

## 物理学概論

— 高校物理から大学物理への橋渡し — [力学編]

## 章末問題解答 (2021年7月16日更新)

## 第1章

問題 1.1<sup>♡</sup>

表 1.2 力学に関連する固有の名称を持つ SI 組み立て単位

物理量	単位	単位記号	SI 基本単位による表現
周波数	ヘルツ	Hz	$s^{-1}$
力	ニュートン	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
エネルギー	ジュール	J	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
仕事率	ワット	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$

問題 1.2<sup>♡</sup> 見る人によって、最小桁 (0.1 mm) の数字は変化するだろう。

- (1)  $5.05 \times 10^1$  mm
- (2)  $2.82 \times 10^1$  mm
- (3)  $2.28 \times 10^1$  mm

問題 1.3<sup>♡</sup>

- (1)  $2.11 + 1.11 = 3.22$
- (2)  $1.0 + 1.11 = 2.1$
- (3)  $2.11 - 1.11 = 1.00$
- (4)  $2.0 - 1.00 = 1.0$
- (5)  $(8.8 \times 10^{-1}) \times (8.8 \times 10^{-1}) = 7.7 \times 10^{-1}$
- (6)  $(8.8 \times 10^{-1}) \times (8 \times 10^{-1}) = 7 \times 10^{-1}$
- (7)  $1.2/3.0 = 4.0 \times 10^{-1}$
- (8)  $1.2/3 = 4 \times 10^{-1}$
- (9)  $1.0 + \pi = 1.0 + 3.14 = 4.14 = 4.1$
- (10)  $\pi - 2.00 = 3.142 - 2.00 = 1.142 = 1.14$
- (11)  $\pi \times 2.00 = 3.142 \times 2.00 = 6.284 = 6.28$
- (12)  $\pi/3.0 = 3.14/3.0 = 1.04 = 1.0$

問題 1.4<sup>♡</sup>

- (1) 横は  $1.92 \times 10^{-2}$  m, 縦は  $9.3 \times 10^{-3}$  m である。

面積は  $(1.92 \times 10^{-2} \text{ m}) \cdot (9.3 \times 10^{-3} \text{ m}) = 1.78 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  より、有効桁を考慮して  $1.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  である。

(2) 横は  $5.32 \times 10^{-2} \text{ m}$ 、縦は  $1.30 \times 10^{-2} \text{ m}$  である。

面積は  $(5.32 \times 10^{-2} \text{ m}) \cdot (1.30 \times 10^{-2} \text{ m}) = 6.916 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  より、有効桁を考慮して  $6.92 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  である。

問題 1.5<sup>♡</sup>  $\alpha$  を無次元の数とすると、

注 1 左の  $T$  は斜体である点に注意。この  $T$  は変数を表している。

$$T = \alpha m^x k^y g^z \quad \text{注 1}$$

であるから、

注 2 左の  $T$  は立体である点に注意。この  $T$  は時間の次元を表している。

$$T = M^x (MT^{-2})^y (LT^{-2})^z = L^z M^{x+y} T^{-2y-2z} \quad \text{注 2}$$

でなければならない。したがって、

$$z = 0, \quad x + y = 0, \quad -2y - 2z = 1$$

である。解くと、

$$z = 0, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{2}$$

となる。ゆえに、

$$T = \alpha \sqrt{\frac{m}{k}}$$

が得られる。

問題 1.6 平均を計算すると 10.55 で、有効数字を考慮すると、このさいころの 1 辺の長さの測定値の平均値は 10.6 mm である。

標準偏差を計算すると、0.084 mm である。有効桁を考慮すると 0.1 mm が標準偏差になる。

また、これらよりさいころの 1 辺の長さの測定値は  $10.6 \pm 0.1 \text{ mm}$  と表すことができる。

## 第 2 章

問題 2.1<sup>♡</sup>

$$(1) \frac{(9.0 \times 10^1 \text{ km/h}) \cdot (1000 \text{ m/km})}{(60 \text{ min/h}) \cdot (60 \text{ s/min})} = 2.5 \times 10 \text{ m/s.}$$

$$(2) \frac{(1.0 \text{ m/s}) \cdot (60 \text{ s/min}) \cdot (60 \text{ min/h})}{1000 \text{ m/km}} = 3.6 \text{ km/h.}$$

問題 2.2<sup>♡</sup>

(1) A 点の座標は  $7.2 \times 10^4 \text{ m}$ 、それを 1 時間 ( $3.6 \times 10^3 \text{ s}$ ) かけて動いたので、平均の速度は  $2.0 \times 10^1 \text{ m/s}$  である。

- (2) B 点の座標は  $-3.6 \times 10^4$  m である. 同様に考えて,  $-1.0 \times 10^1$  m/s である.
- (3) 出発点に戻ってきたので, 変位は 0.0 m. したがって, 速度は 0.0 m/s である.

問題 2.3<sup>♡</sup>

- (1)  $\frac{(12 \text{ m/s}) - (0 \text{ m/s})}{10 \text{ s}} = 1.2 \text{ m/s}^2$
- (2)  $\frac{(0 \text{ m/s}) - (12 \text{ m/s})}{5 \text{ s}} = -2.4 \text{ m/s}^2$
- (3)  $\left(\frac{1}{2}(1.2 \text{ m/s}^2) \cdot (10 \text{ s})^2\right) + \left((12 \text{ m/s}) \cdot 5.0 \text{ s} - \frac{1}{2}(2.4 \text{ m/s}^2) \cdot (5.0 \text{ s})^2\right)$   
 $= 90 \text{ m}$

問題 2.4<sup>♡</sup>

- (1) 一定の加速度  $a$  で加速して速度 0 から  $v$  に達するまでの時間は, 加速度の定義  $\frac{v-0}{t_0} = a$  より  $t_0 = \frac{v}{a}$  となる.
- (2)  $v^2 - 0 = 2aL$  より注3,  $L = \frac{v^2}{2a}$  である.
- (3) 列車の真ん中が A 点を通過するときの速度を  $v_m$  とすると,  $v_m^2 - 0 = 2a(L/2)$  である. したがって,  $v_m = \sqrt{La}$  となる.  $L$  に上で求めた値を代入すると,  $v_m = \sqrt{\frac{v^2}{2a}a} = \frac{v}{\sqrt{2}}$  となる.

注3  $v_2^2 - v_1^2 = 2ax$  を使う.

問題 2.5<sup>♡</sup>

- (1)  $(10 \text{ m/s})^2 - (0 \text{ m/s})^2 = 2a \cdot 100 \text{ m}$  より,  $a = 5.0 \times 10^{-1} \text{ m/s}^2$  である.
- (2) A が出発してから, B に追いつくまでの時間を  $t_0$  とすると,  $(10 \text{ m/s}) \cdot t_0 = \frac{1}{2}(0.5 \text{ m/s}^2) \cdot t_0^2$  より,  $t_0 = 4 \times 10^1 \text{ s}$  とわかる. 追いつくまでに自動車 B (A も) 走る距離は,  $(10 \text{ m/s}) \cdot 40 \text{ s} = 4.0 \times 10^2 \text{ m}$  であることがわかる.

問題 2.6<sup>♡</sup>

- (1)

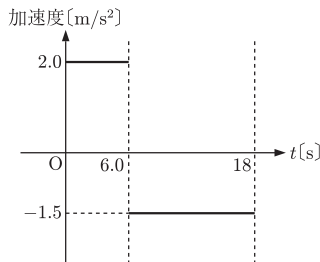


図1 1次元運動を行う質点の加速度ベクトルの時間変化.

- (2) 速度がゼロになる時刻は  $t = 0.0 \text{ s}$  と  $14.0 \text{ s}$  である.  $t = 0.0 \text{ s}$  から  $t = 14.0 \text{ s}$  と  $t = 14.0 \text{ s}$  から  $t = 18.0 \text{ s}$  に分けて考えて,  

$$\frac{1}{2}(12 \times 14) + \frac{1}{2}(4 \times 6) = 96 \text{ m}.$$
- (3) 
$$\frac{1}{2}(12 \times 14) - \frac{1}{2}(4 \times 6) = 72 \text{ m}.$$
- (4)  $0 \leq t \leq 6 \text{ s}$  の場合,  $x = t^2$ .  
 $6 \leq t \leq 18 \text{ s}$  の場合,  $x = \frac{1}{2}(-1.5)(t-6)^2 + 12(t-6) + 36$  である.  
 整理すると,  $x = -\frac{3}{4}t^2 + 21t - 63$  となる.

問題 2.7<sup>♡</sup> 重力加速度  $g$  の下での運動を考える.

$$(1) \quad h_A(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$$

$$v_A(t) = -gt$$

$$a_A(t) = -g$$

$$(2) \quad h_B(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

$$v_B(t) = -gt + v_0$$

$$a_B(t) = -g$$

$$(3) \quad h_A(t) = h_B(t)$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 + h_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

$$h_0 = v_0t$$

より, 衝突する時刻は  $\frac{h_0}{v_0}$  となる.

- (4) 高度差は  $h_0$  で質点 A と B の相対速度は, 上の考察より  $v_0$  である.  
 したがって, 衝突する時刻は  $\frac{h_0}{v_0}$  となる.

問題 2.8

$$(1) \quad \int_1^2 1 dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} (1) \frac{1}{N}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \right) N$$

$$= 1$$

$$(2) \quad \int_1^2 x^2 dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{i}{N} \right)^2 \frac{1}{N}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( N - 1 + 2 \frac{1}{N} \frac{(N-1)N}{2} + \frac{1}{N^2} \frac{(N-1)N(-1+2N)}{6} \right) \frac{1}{N}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + 1 + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

## 問題 2.9

$$(1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = a_0 t + v_0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a_0$$

$$(2) \quad \frac{dx(t)}{dt} = r_0 \omega \cos \omega t$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -r_0 \omega^2 \sin \omega t$$

$$(3) \quad \frac{dx(t)}{dt} = -r_0 \gamma_0 e^{-\gamma_0 t}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = r_0 \gamma_0^2 e^{-\gamma_0 t}$$

## 問題 2.10

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{df(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x + \Delta x)}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x\Delta x} \\
 &= -\frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

## 問題 2.11

$$(1) \quad \frac{d\pi x^2}{dx} = 2\pi x$$

$$(2) \quad \frac{d\frac{4\pi}{3}x^3}{dx} = 4\pi x^2$$

$$(3) \quad \frac{d\frac{1}{1+x}}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$(4) \frac{d}{dx} \frac{1}{1+x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$(5) \frac{de^{1+x}}{dx} = e^{1+x}$$

$$(6) \frac{de^{x^2}}{dx} = 2xe^{x^2}$$

$$(7) \frac{d \sin x e^x}{dx} = (\sin x + \cos x) e^x$$

$$(8) \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{ただし, } -\pi/2 < x < \pi/2$$

$$(9) \frac{d \frac{\sin x}{x}}{dx} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \quad \text{ただし, } x \neq 0$$

注4 複数の変数の関数, 例えば  $f(x, t)$ , に対して, そのうちのある変数に関してだけ微分する (他の変数は一定とする) ことを偏微分といい, 記号  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$  のように表す. ここでは,  $x$  に関してだけ微分している.

