.40	0.40		0.0	0.80		0.0	1.20		-1.0×10
		1.0			2.0			0.5	
0.50	0.50		0.0	1.00		0.0	1.25		-1.0×10
		1.0			2.0			-0.5	
0.60	0.60		0.0	1.20		0.0	1.20		-1.0×10
		1.0			2.00			-1.5	
0.70	0.70		0.0	1.40		0.0	1.05		-1.0×10
		1.0			2.0			-2.5	
0.80	0.80		0.0	1.60		0.0	0.80		-1.0×10
		1.0			2.0			-3.5	
0.90	0.90		0.0	1.80		0.0	0.45		-1.0×10
		1.0			2.0			-4.5	
1.00	1.00			2.00			0.00		

うに平均の速度や加速度を求めることができる．

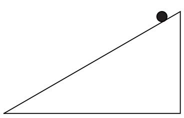
ここで，$\delta \to 0$ s の極限を考えよう．この場合には，i は使えないので $\delta i \to t$ を使って，ある時刻 t における位置ベクトルという方が適切である．すなわち，

$$\vec{r}(t) \quad = \quad (\, x(t),\, y(t),\, z(t)\,) \tag{3.4}$$

と書く．瞬間の速度 $\vec{v}(t)$ は，この位置ベクトル $\vec{r}(t)$ を時間 t で微分することによって得られる[注 16]．

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) \tag{3.5}$$

注 16 時間変化を考えることが当然であるから，$\vec{r}(t)$ などの (t) を省略することが多い．



同様に瞬間の加速度 $\vec{a}(t)$ も，

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2}\right) \tag{3.6}$$

となる．

3.2 節の水平投射の場合は [注 17]，

$$\vec{v} = (v_0, gt, 0), \qquad \vec{r} = (v_0 t, \frac{1}{2}gt^2, 0)$$

であり，斜方投射の場合は [注 18]

$$\vec{v} = (v_0\cos\theta, v_0\sin\theta - gt, 0), \qquad \vec{r} = (v_0 t\cos\theta, v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2, 0)$$

と表すことができる．どちらの場合も，初期速度 $\vec{v}_0$ と $\vec{g}$ を適切に選べば，

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \qquad \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{3.7}$$

と統一的に表すことができる．鉛直投げ下ろしの場合の

$$v = v_0 + gt, \qquad x = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

とよく似た形をしており，ベクトル表記の便利さがわかるだろう [注 19]．ただし，前節の場合と比較するために，$t = 0\,\mathrm{s}$ における位置ベクトルが原点（$\vec{0}$ m [注 20]）の場合を考えた．

注 17　$\vec{g} = (0, g, 0)$，$\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ とすると，$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$．

注 18　$\vec{g} = (0, -g, 0)$，$\vec{v}_0 = (v_0\cos\theta, v_0\sin\theta, 0)$ とすると，$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$．

注 19　$t = 0\,\mathrm{s}$ における位置ベクトルが $\vec{r}_0$ の場合は，$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ とすればよい．

注 20　$\vec{0} = (0, 0, 0)$

3.5　速度の合成と相対運動

図 3.12 のように，物体の位置ベクトルがある座標系において $\vec{r}_1$ で表されることとしよう．この座標系の原点は観測者がいる別の座標系では $\vec{r}_2$ で表される．観測者がいる座標系によって物体の位置ベクトル $\vec{r}$ を表すと，

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

となる．$\vec{r}$ を時間 t で微分すると

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

となる．ここで，$\dfrac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_1$ で $\dfrac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_2$ である．この式は，高校物理で学んだ**速度の合成**ができることを意味している．

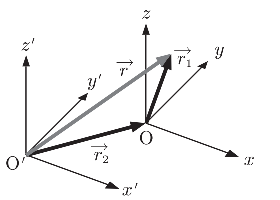


図 3.12　相対的に運動する 2 つの座標系．“′” のついた座標系に観測者は静止しており，位置ベクトル $\vec{r}_1$ に観測対象の物体が存在する．2 つの座標系の対応する軸は常に平行である場合を考える．