問題 2.12 注4

$$(1) \frac{dh(t)}{dt} = -gt + v_0$$

$$(2) \frac{dy(t)}{dt} = r_0 \omega \cos \omega t$$

$$(3) \frac{dx(t)}{dt} = -r_0 \omega \sin \omega t$$

$$(4) \frac{d\phi(r)}{dt} = 0$$

$$(5) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{2\pi A}{\lambda} \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

$$(6) \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{2\pi A}{T} \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

問題 2.13 積分定数を  $C$  とする.

$$(1) \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$(2) \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$(3) \int \sin^3 x \, dx = -\frac{3 \cos x}{4} + \frac{1}{12} \cos 3x + C = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

$$(4) \int \cos^3 x \, dx = \frac{3 \sin x}{4} + \frac{1}{12} \sin 3x + C = -\frac{1}{3} \sin^3 x + \sin x + C$$

$$(5) \int x e^{-x^2} \, dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C$$

$$(6) \int \frac{1}{x^2-1} \, dx = \frac{1}{2} \log(1-x) - \frac{1}{2} \log(1+x) + C$$

$$(7) \int \frac{1}{x^2-5x+6} \, dx = -\log(2-x) + \log(3-x) + C$$

(8) 少し計算がややこしいので, 式変換の詳細を示す.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{A+x^2}} &= \int \frac{1}{\sqrt{A}\sqrt{1+\tan^2\theta}} \frac{\sqrt{A}}{\cos^2\theta} d\theta \quad : x = \sqrt{A} \tan \theta \text{ とおく} \\ &= \int \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} d\theta = \int \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{dt}{1-t^2} \quad : t = \sin \theta \text{ とおく} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int \frac{dt}{1+t} + \frac{dt}{1-t} \right) = \frac{1}{2} (\log(1+t) - \log(1-t))
 \end{aligned}$$

$x = \sqrt{A} \tan \theta$ ,  $t = \sin \theta$  なので,  $x = \sqrt{A} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$  である.  $t$  につ

いて解くと  $t = \frac{x}{\sqrt{A+x^2}}$  である ( $x, \theta, t$  は簡単のために正の場合に限定した). したがって,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A+x^2}} = \frac{1}{2} \left( \log\left(1 + \frac{x}{\sqrt{A+x^2}}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{\sqrt{A+x^2}}\right) \right) + C$$

となる.

### 問題 2.14

$$(1) \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi$$

$$(3) \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{4} \quad \text{注 5}$$

$$(4) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

注 5 半径  $a$  の円の面積の  $1/4$  であることに注意.

問題 2.15  $\spadesuit$  求めるべき積分が存在するとして, その値を  $I$  とおく.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\
 I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy
 \end{aligned}$$

ここで,  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  の変数変換を行うと, 積分範囲は  $r: 0 \sim \infty, \theta: 0 \sim 2\pi$  となる. また, 微小面積要素  $dx dy$  は  $r d\theta dr$  に変換される.

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \int_0^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \\
 &= 2\pi \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi
 \end{aligned}$$

すなわち,  $I^2 = \pi$ . よって, 求める定積分の値は  $\sqrt{\pi}$  である.

## 第3章

### 問題 3.1 $\heartsuit$

$$(1) (5.0 \text{ m/s}) + (1.0 \text{ m/s}) = 6.0 \text{ m/s.}$$

- (2)  $(1.0 \times 10^2 \text{ m}) / (6.0 \text{ m/s}) = 1.7 \times 10^1 \text{ s}$   
 (3)  $(6.0 \text{ m/s}) - (-1.0 \text{ m/s}) = 7.0 \text{ m/s}$ .  
 (4)  $(-5.0 \text{ m/s}) + (1.0 \text{ m/s}) = -4.0 \text{ m/s}$ .  
 (5)  $(-1.0 \times 10^2 \text{ m}) / (-4.0 \text{ m/s}) = 2.5 \times 10^1 \text{ s}$   
 (6)  $(-4.0 \text{ m/s}) - (-1.0 \text{ m/s}) = -3.0 \text{ m/s}$ .

## 問題 3.2♡

- (1) 電車  $(2.50 \times 10^1, 0.0, 0.0) \text{ m/s}$ , 自動車  $(0.0, 1.00 \times 10^1, 0.0) \text{ m/s}$ , 雨粒  $(0.0, 0.0, -2.0) \text{ m/s}$ .  
 (2)  $(-2.50 \times 10^1, 1.00 \times 10^1, 0.0) \text{ m/s}$ .  
 (3)  $(-2.50 \times 10^1, 0.0, -2.0) \text{ m/s}$ .  
 (4)  $(0.0, -1.00 \times 10^1, -2.0) \text{ m/s}$ .

## 問題 3.3♡

- (1) 地上から見たボールの鉛直方向の初速度を  $v_0$  とする. 4.0 s 後に気球とすれ違うので,

$$(4.4 \text{ m/s}) \cdot 4.0 \text{ s} = -\frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2) \cdot (4.0 \text{ s})^2 + v_0 \cdot 4.0 \text{ s}$$

でなければならない. これより,  $v_0 = 2.4 \times 10 \text{ m/s}$  とわかる.

- (2) ボールの 4.0 s 後の速度は  $(-9.8 \text{ m/s}^2) \cdot 4.0 \text{ s} + (2.4 \times 10 \text{ m/s}) = -15.2 \text{ m/s}$ . 気球は 4.4 m/s なので, 相対速度は  $(-15.2 \text{ m/s}) - (4.4 \text{ m/s}) = -19.6 \text{ m/s}$ . 有効桁を 2 桁として  $-2.0 \times 10 \text{ m/s}$  とする.  
 (3) ボールは投げ上げられてから 6.0 s 後に地面に落ちた. 投げ上げられた地点から 6.0 s 間の変位は,  $-\frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2) \cdot (6.0 \text{ s})^2 + (24 \text{ m/s}) \cdot 6.0 \text{ s} = -32.4 \text{ m}$ . 有効桁を 2 桁として高さ  $3.2 \times 10 \text{ m}$  とする.

問題 3.4♡ 時速  $1.60 \times 10^2$  キロは  $44.4 \text{ m/s}$  である.

- (1) ホームプレートまで到達する時間は  $0.415 \text{ s}$  である. その間に  $\frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2) \cdot (0.415 \text{ s})^2 = 0.843 \text{ m}$  である. 有効桁を考えると  $0.84 \text{ m}$  落ちることがわかる.  
 (2) 本文より角度  $45$  度で投げ上げた時にもっとも遠くに到達し, それは  $\frac{(44.4 \text{ m/s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2} = 201 \text{ m} = 2.0 \times 10^2 \text{ m}$  である.

問題 3.5♡ 小球が標的に到達するまでの時刻は  $\frac{L}{v_0 \cos \theta_0}$  である. その時に小球の高さが  $h$  になれば, 小球は標的に当たることになる.

$$(1) \quad -\frac{1}{2}g \left( \frac{L}{v_0 \cos \theta_0} \right)^2 + v_0 \sin \theta_0 \left( \frac{L}{v_0 \cos \theta_0} \right) = h$$



となれば、小球は標的に当たる。これを解くと、

$$v_0 = L\sqrt{\frac{g}{2\cos\theta_0(L\sin\theta_0 - h\cos\theta_0)}}$$

が得られる。

- (2)  $\sqrt{\cdot}$ の中は正でないといけない。すなわち、 $L\sin\theta_0 - h\cos\theta_0 > 0$ を満たす必要がある。整理すると、

$$\tan\theta_0 > \frac{h}{L}$$

が条件である。

### 問題 3.6<sup>♡</sup>

(1) 
$$\frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2) \cdot t^2 = 4.9 \times 10^2 \text{ m}$$

より、 $t = 1.0 \times 10 \text{ s}$ である。

- (2) 時速 90 キロは 25 m/s であるので、飛行機が飛ぶ距離は  $2.5 \times 10^2 \text{ m}$  である。
- (3) 前問より、 $2.5 \times 10^2 \text{ m}$  手前で落とせば良い。
- (4) 鉛直下方の等加速度運動である。
- (5) 水平方向の速度は 25 m/s で鉛直方向は  $(9.8 \text{ m/s}^2) \cdot 10 \text{ s}$  である。したがって、 $\sqrt{(25 \text{ m/s})^2 + (98 \text{ m/s})^2} = 101 \text{ m/s} = 1.0 \times 10^2 \text{ m/s}$  である。

### 問題 3.7<sup>♡</sup>

- (1)  $(L\cos\theta, L\sin\theta)$  である。
- (2)  $t_0 = \frac{L\cos\theta}{v_0\cos\theta} = \frac{L}{v_0}$  である。
- (3) 小球 P の位置は、

$$\left( L\cos\theta, -\frac{1}{2}g\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 + L\sin\theta \right)$$

一方、小球 Q の位置は、

$$\begin{aligned} & \left( v_0\cos\theta\frac{L}{v_0}, -\frac{1}{2}g\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 + v_0\sin\theta\frac{L}{v_0} \right) \\ &= \left( L\cos\theta, -\frac{1}{2}g\left(\frac{L}{v_0}\right)^2 + L\sin\theta \right) \end{aligned}$$

であり、両者は一致する。

### 問題 3.8

- (1) 初速度は  $(v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$  であり、 $y$  軸の負の方向に大きさ  $g$  の加速

度があるので、時刻  $t$  における速度は

$$(v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta - gt)$$

である。

- (2) これを時間で積分すると

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) - \vec{r}(0) &= \int_0^t (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta - gt) dt \\ &= \left( v_0 t \cos \theta, v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \right) \end{aligned}$$

時刻  $t = 0$  における座標は  $\vec{r}(0) = (0, H)$  なので、

$$\vec{r}(t) = \left( v_0 t \cos \theta, v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 + H \right)$$

- (3) 物体が最高点に達するときには、 $y$  方向の速度はゼロである。したがって、その時刻  $t_h$  は

$$0 \text{ m/s} = v_0 \sin \theta - g t_h$$

をみたら、この時刻  $t_h = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$  を  $\vec{r}(t)$  の表式に代入すると、

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_h) &= \left( v_0 t_h \cos \theta, v_0 \sin \theta t_h - \frac{1}{2} g t_h^2 \right) \\ &= \left( \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta, H + \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} \right) \end{aligned}$$

となる。

## 第 4 章

問題 4.1<sup>♡</sup> ( ) でくくられたペアの力が釣り合っている。

- (1) (重力, 面からの垂直抗力)
- (2) (重力, 面からの垂直抗力)
- (3) (重力, 面からの垂直抗力), (手で物体を押す力, 摩擦力)
- (4) (重力の面に垂直な成分, 面からの垂直抗力), (重力の面に平行な成分, 摩擦力)
- (5) (重力, バネが物体を引く力)

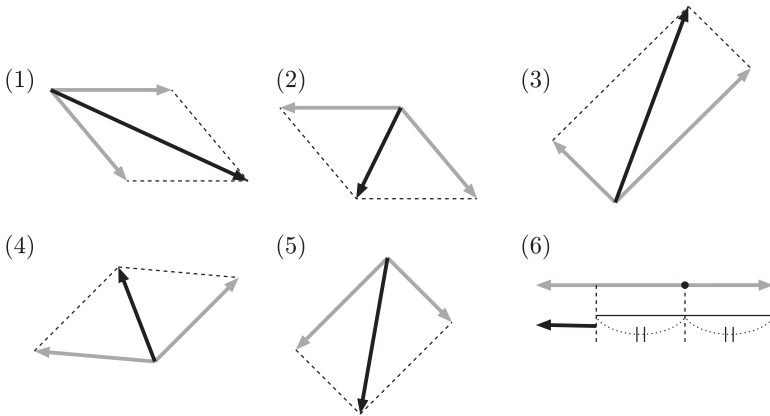
問題 4.2<sup>♡</sup>

- (1) テーブルが本を押す力
- (2) 月が地球を引きつける万有引力
- (3) ボールが壁に与える力
- (4) 振り子のおもりが糸を引っ張る力
- (5) 物体がばねが引く力

問題 4.3♡

- (1) 2本のバネはそれぞれ同じ長さだけ伸びるので、実効的なバネ定数は半分になる。すなわち、 $k = 5.00 \times 10^3 \text{ N/m}$ となる。
- (2) 2本のバネにかかる力は半分になるので、実効的なバネ定数は2倍になる。すなわち、 $k = 2.00 \times 10^4 \text{ N/m}$ となる。
- (3) バネが半分の長さになっているので、のびは半分にしかならない。すなわち、 $k = 2.00 \times 10^4 \text{ N/m}$ となる。

問題 4.4♡



問題 4.5♡

- (1)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (1, 2, 0) \text{ N}$
- (2)  $\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0, 2, 3) \text{ N}$
- (3)  $\vec{F}_3 + \vec{F}_1 = (1, 0, 3) \text{ N}$
- (4)  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1, 2, 3) \text{ N}$
- (5)  $\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (1, -2, 0) \text{ N}$
- (6)  $-\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0, -2, 3) \text{ N}$
- (7)  $-\vec{F}_3 - \vec{F}_1 = (-1, 0, -3) \text{ N}$
- (8)  $\vec{F}_1 - \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1, -2, 3) \text{ N}$

問題 4.6♡ 力  $\vec{F}$  は以下のように分解することができる。

$$\vec{F} = (\vec{F} \cdot \vec{f}_1)\vec{f}_1 + (\vec{F} \cdot \vec{f}_2)\vec{f}_2 + (\vec{F} \cdot \vec{f}_3)\vec{f}_3$$

- (1)  $\vec{F} = \vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 + 3\vec{f}_3$
- (2)  $\vec{F} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{f}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{f}_2 + 3\vec{f}_3$
- (3)  $\vec{F} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{f}_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{f}_2 + 3\vec{f}_3$

問題 4.7<sup>♡</sup>

$$(1) \frac{\vec{F}_1}{|\vec{F}_1|} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$(2) \frac{\vec{F}_2}{|\vec{F}_2|} = \left( \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

$$(3) \frac{\vec{F}_3}{|\vec{F}_3|} = (0, 0, 1)$$

問題 4.8<sup>♡</sup>

- (1)  $T + N - 500 \text{ N} = 0 \text{ N}$
- (2)  $T + R - N - 200 \text{ N} = 0 \text{ N}$
- (3) 上の二つの式から  $N$  を消去して,  $2T + R - 700 \text{ N} = 0 \text{ N}$  が得られる.
- (4)  $R = 0$  のときに, 台は地面から離れる. したがって,  $T = 350 \text{ N}$  の時に台は地面から離れる.

## 第 5 章

問題 5.1<sup>♡</sup> 物体に対する運動方程式を考えよう. B の下端に加える力を  $F_B$ , A の下端に加わる力を  $F_A$  とする. 物体の運動方程式はその加速度を  $a$  として,

$$F_B - F_A + Mg = Ma$$

である. 変形すると,

$$F_B - F_A = M(a - g)$$

注 6 答えは必ずしも一つだけとは限らないことに注意. となる.  $a$  と  $g$  の大小関係に応じて 2 通りの場合が考えられる<sup>注 6</sup>.

- (1) ゆっくり引っ張る場合  
すなわち  $a < g$  の場合には,

$$F_B < F_A$$

となり, B に比べて A の方が伸びは大きいと期待される. したがって, B が切れる前に A が切れると考えられる.

- (2) 素早く引っ張る場合  
すなわち  $a > g$  の場合には,

$$F_B > F_A$$

となり, A に比べて B の方が伸びは大きいと期待される. したがって, A が切れる前に B が切れると考えられる.

問題 5.2<sup>♡</sup> 5.0 kg の物体にはたらく糸の張力の大きさを  $T$  とする. また,

2.0 kg の物体にはたらく力は重力と糸の張力なので、加速度の大きさを  $a$  とすると、

$$T = (5.0 \text{ kg}) \cdot a$$

$$(9.8 \text{ m/s}^2) \cdot 2.0 \text{ kg} - T = (2.0 \text{ kg}) \cdot a$$

となる。これらより、 $a = 2.8 \text{ m/s}^2$  と  $T = 1.4 \times 10 \text{ N}$  が得られる。

### 問題 5.3<sup>♡</sup>

- (1) 垂直抗力  $N = Mg \cos \theta$  である。力の釣り合いは、摩擦力の大きさを  $F_f$  として、

$$mg + F_f = Mg \sin \theta$$

である。ただし、 $F_f \leq \mu Mg \cos \theta$  である。

- (2) 滑り始める時には、 $mg + \mu Mg \cos \theta_0 = Mg \sin \theta_0$  である。したがって、

$$\mu = \tan \theta_0 - \frac{m}{M \cos \theta_0}$$

となる。

- (3) 物体 A に対する運動方程式は、

$$Ma = Mg \sin \theta_0 - \mu' Mg \cos \theta_0 - T$$

で、物体 B に対する運動方程式は、

$$ma = T - mg$$

である。 $T$  を消去すると、

$$(M + m)a = (M \sin \theta_0 - \mu' M \cos \theta_0 - m)g$$

したがって、

$$a = \frac{(M \sin \theta_0 - \mu' M \cos \theta_0 - m)g}{M + m}$$

となる。

- (4) 求める速度の大きさを  $v$  とすると  $v^2 - 0 = 2aL$  より、

$$v = \sqrt{\frac{2gL(M \sin \theta_0 - \mu' M \cos \theta_0 - m)}{M + m}}$$

となる。

問題 5.4<sup>♡</sup> 張力の大きさを  $T$ 、加速度の大きさを  $a$  として物体 1 と 2 の運動方程式を立てる。ただし、物体 1 については下向きを正に、物体 2 については上向きを正にとる。

$$m_1 g - T = m_1 a$$

$$T - m_2g = m_2a$$

となる。解くと、

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$$

が得られる。

### 問題 5.5♡

- (1) 慣性力ははたっていない。小球の重力をひもの張力で支える必要がある。すなわち、 $mg$  となる。
- (2) 慣性力がはたらないのは同じで、 $mg$ 。
- (3) 慣性力がはたらないのは同じで、 $mg$ 。
- (4) 上向きに加速しているので、 $m(g + a_0)$  の張力がはたっている。
- (5) 下向きに加速しているので、 $m(g - a_0)$  の張力がはたっている。
- (6) 手は小球が落ちるより速く下方に動いているので、張力は  $0\text{ N}$  である。

### 問題 5.6♡

- (1) 前問と同様に考えて、バネには下向きに力  $mg$  がはたっている。したがって、バネの伸びは  $\frac{mg}{k}$  である。
- (2) 同様に、バネの伸びは  $\frac{mg}{k}$  である。
- (3) 同様に、バネの伸びは  $\frac{mg}{k}$  である。
- (4) バネに作用している力は  $m(g + a_0)$  なので、伸びは  $\frac{m(g + a_0)}{k}$  である。
- (5) バネに作用している力は  $m(g - a_0)$  なので、伸びは  $\frac{m(g - a_0)}{k}$  である。
- (6) バネに作用している力は  $m(g - a_0)$  なので、伸びは  $\frac{m(g - a_0)}{k}$  である。すなわち、バネは  $\frac{m(a_0 - g)}{k}$  だけ縮む。 $a_0 > g$  に注意。

### 問題 5.7♡

$$(1) \quad M \frac{d^2 X}{dt^2} = F - F_f$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_f$$

$X - x = x_0$  と一定なので、上の式より、

$$(M + m) \frac{d^2 X}{dt^2} = F$$

が得られる。したがって、

$$X(t) = \frac{1}{2} \frac{F}{M+m} t^2$$

となる。

$$(2) \quad \begin{aligned} M \frac{d^2 X}{dt^2} &= F - \mu' mg \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \mu' mg \end{aligned}$$