図 3.13 のように，1 つの座標系の中で物体 A と物体 B が相対的に運動している場合を考える．位置 $\vec{r}_\mathrm{A}$ にある物体 A から $\vec{r}_\mathrm{B}$ にある物体 B を観測した場合の，A に対する B の相対的な位置 $\vec{r}_\mathrm{AB}$ は

$$\vec{r}_\mathrm{AB} = \vec{r}_\mathrm{B} - \vec{r}_\mathrm{A} \tag{3.8}$$

となる．したがって，物体 A に対する物体 B の速度は

$$\vec{v}_\mathrm{AB} = \frac{d\vec{r}_\mathrm{AB}}{dt} = \frac{d\vec{r}_\mathrm{B}}{dt} - \frac{d\vec{r}_\mathrm{A}}{dt} = \vec{v}_\mathrm{B} - \vec{v}_\mathrm{A} \tag{3.9}$$

となる．また，加速度も同様に考えて，物体 A に対する物体 B の加速度は

$$\vec{a}_{\mathrm{AB}} = \vec{a}_{\mathrm{B}} - \vec{a}_{\mathrm{A}} \tag{3.10}$$

で与えられる．ここで，$\vec{a}_{\mathrm{B}} = \vec{0}\ \mathrm{m/s^2}$ であっても，$\vec{a}_{\mathrm{A}} \neq \vec{0}\ \mathrm{m/s^2}$ ならば，$\vec{a}_{\mathrm{AB}} \neq \vec{0}\ \mathrm{m/s^2}$ となり，「見かけ」の加速度が現れる．

具体例として，等速度運動をしている電車の中でボールを落とす場合を考えよう．ボールは電車の中で鉛直に落下する．ところが，加速する電車の中では鉛直に落ちるだけでなく，電車の加速方向と逆方向にも動くように見える．

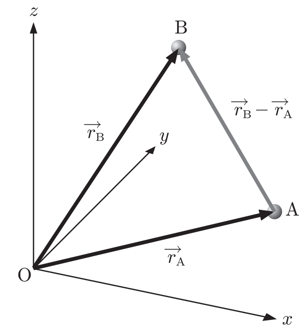


図 3.13　相対的に運動する物体 B と観測者 A の相対位置．

例題 3.7　図 3.14 の場合にボールの運動を具体的に考えよう．重力加速度の大きさを $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする．

(1)　電車が $2.0\,\mathrm{m/s^2}$ で加速中に，床から $2.0\,\mathrm{m}$ の高さからボールを落とした場合に落下する地点は真下からどれだけ後方にずれるだろうか？

(2)　電車が急ブレーキをかけた．その時の加速度は $-5.0\,\mathrm{m/s^2}$ とする．急ブレーキを掛けた瞬間にボールを床から $1\,\mathrm{m}$ の高さから落とすとボールが落下する地点は真下からどれだけ前方にずれるだろうか．

解　(1)　ボールが床に落ちるまでの時間は $\dfrac{1}{2}gt^2 = 2.0\,\mathrm{m}$ より，$t = 6.4 \times 10^{-1}\,\mathrm{s}$ である．ボールの見かけの水平方向の加速度は $-2.0\,\mathrm{m/s^2}$ であるから，$\dfrac{1}{2}2.0t^2 = 4.1 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}$ となる．

(2)　別の考え方をしてみよう．ボールの鉛直方向の運動も電車の進行方向の運動も加速度運動であり初速度はゼロなので，移動距離はどちらも運動を行っている時間の 2 乗に比例する．落下時間を t とすると，鉛直方向の距離は $\dfrac{1}{2}9.8t^2$ で，これは $1.0\,\mathrm{m}$ である．一方，前方へのズレは $\dfrac{1}{2}5.0t^2$ で，これはボールが落下する高さに鉛直方向と電車の進行方向の加速度の比を掛けて，$1.0 \times \dfrac{5.0}{9.8} = 5.1 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}$ と求めることもできる．

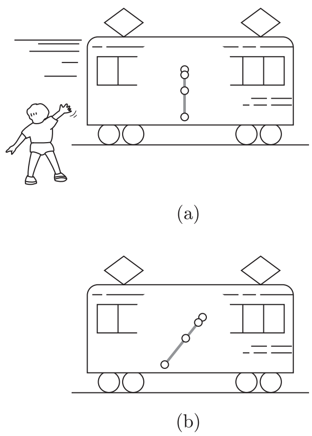


図 3.14　加速中の電車の中のボールの落下．(a) 電車の外から見た場合，(b) 電車の中から見た場合．

3.6　単位ベクトル

ベクトル $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ をそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルと呼ぶ．多くの教科書では，それらを記号 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ によって表す[注 21]．この