である。それぞれを解くと、

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{2} \frac{F - \mu' mg}{M} t^2 \\ x(t) &= \frac{1}{2} \mu' g t^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(3) \quad \begin{aligned} x'(t) = x(t) - X(t) &= \frac{1}{2} \left( \mu' g - \frac{F - \mu' mg}{M} \right) t^2 \\ &= -\frac{1}{2M} (F - \mu'(M+m)g) t^2 \end{aligned}$$

となる。

### 問題 5.8<sup>♡</sup>

- (1) 加速度を  $a$  とすると、運動方程式は  $F = (m+M)a$ 。したがって、  
 $a = \frac{F}{m+M}$  となる。  
 (2) 物体 A と B それぞれに運動方程式をたてると、

$$\begin{aligned} F - \mu mg &= ma_A \\ \mu mg &= Ma_B \end{aligned}$$

である。ただし、滑り出す瞬間は  $a_A = a_B$  であるから、

$$F - \mu mg = m \frac{\mu mg}{M}$$

より、

$$F = \frac{m(m+M)}{M} \mu g$$

のときに滑り始める。

- (3) 一旦滑り始めると、 $a_A \neq a_B$  であり、それぞれの加速度は

$$\begin{aligned} a_A &= \frac{F}{m} - \mu' g \\ a_B &= \mu' \frac{m}{M} g \end{aligned}$$

となる。動摩擦係数  $\mu'$  を用いる必要があることに注意。

問題 5.9<sup>♡</sup>

- (1) 小物体にはたらく力は板との摩擦力である。小物体の進行方向とは逆向きの左向きに大きさ  $\mu' mg$  の摩擦力がはたらくので、小物体の加速度は  $\mu' g$  である。
- (2) 板には小物体にはたらく摩擦力の反作用がはたらく。すなわち、右向きに大きさ  $\mu' mg$  の摩擦力がはたらく。したがって、板の加速度は右向きに  $\mu' \frac{m}{M} g$  となる。
- (3) 小物体の速度を  $v(t)$ 、板の速度を  $V(t)$  とすると、

$$v(t) = v_0 - \mu' g t$$

$$V(t) = (0 \text{ m/s}) + \mu' \frac{m}{M} g t$$

である。この  $v(t) = V(t)$  となる  $t$  を求めれば良い。すなわち、 $\frac{v_0 M}{\mu'(m+M)g}$  が得られる。

注 7 運動量保存則を用いると簡単に結果が得られる。

- (4) 上で求めた時間を代入して整理すると注 7,  $\frac{m}{m+M} v_0$  となる。

問題 5.10<sup>♡</sup> 物体 A と B が離れる前の加速度を  $a$  とする。また、物体 A と B の間にはたらく力の大きさを  $f$  とする。

- (1) ばねの伸びが  $x$  (ただし,  $x < 0 \text{ m}$ ) のときの運動方程式を立てると、

$$-kx - f = Ma$$

$$f = ma$$

である。  $a$  を消去すると、

$$-kx = \frac{m+M}{m} f$$

となる。  $f = 0$  のときに物体 A と B は離れる。それは、  $x = 0 \text{ m}$ 、すなわちばねが自然長のときである。

- (2) ばねの伸びが  $x$  (ただし,  $x < 0 \text{ m}$ ) のときの運動方程式を立てる。ただし、物体 A にはたらく摩擦力を考慮する。

$$-kx - f - \mu' Mg = Ma$$

$$f = ma$$

である。  $a$  を消去すると、

$$-kx - f - \mu' Mg = \frac{M}{m} f$$

となる。  $f = 0$  のときに物体 A と B は離れる。それは、  $x = -\frac{\mu' Mg}{k}$

のとき、すなわち  $\frac{\mu' Mg}{k}$  だけ縮んでいるときである。  $\mu' = 0$  を代入すると、摩擦がない 1. の場合も含んでいることがわかる。



## 問題 5.11

$$(1) \quad m \frac{dv}{dt} = -bv$$

$$(2) \quad -\frac{m}{b} \frac{1}{v/v_0} \frac{d(v/v_0)}{dt} = 1$$

を  $t$  で積分すると

$$-\frac{m}{b} \ln(v/v_0) = t + c$$

となり,  $t = 0$  s で  $v = v_0$  なので積分定数  $c = 0$  s であり,

$$v = v_0 e^{-bt/m}$$

となる.

(3)  $v(t)$  を  $t$  で積分すると,

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) &= \int_0^t v_0 e^{-bt/m} dt = \left[ -\frac{m}{b} v_0 e^{-bt/m} \right]_0^t \\ &= \frac{m}{b} v_0 - \frac{m}{b} v_0 e^{-bt/m} \\ &= \frac{m}{b} v_0 (1 - e^{-bt/m}) \end{aligned}$$

となる. ここで,  $x(0) = 0$  m なので,

$$x(t) = \frac{m}{b} v_0 (1 - e^{-bt/m})$$

である.

(4)  $t \rightarrow \infty$  における  $x$  座標が求めるものである. したがって, 到達する点の  $x$  座標は  $\frac{mv_0}{b}$  である.

## 第6章

問題 6.1<sup>♡</sup> 波1と波2の山と山(谷と谷でもOK)の間の時間差を  $\Delta t$  とする.

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$$

である. ここで,  $T$  は周期である.

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} = 2\pi f \Delta t = \omega \Delta t$$

ここで,  $f$  は周波数である.

特に(1)の場合は,  $\Delta t = T/4$  である. したがって, 位相差は  $2\pi \frac{T/4}{T} = \pi/2$  となる.

問題 6.2<sup>♡</sup>

円運動における向心力  $F$ , 速さ  $v$ , 半径  $r$ , そして角速度  $\omega$  の間の関係は

$$F = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

であることを思い出すこと.

- (1) 時速 90 キロは 25 m/s なので,

$$F = \frac{100 \text{ kg} \cdot (25 \text{ m/s})^2}{100 \text{ m}} = 625 \text{ N} = 6.3 \times 10^2 \text{ N}$$

- (2) 周期が 20 s なので, 回転角速度は  $2\pi/20 \text{ rad/s}$  である.

$$F = 100 \text{ kg} \cdot 50 \text{ m} \cdot (2\pi/20 \text{ rad/s})^2 = 493 \text{ N} = 4.9 \times 10^2 \text{ N}$$

- (3) 
$$900 \text{ N} = \frac{100 \text{ kg} \cdot v^2}{50 \text{ m}}$$

より,  $v = 21.2 \text{ m/s} = 2.1 \times 10^1 \text{ m/s}$  である.

- (4) 
$$1000 \text{ N} = \frac{100 \text{ kg} \cdot (30 \text{ m/s})^2}{r}$$

より,  $r = 90 \text{ m} = 9.0 \times 10^1 \text{ m}$  である.

問題 6.3<sup>♡</sup> ばねの伸びを  $x$  として, 遠心力とばねの力がつりあいを考える.

$$m(L+x)\omega^2 = kx$$

より,

$$x = \frac{mL\omega^2}{k - m\omega^2}$$

が得られる.

問題 6.4<sup>♡</sup> 軌道の一番高いところでの力のつりあいをバイクに乗っている人から見ると遠心力 (見かけの力), 重力, 軌道からバイクに作用する垂直抗力がつりあっている. 式であらわすと,

$$m \frac{v^2}{r_0} - mg - N = 0 \text{ N}$$

ここで  $N$  は垂直抗力で正またはゼロである. したがって,

$$v \geq \sqrt{gr_0}$$

である.

問題 6.5<sup>♡</sup>

- (1) ターンテーブルに乗った人が見た場合, すべりだす直前の力のつりあいは,

$$mr_0\omega^2 - \mu mg = 0 \text{ N}$$

したがって、すべりだすときの回転角速度は

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{r_0}}$$

となる。

- (2) 物体がすべりだすのは、傾いたターンテーブルで物体が一番下がった位置にくるときである。そのときの力のつりあいを考えると、

$$mr_0\omega^2 + mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta = 0 \text{ N}$$

である。したがって、

$$\omega = \sqrt{\frac{(\mu \cos \theta - \sin \theta)g}{r_0}}$$

となる。

### 問題 6.6<sup>♡</sup>

- (1)

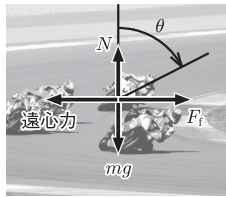


図2 バイクの運転者から見るバイクにはたらく力。

運転者が見るバイクにはたらく力は、重力、路面からバイクに作用する垂直抗力  $N$ 、遠心力、摩擦力  $F_f$  である。

$$mg - N = 0 \text{ N}$$

$$F_f - m \frac{v^2}{R} = 0 \text{ N}$$

- (2) バイクが以下の角度で傾いていないと運転者にはシートからはみ出すような力がかかり、スムーズにカーブを回ることができない。

$$\tan \theta = \frac{mv^2/R}{mg} = \frac{v^2}{Rg}$$

- (3)  $F_f \leq \mu N$  でなければならない。すなわち、

$$m \frac{v^2}{R} \leq \mu mg$$

である。整理すると、

$$v \leq \sqrt{\mu Rg}$$

である。したがって、最大の  $v$  は  $\sqrt{\mu Rg}$  となる。F1カーのタイヤの摩擦係数の最大は1.6程度だそうです。

問題 6.7<sup>♡</sup>

(1) ばね定数は  $k = \frac{mg}{L/2} = \frac{2mg}{L}$  である.

(2) このときのばねの長さ  $L'$  は  $\frac{L}{\cos\theta}$  である. したがって, ばねの伸びは

$$L' - L = \frac{L}{\cos\theta} - L$$

である.

(3) ばねの伸びにばね定数をかけると, ばねの弾性力  $F$  が得られる. すなわち,

$$F = \left( \frac{L}{\cos\theta} - L \right) \frac{2mg}{L} = 2mg \left( \frac{1}{\cos\theta} - 1 \right)$$

向心力はばねの弾性力に  $\sin\theta$  を掛ければ得られる. したがって,

$$2mg \left( \frac{1}{\cos\theta} - 1 \right) \sin\theta$$

である.

(4) 回転速度  $\omega$  は向心力がばねの力で与えられることから

$$mL \tan\theta \omega^2 = 2mg \left( \frac{1}{\cos\theta} - 1 \right) \sin\theta$$

となる. したがって,

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(1 - \cos\theta)}{L}}$$

とわかる.

(5) 垂直抗力の大きさを  $N$  とすると, 以下の力のつりあいが成り立っている.

$$N + F \cos\theta - mg = 0 \text{ N}$$

したがって,

$$N = mg - F \cos\theta = mg - 2mg(1 - \cos\theta) = mg(2\cos\theta - 1)$$

(6) 前問で求めた  $N$  がゼロになると浮くので,  $\cos\theta = 1/2$  すなわち,  $\theta = 60^\circ$  のときに浮く.

問題 6.8<sup>♡</sup>

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

を思い出すこと.

(1) 周期を表す式に  $m$  は入っていないので, 変化せず. すなわち,  $T_0$  である.

(2)  $\sqrt{4} = 2$  倍になるので,  $2T_0$  である.

- (3) 周期を表す式に振幅は入っていないので、変化せず。すなわち、 $T_0$  である。
- (4)  $g \rightarrow g/6$  に変えると、 $\sqrt{6}T_0$  になる。

問題 6.9<sup>♡</sup>

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

を思い出すこと。

- (1)  $3.0 \times 10^{-1}$  m
- (2) 上の式より、 $T = 2\pi\sqrt{\frac{2 \text{ kg}}{50 \text{ N/m}}} = 1.256 \text{ s} = 1.3 \text{ s}$
- (3) 周期の逆数なので、 $f = 0.796 \text{ Hz} = 8.0 \times 10^{-1} \text{ Hz}$
- (4)  $\omega = \sqrt{(50 \text{ N/m})/(2 \text{ kg})} = 5.0 \text{ rad/s}$  である。  $v = A\omega = 0.30 \text{ m} \cdot (5.0 \text{ rad/s}) = 1.5 \text{ m/s}$
- (5)  $a = A\omega^2 = 0.30 \text{ m} \cdot (5.0 \text{ rad/s})^2 = 7.5 \text{ m/s}^2$

問題 6.10<sup>♡</sup>

- (1) 斜面からおもりにはたらく垂直抗力は  $mg \cos 30^\circ$  なので、摩擦力は  $\mu' mg \cos 30^\circ$  である。重力の斜面方向の成分は下向きに、 $mg \sin 30^\circ$  で、ばねの力は、そのときのばねの長さの  $L'$  とすると、 $-k(L - L')$  である。これらの力がつりあっているので、

$$mg \sin 30^\circ - k(L - L') - \mu' mg \cos 30^\circ = 0 \text{ N}$$

である。 $L'$  について解くと、

$$L' = L - \frac{mg}{2k} (1 - \sqrt{3}\mu')$$

となる。

- (2)  $F = mg \sin 30^\circ - k(L - L' + x) - \mu' mg \cos 30^\circ$   
 $= (mg \sin 30^\circ - k(L - L') - \mu' mg \cos 30^\circ) - kx$   
 $= -kx$

すなわち、最下点に達するまでの運動はばねの単振動の運動の一部 ( $\frac{1}{4}$  周期分) とみなすことができる。

- (3) この単振動の角振動数  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  である。一方、振幅は  $A = L - L'$  である。速さの最大値  $v$  は、 $v = A\omega$  で与えられるので、

$$\begin{aligned} v &= \frac{mg}{2k} (1 - \sqrt{3}\mu') \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{3}\mu')g}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

となる.

## 第7章

### 問題 7.1

- (1)  $(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) = 3$
- (2)  $(1, 1, 1) \cdot (-1, -1, -1) = -3$
- (3)  $(1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1) = 1$
- (4)  $(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 1) = 1$
- (5)  $(1, 1, 1) \cdot (1, 1, -1) = 1$

### 問題 7.2

- (1)  $\cos \theta = \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = 1$
- (2)  $\cos \theta = \frac{(1, 1, 1) \cdot (-1, -1, -1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -1$
- (3)  $\cos \theta = \frac{(1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$
- (4)  $\cos \theta = \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$
- (5)  $\cos \theta = \frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, -1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$

### 問題 7.3<sup>♡</sup>

- (1)  $1.0 \text{ kg} \times (9.8 \text{ m/s}^2) \times \sin 30^\circ = 4.9 \text{ N}$ .
- (2)  $4.9 \text{ N} \times 5.0 \text{ m} = 2.45 \times 10^1 \text{ J} = 2.5 \times 10^1 \text{ J}$ .
- (3)  $-1.0 \text{ kg} \times (9.8 \text{ m/s}^2) \times \sin 30^\circ \times 5.0 \text{ m} = -2.5 \times 10^1 \text{ J}$ .
- (4) 物体の高さは  $5 \text{ m} \times \sin 30^\circ = 2.5 \text{ m}$  だけ高くなっているのので,  
 $2.5 \text{ m} \times (9.8 \text{ m/s}^2) = 2.5 \times 10^1 \text{ J}$ .

### 問題 7.4<sup>♡</sup>

- (1)  $\mu'(mg - F \sin \theta) = F \cos \theta$  より,

$$F = \frac{\mu' mg}{\cos \theta + \mu' \sin \theta} = \frac{0.20 \times 1.00 \text{ kg} \times (9.8 \text{ m/s}^2)}{\sqrt{3}/2 + 0.2 \times 1/2} = 2.02 \text{ N}$$

有効桁を2桁として,  $F = 2.0 \text{ N}$ .

- (2)  $FL \cos \theta$  より,

$$2.02 \text{ N} \times (1.0 \times 10 \text{ m}) \times \sqrt{3}/2 = 1.74 \times 10 \text{ J}$$

より, 有効桁を2桁として  $1.7 \times 10 \text{ J}$ .

- (3)  $P = \frac{FL \cos \theta}{10 \text{ s}} = 1.7 \text{ W}$  である.

問題 7.5<sup>♡</sup>

重力による位置エネルギーは  $mgh$  である。ここで、 $h$  は基準点からの高さである。

- (1)  $1.0 \text{ kg} \times (9.8 \text{ m/s}^2) \times 0 \text{ m} = 0.0 \text{ J}$ .
- (2)  $1.0 \text{ kg} \times (9.8 \text{ m/s}^2) \times (-2.5 \text{ m}) = -2.45 \times 10 \text{ J} = -2.5 \times 10 \text{ J}$ .
- (3)  $1.0 \text{ kg} \times (9.8 \text{ m/s}^2) \times 0.50 \text{ m} = 4.9 \text{ J}$ .

問題 7.6<sup>♡</sup>

- (1) 鉛直方向には、高さ  $R(1 - \cos \theta)$  だけ低くなっている。したがって、重力の位置エネルギーは  $-mgR(1 - \cos \theta)$  である。
- (2) 失われた重力エネルギーが小球の運動エネルギーになるので、 $v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$  である。
- (3) 半球面に垂直な方向の力のつりあいを考える。垂直抗力の大きさを  $N$  とすると、

$$N + m \frac{v^2}{R} - mg \cos \theta = 0 \text{ N}$$

である。 $v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$  を代入すると、

$$N + mg(2 - 3 \cos \theta) = 0 \text{ N}$$

となる。

- (4) 上の式より、 $\cos \theta_0 = \frac{2}{3}$  である。
- (5) 小球は回転するので、並進運動の運動エネルギーになる位置エネルギーはなめらかな場合よりも小さい。したがって、 $\theta_0$  では、十分な遠心力が得られず、半球面から離れることはできない。 $\theta_1 > \theta_0$  である。

問題 7.7<sup>♡</sup>

- (1)  $mgR(1 - \cos \theta)$  である。
- (2) 力学的エネルギー保存の法則から、

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

したがって、

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2Rg(1 - \cos \theta)}$$

- (3) 垂直抗力を  $N$  とすると、レールに対して垂直な方向は<sup>注8</sup>

$$m \frac{v^2}{R} + mg \cos \theta - N = 0 \text{ N}$$

とつりあう。

- (4) 最上点では  $\theta = \pi$  である。また、物体が円形レールから離れていない

注8 円形レールの接線方向にはたらく力は  $-mg \sin \theta$  となる。ここで負号は力が物体が回る方向と反対方向の力で、物体を減速させることを意味する。

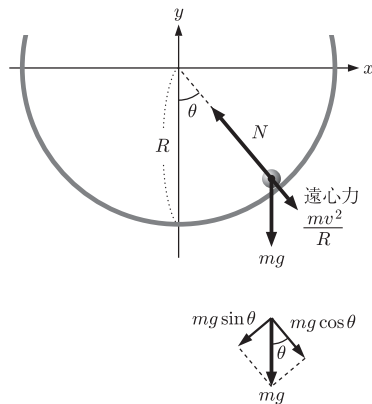


図3 物体にはたらく力のつりあい.

のならば、最初の設問から  $\theta$  をつかって  $v$  を表すことができ、

$$m \frac{1}{R} (v_0^2 - 4Rg) - mg = N \geq 0 \text{ N}$$

でなければならない。したがって、

$$v_0 \geq \sqrt{5gR}$$

でなければならない。

$$(5) \quad m \frac{v_0^2 - 2Rg(1 - \cos \frac{2\pi}{3})}{R} + mg \cos \frac{2\pi}{3} = 0 \text{ N}$$

である。したがって、 $v_0 = \sqrt{\frac{7}{2}} \sqrt{Rg}$  である。

### 問題 7.8

$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$  を使う。

(1)  $U(\vec{r}) = U_0 \frac{z}{r_0}$  となる。したがって、

$$\vec{F} = -\left( \frac{\partial U_0 z / r_0}{\partial x}, \frac{\partial U_0 z / r_0}{\partial y}, \frac{\partial U_0 z / r_0}{\partial z} \right) = \left( 0, 0, -\frac{U_0}{r_0} \right)$$

(2)  $F_x = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} = -2U_0 \frac{x}{x_0^2}$  である。同様に、 $y, z$  方向も計算して、

$$\vec{F} = -2U_0 \left( \frac{x}{x_0^2}, \frac{y}{y_0^2}, \frac{z}{z_0^2} \right)$$

となる。

(3)  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  であるから、

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}$$

また、これを使うと

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} = \frac{\partial r^{-1}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{-1}{r^2} \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$



となる。同様に、 $y, z$ 成分も計算して、

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = -U_0 r_0 \frac{(-x, -y, -z)}{r^3} = U_0 \frac{r_0 \vec{r}}{r^3}$$

となる。

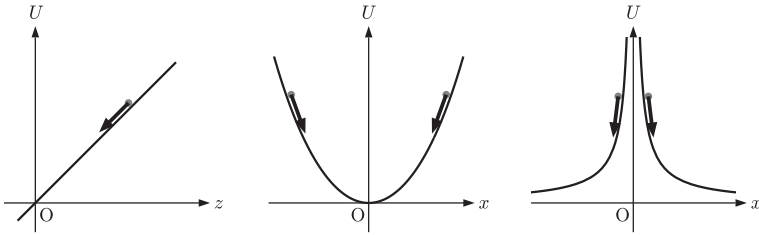


図4 ポテンシャルの概形と力がはたらく向き (参考).