注 21　$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ と表すこともある．

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ を用いると，

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \tag{3.11}$$

と書くことができる．

本書では，ベクトル $\vec{r}$ の成分を表示する必要がある場合は，(x, y, z) のように表記し，$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は用いない．なぜならば，等価な，しかし，異なった表現は混乱を招くおそれがあるからである．

3.7　3次元空間中の有向線分♠

3次元空間中に原点を始点とする矢印（有向線分）すべての集合を考えよう．この集合の要素に，以下のようにして定義される和[注22]と積（ある実数 α の α 倍）を考えれば，**ベクトル**になる[注23]．

注22　「和」と呼ぶ2項演算を定義する．

注23　ベクトルとは，以下に述べる演算規則に対して閉じた集合（集合の要素を演算した結果が，やはりその集合の要素になる）のことである．

有向線分 $\vec{r}_1$ と $\vec{r}_2$ が与えられたとき，その2つの有向線分から図3.15のように平行四辺形を作ることができる．この平行四辺形の4番目の頂点への有向線分を $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ と定義する．

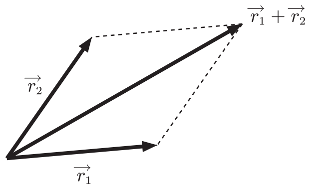


図3.15　ベクトル合成の平行四辺形法則．3点を決めれば平面が決まるので，2つのベクトルによって平面が決まり，平行四辺形の4番目の頂点も同じ平面上にある．

有向線分 $\vec{r}$ とある実数 α が与えられたとき，有向線分 $\vec{r}$ の α 倍を $\alpha\vec{r}$ と書くことにして，$\alpha > 0$ の場合は向きを変えずに有向線分の長さを α 倍にし，$\alpha < 0$ の場合は向きを逆向きにして有向線分の長さを $|\alpha|$ 倍にすることにする（図3.16）．

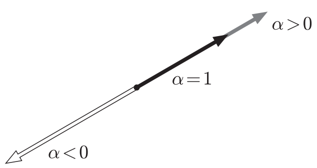


図3.16

$\alpha = 0$ の場合は特別である．有向線分を0倍するとは有向線分の長さをゼロにすることと定義し，その結果を $\vec{0}$ と書く．

上の和と積の定義から有向線分は以下の性質を満たす．

- 加法の結合則：$\vec{r}_1 + (\vec{r}_2 + \vec{r}_3) = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + \vec{r}_3$
- 加法の可換則：$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_2 + \vec{r}_1$
- 加法の単位元の存在：$\vec{r} + \vec{0} = \vec{r}$
- 加法の逆元の存在：$\vec{r} + (-\vec{r}) = \vec{0}$
- 分配則1：$\alpha(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \alpha\vec{r}_1 + \alpha\vec{r}_2$
- 分配則2：$(\alpha + \beta)\vec{r} = \alpha\vec{r} + \beta\vec{r}$
- 積の結合則：$\alpha(\beta\vec{r}) = (\alpha\beta)\vec{r}$
- 積の単位元の存在：$1\vec{r} = \vec{r}$

これらの条件を満たすとベクトルと呼ぶことができる．

3.8 ベクトルとしての順序をもった数の組♠

順序を考慮した数の組を考える．具体的に考えるために，3 つの数の組 (x, y, z) を考えよう．和と積（ある実数 α の α 倍）を以下のように定義する．

2 つの数の組 (x_1, y_1, z_1) と (x_2, y_2, z_2) が与えられたとき，その 2 つの和を $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ とする．また，順序をもった数の組 (x, y, z) とある実数 α が与えられたとき，順序をもった数の組 (x, y, z) の α 倍 $\alpha(x, y, z)$ を $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ と定義する．特に，$\alpha = 0$ の場合は $\alpha(x, y, z) = (0, 0, 0)$ とする．

上のように，和と積を定義すれば，(x, y, z) もベクトルとしての性質を満たすことが簡単にわかる．

位置ベクトル $\vec{r}$（有向線分）とその位置ベクトルの座標による分解（順序をもった数の組）は，その作り方から一対一に対応することは明らかである．さらに，上のように和と積という演算を定義した場合，どちらもベクトルとなることがわかった．したがって，位置ベクトル $\vec{r}$ とそれに対応した (x, y, z) を同一視することができる．