問題 7.9

- (1)  $\vec{F}(\theta) = \frac{F_0}{r_0}(r_0 \sin \theta, -r_0 \cos \theta, 0 \text{ m}) = F_0(\sin \theta, -\cos \theta, 0)$
- (2)  $d\vec{r}(\theta) = (r_0 \cos(\theta + d\theta), r_0 \sin(\theta + d\theta), 0 \text{ m}) - (r_0 \cos \theta, r_0 \sin \theta, 0 \text{ m})$   
 $= (-r_0 \sin \theta d\theta, r_0 \cos \theta d\theta, 0 \text{ m})$
- (3)  $dW = \vec{F}(\theta) \cdot d\vec{r}(\theta) = -F_0 r_0 d\theta$
- (4)  $W = \int_0^{2\pi} dW = \int_0^{2\pi} -F_0 r_0 d\theta = -2\pi F_0 r_0$
- (5) 質点が出発点に戻ってきたときに、された仕事の和はゼロではないので、ポテンシャルでこの力を表すことはできない。

問題 7.10

- (1) ポテンシャルの概形は図5.

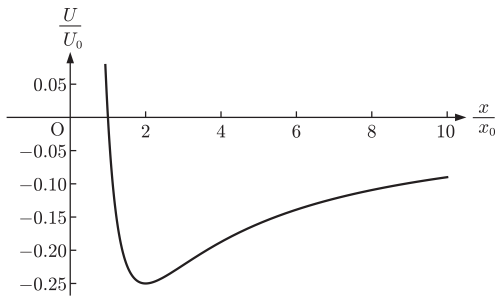


図5 ポテンシャルの概形.

- (2)  $\frac{\partial U(x)}{\partial x} = \frac{U_0 x_0}{x^2} \left(1 - \frac{2x_0}{x}\right)$

から  $x = 2x_0$  で力はゼロになる。

問題 7.11 前問より、 $x_m = 2x_0$  である。

注9  $\approx$  は近似的に等しいことを意味する.

- (1)  $x = 2x_0 + \Delta x$  とおいて,  $x = 2x_0$  近傍での  $U(x)$  の振る舞いを調べる注9.

$$\begin{aligned} U(x) &= U_0 \left( \frac{x_0^2}{(2x_0 + \Delta x)^2} - \frac{x_0}{2x_0 + \Delta x} \right) \\ &= U_0 \frac{x_0}{2x_0 + \Delta x} \left( \frac{x_0}{2x_0 + \Delta x} - 1 \right) \\ &\approx U_0 \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Delta x}{2x_0} \right) \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Delta x}{2x_0} \right) - 1 \right) \\ &= U_0 \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Delta x}{2x_0} \right) \left( -\frac{1}{2} - \frac{\Delta x}{4x_0} \right) \\ &= -U_0 \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{\Delta x}{2x_0} \right) \left( 2 + \frac{\Delta x}{x_0} \right) \\ &\approx \frac{U_0}{4} \left( -1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta x}{x_0} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

別解  $U(x_m) = -U_0 \frac{1}{4}$  である.  $x = x_m$  では前問より1次の微分係数はゼロである. 2次の微分は,

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = \frac{2U_0 x_0}{x^3} \left( -1 + \frac{3x_0}{x} \right)$$

より,  $x = x_m$  での  $\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}$  の値は,  $\frac{U_0}{8x_0^2}$  である. これらより,  $U(x)$  を  $\Delta x^2 = (x - x_m)^2$  の項までテーラー展開すると注10,

$$U(x) = U_0 \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{2!} \frac{1}{8x_0^2} \Delta x^2 \right) = \frac{U_0}{4} \left( -1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta x}{x_0} \right)^2 \right)$$

となる.

- (2)  $x = x_m + \Delta x$  とおいて,  $x = x_m$  近傍での力の  $\Delta x$  依存性を調べると,

$$-\frac{\partial U(x_m + \Delta x)}{\partial \Delta x} = -\frac{U_0}{8x_0^2} \Delta x$$

と近似できる.

- (3) 運動方程式を立てると,

$$m \frac{d^2 \Delta x}{dx^2} = -\frac{U_0}{8x_0^2} \Delta x$$

となる. したがって, この単振動の角周波数は  $\omega = \frac{\sqrt{2U_0/m}}{4x_0}$  である.

注10 関数  $f(x)$  を無限回微分可能な関数とすると,  $x = a$  の近傍で  $f(x)$  は以下のように展開できる.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(a)}{dx^n} (x-a)^n$$

ここで,  $\frac{d^n f(a)}{dx^n}$  は  $f(x)$  を  $n$  回微分して得られた関数の  $x = a$  の値を表すこととする. また,  $f(x)$  を 0 回微分した関数は,  $f(x)$  そのものである.

## 第8章

問題 8.1<sup>♡</sup>

- (1) 時速  $1.44 \times 10^2$  km/h は  $4.00 \times 10$  m/s である。  $1.5 \times 10^{-1}$  kg を掛けると、運動量の大きさ  $6.0$  kg·m/s が得られる。
- (2) 1.0 トンは  $1.0 \times 10^3$  kg、時速  $9.0 \times 10$  km/h は  $2.5 \times 10$  m/s である。したがって、運動量の大きさは  $2.5 \times 10^4$  kg·m/s である。
- (3) 時速  $4.0$  km/h は  $1.11$  m/s なので、運動量の大きさは  $5.6 \times 10$  kg·m/s である。計算の途中では、1桁多めに有効桁を残して計算した。  $5.5 \times 10$  でも正解とする。
- (4) 時速  $2.0 \times 10$  km/h は  $5.56$  m/s なので、運動量の大きさは  $1.9 \times 10^8$  kg·m/s である。計算の途中では、1桁有効桁を多めにとって計算した。  $2.0 \times 10$  km/h を  $5.6$  m/s とした場合の答えは、  $2.0 \times 10^8$  kg·m/s になる。

## 問題 8.2

- (1)  $(1, 1, 1) \wedge (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$
- (2)  $(1, 1, 0) \wedge (0, 1, 1) = (1, -1, 1)$
- (3)  $(1, 1, 0) \wedge (1, 0, 1) = (1, -1, -1)$
- (4)  $((1, 1, 1) \wedge (1, 1, 1)) \cdot (1, 1, 1) = 0$
- (5)  $((1, 1, 0) \wedge (0, 1, 1)) \cdot (1, 1, 1) = 1$
- (6)  $((1, 1, 0) \wedge (1, 0, 1)) \cdot (1, 1, 1) = -1$

問題 8.3<sup>♡</sup>

- (1)  $x$  軸方向の速度は変化しないはずである。したがって、45度傾くためには、 $y$  軸方向の速度成分も  $5.0$  m/s でなければならない。したがって、力が加えられた後の速度は  $(5.0, 5.0, 0.0)$  m/s である。
- (2) 力積は運動量の変化から求まるので、  $5.0$  kg  $\times \{(5.0, 5.0, 0.0)$  m/s} -  $5.0$  kg  $\times \{(5.0, 0.0, 0.0)$  m/s} =  $(0, 2.5 \times 10, 0.0)$  N·s である。

問題 8.4<sup>♡</sup> 時速  $1.44 \times 10^2$  km/h は  $4.00 \times 10$  m/s である。

- (1) ピッチャーが投げたボールの運動量は、  $1.5 \times 10^{-1}$  kg  $\times \{(40, 0, 0)$  m/s} =  $(6.0, 0, 0)$  kg·m/s である。ボールは静止するので、運動量変化は  $-(6.0, 0, 0)$  kg·m/s である。ミットに触れてから完全に静止するまで  $0.10$  s かかるので、平均の撃力は  $-(6.0 \times 10^1, 0, 0)$  N である。
- (2) 運動量変化は  $1.5 \times 10^{-1}$  kg  $\times \{(-7.0 \times 10, 0, 0)$  m/s} -  $\{(6.0, 0, 0)$  kg·m/s} =  $-(1.7 \times 10^1, 0, 0)$  kg·m/s である。平均の撃力は  $-(1.7 \times 10^4, 0, 0)$  N である。

- (3) ボールの飛距離は  $1.20 \times 10^2$  m であるので,  $\frac{v_0^2}{g}$  より, バットに当たった直後のボールの速さは 34.3 m/s である. したがって, 打球の初速度は  $(-24.3, 0, 24.3)$  m/s である. 運動量変化は  $1.5 \times 10^{-1}$  kg  $\times$   $\{(-24.3, 0, 24.3)$  m/s $\} - \{(6.0, 0, 0)$  kg $\cdot$ m/s $\} = (-9.6, 0, 3.6)$  kg $\cdot$ m/s である. 平均の撃力は,  $(-9.6 \times 10^3, 0, 3.6 \times 10^3)$  N である.

**問題 8.5**♡ 吹き矢の矢が飛ぶのは, 吹き筒の中に矢がいる間は口から送られた圧力の高い空気によって加速するからである. したがって, 吹き筒の長さが長い方が矢は多くの力積を受け, 大きな初速を得ることができる.

**問題 8.6**  $\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \wedge (m\vec{v})$  であることを思い出す. ただし, ここでは  $\vec{r}_0 = (0.0, 0.0, 0.0)$  m である.