章末問題

問題 3.1$^{\heartsuit}$　静水の場合に速さ 5.0 m/s で進む船が，距離 $1.0{\times}10^2$ m だけ離れた地点 A（川上）と B（川下）を往復する．川の流れは 1.0 m/s である．また，岸を散歩する人がいて，川上に向かって速さ 1.0 m/s で歩いている．以下の問に答えよ．川を下る向きを速度ベクトルの正の向きとする．

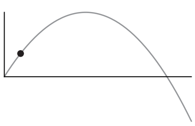
(1)　地点 A から地点 B まで進むとき，岸から見た船の速度はいくらか．
(2)　地点 A から地点 B まで進むのに要する時間はいくらか．
(3)　船が地点 A から地点 B まで進んでいるときに，散歩している人が船を見ると，船はどれぐらいの速度で動いているように見えるか．
(4)　地点 B から地点 A まで進むとき，岸から見た船の速度はいくらか．
(5)　地点 B から地点 A まで進むのに要する時間はいくらか．
(6)　船が地点 B から地点 A まで進んでいるときに，散歩している人が船を見ると，船はどれぐらいの速度で動いているように見えるか．

問題 3.2$^{\heartsuit}$　秒速 2.50×10 m/s で直進している電車がある．電車の進む向きを x 軸の正の向きとする．電車の進む向きに直交するように道路があり，そこを 1.00×10^1 m/s で自動車が走っている．自動車の走る向きを y 軸の正の向きとする．また，雨が降っていてその雨粒の速さは鉛直下向きに 2.0×10^0 m/s である．鉛直上向きを z 軸の正の向きとする．以下の問に答えよ．

(1)　地上に固定した座標系から見た電車，自動車，雨粒の速度ベクトルはいくらか．
(2)　電車から見た自動車の速度ベクトルを求めよ．
(3)　電車から見た雨粒の速度ベクトルを求めよ．
(4)　自動車から見た雨粒の速度ベクトルを求めよ．

問題 3.3$^{\heartsuit}$　一定の速度 4.4 m/s で上昇する気球のゴンドラから斜め上向きにボールを投げた．ボールの水平方向の速さは十分大きくて，気球とはぶつからないものとする．以下では，気球とボールの鉛直方向の動きのみを考察する．ボールは 4.0 s 後に気球とすれ違った．重力加速度の大きさを $9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とする．

(1)　地上から見たボールの鉛直方向の初速度 v_0 を求めよ．
(2)　すれ違うときに気球に乗った人が見るボールの速度を求めよ．
(3)　ボールは気球とすれ違ってから 2.0 s 後に地面に落ちた．ボールを投



げたときの気球の高さを求めよ．

問題 3.4♡　時速 1.60×10^2 km/h[注24] の速球を投げることができる投手がいるとしよう．重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする．

(1)　時速 1.60×10^2 km/h のボールを水平に投げた．ホームプレートに到達するまでに落ちる高さを求めよ．ただし，ピッチャーとホームプレート間の距離を 18.44 m とする．

(2)　この投手が遠投した．ボールが到達する距離の最大値はいくらか？

注 24　日常的には，「時速 10 キロ」のように 1 時間の間に移動する距離（ここでは 10 キロ・メートル）を示すことによって，速さを表すことが多い．しかしながら，本書では，時速を「速さ」の特別なものと解釈し，時速の単位には「長さの単位 (km)/時間の単位 (h)」を用いる．

問題 3.5♡　地面から高さ h にある標的に向かって，水平方向に L だけ離れた地面のある点（原点 O とする）から小球を斜めに投げ上げる．小球の初速度の大きさを v_0 とし，地面（水平面）からの投げ上げの角度は θ_0 と固定する．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　小球が標的に当たったとしよう．v_0 はいくらか？

(2)　小球が標的に当たるため，θ_0 が満たす条件は何か？

問題 3.6♡　図 3.17 のように，高さ 4.9×10^2 m の高さを時速 9.0×10 km/h で水平飛行している飛行機から小球を落として，飛行機の進行方向の地表にある点 P に命中させたい．重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として，以下の問に答えよ．ただし，空気抵抗は無視できるものとする．