- (1) 速度ベクトルは  $(-1.0 \sin t, 0.0, 0.0)$  m/s なので, 角運動量は  $(0.0, 0.0, 0.0)$  kg $\cdot$ m<sup>2</sup>/s である.
- (2) 速度ベクトルは  $(0.0, -1.0 \sin t, 0.0)$  m/s なので, 角運動量は  $(0.0, 0.0, 0.0)$  kg $\cdot$ m<sup>2</sup>/s である.
- (3) 速度ベクトルは  $(0.0, 0.0, -1.0 \sin t)$  m/s なので, 角運動量は  $(0.0, 0.0, 0.0)$  kg $\cdot$ m<sup>2</sup>/s である.
- (4) 速度ベクトルは  $(0.0, 0.0, 1.0 \cos t)$  m/s なので, 角運動量は  $(0.0, 0.0, 0.0)$  kg $\cdot$ m<sup>2</sup>/s である.
- (5) 速度は  $(-1.0 \sin t, 1.0 \cos t, 0.0)$  なので, 角運動量は,  $(0.0, 0.0, 1.0)$  kg $\cdot$ m<sup>2</sup>/s である.
- (6) 速度は  $(0.0, -1.0 \sin t, 1.0 \cos t)$  なので, 角運動量は,  $(2.0, 0.0, 0.0)$  kg $\cdot$ m<sup>2</sup>/s である.
- (7) 速度は  $(1.0 \cos t, 0.0, -1.0 \sin t)$  なので, 角運動量は,  $(0.0, 3.0, 0.0)$  kg $\cdot$ m<sup>2</sup>/s である.
- (8) 速度は  $(-1.0 \sin t, 0.0, 1.0 \cos t)$  なので, 角運動量は,  $(0.0, -3.0, 0.0)$  kg $\cdot$ m<sup>2</sup>/s である.

**問題 8.7**

- (1)  $(0.0, 0.0, 0.0)$  kg $\cdot$ m/s<sup>2</sup>
- (2)  $(0.0, 0.0, 2.0 \sin t)$  kg $\cdot$ m/s<sup>2</sup>
- (3)  $(0.0, -3.0 \sin t, 0.0)$  kg $\cdot$ m/s<sup>2</sup>
- (4)  $(0.0, 3.0 \cos t, 0.0)$  kg $\cdot$ m/s<sup>2</sup>
- (5)  $(0.0, 0.0, 1.0(1 - \cos t))$  kg $\cdot$ m/s<sup>2</sup>
- (6)  $(2.0, 2.0 \cos t, 2.0 \sin t)$  kg $\cdot$ m/s<sup>2</sup>
- (7)  $(0.0, 3.0(1 - \sin t), 0.0)$  kg $\cdot$ m/s<sup>2</sup>

(8)  $(0.0, 3.0(-1 + \cos t), 0.0) \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$

問題 8.8

(1)  $\vec{OA} = (1, 0, 0)r_0$ ,  $\vec{OB} = (0, 1, 0)r_0$ ,  $\vec{OC} = (-1, 0, 0)r_0$  である. また, 各点における運動量ベクトルは  $\vec{p}_A = (0, 1, 0)mr_0\omega_0$ ,  $\vec{p}_B = (-1, 0, 0)mr_0\omega_0$ ,  $\vec{p}_C = (0, -1, 0)mr_0\omega_0$  である. したがって, 角運動量は, すべて  $(0, 0, 1)mr_0^2\omega_0$  である.

参考 時刻  $t = 0 \text{ s}$  には点 A にいるとすれば, 質点の時刻  $t$  の位置ベクトルは  $\vec{OX} = r_0(\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, 0)$  であり, 速度ベクトル  $\vec{v}(t)$  は  $\vec{v}(t) = r_0\omega_0(-\sin \omega_0 t, \cos \omega_0 t, 0)$  である. よって, ある時刻における原点を中心とする角運動量は  $\vec{OX} \wedge m\vec{v}(t) = (0, 0, mr_0^2\omega_0)$  となる.

(2) 同様に,  $\vec{PA} = (3, 0, 0)r_0$ ,  $\vec{PB} = (2, 1, 0)r_0$ ,  $\vec{PC} = (1, 0, 0)r_0$  である. したがって, 各点における点 P 周りの角運動量は, それぞれ  $(0, 0, 3)mr_0^2\omega_0$ ,  $(0, 0, 1)mr_0^2\omega_0$ ,  $(0, 0, -1)mr_0^2\omega_0$  である.

参考  $\vec{PX} = r_0(\cos \omega_0 t + 2, \sin \omega_0 t, 0)$  である. 点 P を中心とする角運動量は  $\vec{PX} \wedge m\vec{v}(t) = (0, 0, 1 + 2 \cos \omega_0 t)mr_0^2\omega_0$  となる.

問題 8.9<sup>♡</sup> 注 11

- (1)  $\vec{r}(t) = (v_0 t, -\frac{1}{2}gt^2, 0 \text{ m})$
- (2) 重力は鉛直下向きで, 原点 O を基準した場合の力のモーメントのうでの長さは, 質点の  $x$  座標の大きさで,  $v_0 t$  である. したがって, 重力の原点 O の周りの力のモーメントの大きさは,  $v_0 mgt$  となる.
- (3) 質点の速度は  $\vec{v}(t) = m(v_0, -gt, 0 \text{ m/s})$  である.  $\vec{r}(t)$  と  $\vec{v}(t)$  の間の角度を  $\theta$  とすると,  $L(t) = |\vec{r}(t)||\vec{v}(t)| \sin \theta$  である. 右欄の注の  $\vec{a}$  を  $\vec{r}(t)$  そして  $\vec{b}$  を  $\vec{v}(t)$  とみなすと,

$$\begin{aligned} L(t) &= |\vec{r}(t)||\vec{v}(t)| \sin \theta \\ &= \sqrt{\left( (v_0 t)(-mgt) - \left(-\frac{1}{2}gt^2\right)(mv_0) \right)^2} \\ &= \frac{1}{2}mv_0gt^2 \end{aligned}$$

である.

(4)  $\frac{dL(t)}{dt} = v_0 mgt$  だから確認できた.

外積を用いた解は以下の通りである. 外積という概念を用いる方が計算は簡単である.

- (1)  $\vec{r}(t) = (v_0 t, -\frac{1}{2}gt^2, 0 \text{ m})$
- (2)  $\vec{N}(t) = \vec{r}(t) \wedge (0, -1, 0)mg = (0, 0, -1)v_0 mgt$

注 11  $\vec{a} = (a_x, a_y, 0)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, 0)$  とする. 二つのベクトルの間の角度を  $\theta$  とすると,  $|\sin \theta| = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2}$  である.  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  を 2 辺とする平行 4 辺形の面積は,  $|\vec{a}||\vec{b}|\sin \theta = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \sqrt{(a_x b_y - a_y b_x)^2}$  となる.

$$(3) \quad \vec{L}(t) = \vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t) = (0, 0, -1) \frac{1}{2} v_0 m g t^2$$

$$(4) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = (0, 0, -1) v_0 m g t \text{ だから確認できた.}$$

## 問題 8.10♡

$$(1) \quad \begin{aligned} \vec{ea} &= (-1, 1, 0)l, \\ \vec{eb} &= (-1, -1, 0)l, \\ \vec{ec} &= (1, -1, 0)l, \\ \vec{ed} &= (1, 1, 0)l \end{aligned}$$

である.

- (2) (A) 角運動量の大きさのみを求める場合：

質点 1, 2, 3 の点 e のまわりの角運動量を考える際のモーメントの腕の長さはすべて  $l$  である. したがって,  $l$  と  $mv$  の積から角運動量の大きさは,  $lmv$  である. ただし, 質点 1 は時計回り, 質点 2 と 3 は反時計回りであることに注意のこと.

- (B) 角運動量を求める場合：

質点 1, 2, 3 の点 e のまわりの角運動量は

$$\begin{aligned} \vec{ea} \wedge m(1, 0, 0)v &= (0, 0, -1)lmv, \\ \vec{ec} \wedge m(0, 1, 0)v &= (0, 0, 1)lmv, \\ \vec{ed} \wedge m(1, 0, 0)v &= (0, 0, 1)lmv \end{aligned}$$

である.

- (3) (A) 角運動量の大きさのみを求める場合：

右回りと左回りでは, 角運動量は打ち消し合う. したがって, 角運動量の大きさは,  $-lmv + lm v + lm v = lm v$  となる.

- (B) 角運動量を求める場合：

$(0, 0, 1)lmv$  となる.

## 問題 8.11♣

- (1)  $bm v_0$  となる.

- (2) 円内の質点の速さを  $v$  とすると,

$$\frac{1}{2} m v^2 - V_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

である. したがって,

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2V_0}{m}} = v_0 \sqrt{1 + \frac{2V_0}{m v_0^2}} = v_0 \sqrt{1 + \alpha}$$

である.

- (3)  $b = R$  で質点が円に接した場合を考えよう. 質点の位置エネルギーは変化しない. 言い換えると接した前後で質点の運動に変化はない. 質点が円にぶつかる時も, 位置エネルギー変化は法線方向のみであり, 撃力は法線方向のみである. したがって, 速度の接線方向の成分は変化しない.

(4)

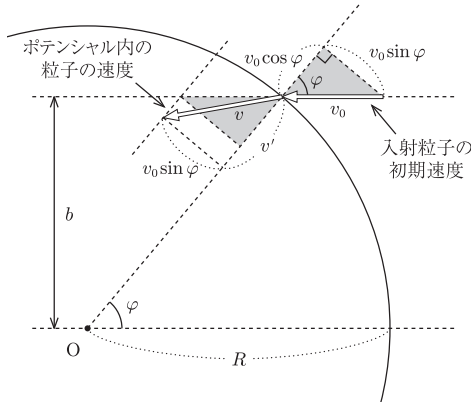


図 6 質点のポテンシャル内の速度ベクトル.

- (5) 速度の接線方向の成分は変化せず, 速度の法線方向の成分しか変化しない. したがって, 撃力の向きは円の中心方向である. 力積は図 6 より,

$$\begin{aligned} m(v' - v_0 \cos \varphi) &= m \left( \sqrt{v^2 - v_0^2 \sin^2 \varphi} - v_0 \cos \varphi \right) \\ &= m \left( \sqrt{v_0^2 \cos^2 \varphi + \frac{2V_0}{m}} - v_0 \cos \varphi \right) \\ &= mv_0 \cos \varphi \left( \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi}} - 1 \right) \end{aligned}$$

- (6) 撃力は, 点  $O$  を中心とする中心力なので, 質点の点  $O$  のまわりの角運動量は変化しない. すなわち,  $bm v_0$  である.
- (7) 図 6 より進行方向の角度変化は,

$$\begin{aligned} \varphi - \arctan \frac{v_0 \sin \varphi}{v'} &= \varphi - \arctan \left( \frac{v_0 \sin \varphi}{v_0 \cos \varphi \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi}}} \right) \\ &= \varphi - \arctan \left( \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi}}} \right) \end{aligned}$$

となる.