(1)　小球が地表に落下するまでの時間を求めよ．

(2)　小球が落下する間に飛行機が飛ぶ距離を求めよ．

(3)　小球を，飛行機が点 P を通過する何 m 手前で落とせばよいか？

(4)　飛行機から見ると，小球の運動はどのように見えるか？

(5)　小球が地表に落ちるときの速度の大きさを求めよ．

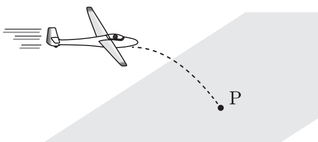


図 3.17

問題 3.7♡　図 3.18 のように，ある高さに置かれた小球 P に向けて，時刻 $t = 0$ s に別の小球 Q を水平面上から初速度の大きさ v_0 で投げ出した．その瞬間に小球 P も自由落下を始めた．t_0 後に小球 P と Q は水平面より上で衝突した．

小球 Q の初速度と水平面の間の角度を θ，小球間の距離を L とする．小球 Q を投げ出す前の小球 Q の位置を座標の原点とし，小球 P から水平面に下ろした垂線の足と原点を結ぶ直線上に x 座標をとり，鉛直上向きを y 軸の正の向きとする．また，重力加速度の大きさを g として，以下の問に答えよ．

(1)　小球 P の自由落下する前の位置座標を求めよ．

(2)　t_0 を求めよ．

(3)　時刻 t_0 での小球 P と Q の位置座標を求めて，小球 P と Q が衝突することを確認せよ．

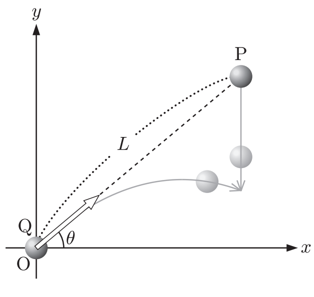


図 3.18

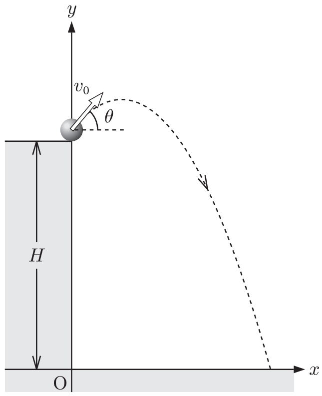


図 3.19　ビルの屋上からの斜方投射.

問題 3.8　高さ H のビルの屋上から，質量 m の物体を水平方向と角度 θ をなす向きに初速度の大きさ v_0 で投げ上げた．重力加速度の大きさを g とし，投げ上げた瞬間を時刻 0 s とする．

(1)　図 3.19 のように x, y 軸，および原点 O をとるとき，時刻 t における物体の速度 $v(t)$ を求めよ．

(2)　積分して位置座標を求めよ．

(3)　物体が最高点に達する時刻，およびその高さを求めよ．

教育に実験は必要か？

本文では，（学生）実験について触れることはできなかったので，コラムにおいてその意義を述べたいと思う．

実験では，必ずしも理論通りの結果は得られないので[注 25]，理科教育を行う上で有害であるという「ある意味極端な意見」を述べる人もいる．このような意見は，

> 机上の勉強では単純化して無視できたことが，実験では無視できなくなり，本質的な理解が難しくなる

という観点からは一理あるかもしれない．

注 25　「なめらかな」水平面を滑らせた物体も，いつかは止まってしまう．

そこで，学生実験は必要であるという主張を行うために，著者が共訳した本を紹介する．D.C.ベイアード，『実験法入門 — 実験と理論の橋渡し』（ピアソンエデュケーション，2004)[注 26] である．この本の中で，著者は

> 「実験の目的」は「実験指導書に従って，実験を行い，重力加速度などの既知の物理定数を求める」—極論すると模倣を行う—ことではなく，「目的を設定し，そのための計画を立案し，実行できる」—創造的に自らを律する— ように訓練を行うことである．

と述べている．また，

> 実際の現象を示す自然（の一部，この本ではシステムと呼んでいる）を説明するためのモデルを作ることが

理論を構築することであり，実験は

> 完全ではありえないモデルが，ある精度の範囲内で目的に合致するものかどうかをチェックする[注 27]

ことであると述べている．このような実験に対する見方は物理学が実験科学であるということを意味している．本書で扱ったニュートン力学も，相対性理論も，また量子力学もみな，それぞれの適用可能な範囲で有用なモデルであり，それらは実験によって検証されてきた．

注 26　残念ながら絶版になっている．

注 27　ニュートン力学は，アポロ計画で人間を月に送り込むという目的に合致した理論であった．GPS で位置情報を得るためには，相対性理論に基づく計算が必要である．