## 第9章

問題 9.1<sup>♡</sup> 衝突後の質点 A と B の速度を  $v_A$  と  $v_B$  とする. 運動量保存則より,

$$2.0 \text{ kg} \cdot (1.00 \times 10^1 \text{ m/s}) + 3.0 \text{ kg} \cdot (-5.0 \text{ m/s}) = 2.0 \text{ kg} \cdot v_A + 3.0 \text{ kg} \cdot v_B$$

である. また, 反発係数が  $5.0 \times 10^{-1}$  より, もう一つの式が立てられる.

$$5.0 \times 10^{-1} = -\frac{v_A - v_B}{1.00 \times 10^1 \text{ m/s} - (-5.0 \text{ m/s})}$$

立てられる. これらを連立して  $v_A$  と  $v_B$  を求めると,  $v_A = -3.5 \text{ m/s}$  と  $v_B = 4.0 \text{ m/s}$  が得られる.

問題 9.2<sup>♡</sup> 衝突後の速度を  $v$  とすると, 運動量保存則より

$$2.0 \text{ kg} \cdot (5.0 \text{ m/s}) + 4.0 \text{ kg} \cdot (2.0 \text{ m/s}) = (2.0 \text{ kg} + 4.0 \text{ kg})v$$

となる. したがって,  $v = 3.0 \text{ m/s}$  となる.

問題 9.3<sup>♡</sup>

$$(1) \frac{1}{2}(4.0 \text{ kg} + 2.0 \text{ kg}) \cdot (4.0 \text{ m/s})^2 = 4.8 \times 10 \text{ J}$$

(2) 台車 B の速度を  $v$  とすると, 運動量保存則より

$$(4.0 \text{ kg} + 2.0 \text{ kg}) \cdot 4.0 \text{ m/s} = 4.0 \text{ kg} \cdot (3.0 \text{ m/s}) + 2.0 \text{ kg} \cdot v$$

となる.  $v = 6.0 \text{ m/s}$  と求まる.

$$(3) \frac{1}{2}(4.0 \text{ kg}) \cdot (3.0 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}2.0 \text{ kg} \cdot (6.0 \text{ m/s})^2 = 5.4 \times 10 \text{ J}$$

(4) 力学的エネルギー保存則より, 分離後の運動エネルギーと分離前の運動エネルギーの差はばねがたくわえていた弾性エネルギーである. したがって,  $6.0 \text{ J}$  となる.

問題 9.4<sup>♡</sup>

(1) 子供と台車 A は孤立系と考えることができる. したがって, 台車が受ける力積の大きさは  $2.5 \times 10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$  で子供のジャンプの向きと逆である. また, 運動量保存則を適用して, 台車 A の速さを  $v_A$  とすると,

$$2.5 \times 10 \text{ kg} \cdot (1.0 \text{ m/s}) - (1.0 \times 10 \text{ kg}) \cdot v_A = 0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

したがって,  $v_A = 2.5 \text{ m/s}$  となる.

(2) 運動量保存則より,

$$2.5 \times 10 \text{ kg} \cdot (1.0 \text{ m/s}) + 0.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = (2.5 \times 10 \text{ kg} + 1.0 \times 10 \text{ kg})v_B$$

したがって,  $v_B = 0.714 \text{ m/s} = 0.71 \text{ m/s}$  となる.

(3) 最初は静止していたので, 運動エネルギーはゼロである. 後では,

$$\frac{1}{2}(1.0 \times 10 \text{ kg}) \cdot (2.5 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(3.5 \times 10 \text{ kg}) \cdot (0.714 \text{ m/s})^2 = 40.17 \text{ J}$$



4.0 × 10 J である.

- (4) 子供の筋肉が仕事をしたことによって得られたエネルギーである……  
など.

問題 9.5<sup>▽</sup>

- (1) 一体になった後の速さを  $v'$  とする. 運動量保存則より,  
 $mv + M \cdot 0 \text{ m/s} = (m + M)v'$ .  $v' = \frac{mv}{m + M}$  である.
- (2) 材木の運動量変化 (弾丸が材木に与えた力積) の大きさは  $Mv' = \frac{mMv}{m + M}$  である.
- (3) この力積は力  $F$  によって与えられる. 力が作用している時間を  $t$  とすると,  $Mv' = Ft$  となる. したがって,  $t = \frac{mMv}{(m + M)F}$
- (4) 弾丸がめり込む深さを  $d$  とすると,  $F$  による仕事は  $Fd$  となる. これは衝突の前後のエネルギー差と等しいので,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m + M) \left( \frac{mv}{m + M} \right)^2 = Fd$$

である. これより,  $d = \frac{mMv^2}{2(m + M)F}$  が得られる.

問題 9.6<sup>▽</sup>

- (1) 衝突後の質点 A の速度の  $y$  成分を  $v_A$ , 質点 B の速度の  $x$  成分を  $v_B$  とすると,

$$\begin{aligned} 4.0 \text{ kg} \cdot \{(3.0, 0) \text{ m/s}\} + 5.0 \text{ kg} \cdot \{(0, -2.0) \text{ m/s}\} \\ = 4.0 \text{ kg} \cdot (0, 1)v_A + 5.0 \text{ kg} \cdot (1, 0)v_B \end{aligned}$$

である. したがって, 衝突後の質点 A の速度は,  $(0, -2.5) \text{ m/s}$ , 質点 B の速度は,  $(2.4, 0) \text{ m/s}$  となる.

- (2) 質点 B の運動量変化, すなわち質点 A が質点 B に与える力積は  $5.0 \text{ kg} \cdot \{(2.4, 0) \text{ m/s}\} - 5.0 \text{ kg} \cdot \{(0, -2.0) \text{ m/s}\} = (1.2 \times 10, 1.0 \times 10) \text{ N} \cdot \text{s}$  となる.
- (3) 小問 2 と同様に, 質点 A の運動量変化を考えればよい.  $4.0 \text{ kg} \cdot \{(0, -2.5) \text{ m/s}\} - 4.0 \text{ kg} \cdot \{(3.0, 0) \text{ m/s}\} = (-1.2 \times 10, -1.0 \times 10) \text{ N} \cdot \text{s}$  となる.

問題 9.7<sup>▽</sup> 運動量保存則より,

$$mv_0(1, 0) = mv_A(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) + Mv_B(\cos 30^\circ, -\sin 30^\circ)$$

である. すなわち,

$$mv_0 = \frac{1}{2}mv_A + \frac{\sqrt{3}}{2}Mv_B$$

$$0 \text{ kg}\cdot\text{m/s} = \frac{\sqrt{3}}{2}mv_A - \frac{1}{2}Mv_B$$

これらを解くと,  $v_A = \frac{1}{2}v_0$ ,  $v_B = \frac{\sqrt{3}mv_0}{2M}$  が得られる.

### 問題 9.8<sup>♡</sup>

- (1)  $(-3.0 \times 10^2 \text{ N}) \cdot (1.0 \times 10^{-2} \text{ s}) = -3.0 \text{ N}\cdot\text{s}$  である.  
 (2) はねかえった後のボールの速度  $v$  は, 運動量変化が力積であることより

$$(1.0 \times 10^{-1} \text{ kg})(v - 2.0 \times 10 \text{ m/s}) = -3.0 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

から求めることができ,  $v = -1.0 \times 10 \text{ m/s}$  となる.

- (3)  $\frac{-(-1.0 \times 10 \text{ m/s})}{2.0 \times 10 \text{ m/s}} = 5.0 \times 10^{-1}$  である.  
 (4) 衝突前は  $\frac{1}{2}(1.0 \times 10^{-1} \text{ kg})(2.0 \times 10 \text{ m/s})^2 = 2.0 \times 10 \text{ J}$ , 後は  $\frac{1}{2}(1.0 \times 10^{-1} \text{ kg})(-1.0 \times 10 \text{ m/s})^2 = 5.0 \text{ J}$  である. したがって, 失われた運動エネルギーは  $1.5 \times 10 \text{ J}$  である.

問題 9.9<sup>♡</sup> 質点の初速度の大きさを  $v$ , 衝突後の速度の大きさを  $v'$  とする. なめらかな壁との衝突なので, 壁に水平方向な成分 ( $x$  成分とする) は, 変化しない. すなわち,  $v \cos \theta_1 = v' \cos \theta_2$  である. 一方, 壁に垂直な方向は, 跳ね返り係数を  $e$  として,  $e = -\frac{v' \sin \theta_2}{-v \sin \theta_1}$  である. これは,  $ev \sin \theta_1 = v' \sin \theta_2$  と書き換えることができる. したがって,

$$e \tan \theta_1 = \tan \theta_2$$

が得られる.

- (1)  $0 < e < 1$  なので,  $\theta_1 > \theta_2$  である必要がある.  
 (2)  $e = \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1}$  である.

### 問題 9.10<sup>♡</sup>

- (1)  $(2.4 \text{ m/s}) \cdot (\sin 30^\circ, -\cos 30^\circ) = (1.2, -2.1) \text{ m/s}$ .  
 (2) 壁に水平な方向の速度成分は変化しないので,  $(2.4 \text{ m/s}) \cdot \sin 30^\circ = v \sin 60^\circ$  より, 衝突後の速度の大きさは  $1.4 \text{ m/s}$  とわかる.  
 (3) 前問より  $e = \frac{\tan 30^\circ}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{3} = 3.3 \times 10^{-1}$  となる.

### 問題 9.11<sup>♡</sup>

- (1) 衝突の前後で運動量を考えると,

$$m_1 v_1(1, 0, 0) + m_2 v_2(0, 1, 0) = (m_1 + m_2)V(\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

であるから,  $\tan \theta = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1}$

- (2) 衝突の前後で全運動量は変化しないので、衝突後の運動量  $\vec{P} = (m_1 v_1, m_2 v_2, 0 \text{ kg}\cdot\text{m/s})$  である。  $|\vec{P}| = \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}$  であるので、それを全質量  $m_1 + m_2$  で割れば、衝突後の速度の大きさ  $V = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2}$  が得られる。

参考

$$\cos \theta = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)V}, \sin \theta = \frac{m_2 v_2}{(m_1 + m_2)V}$$

$$1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2 V^2}$$

のように考えても良い。

### 問題 9.12<sup>♡</sup>

- (1)  $\vec{r}_1(t) = \left(-L + v_0 t, 0 \text{ m}, -\frac{1}{2} g t^2\right)$ ,  $\vec{p}_1(t) = (m v_0, 0 \text{ kg}\cdot\text{m/s}, -m g t)$
- (2)  $\vec{r}_2(t) = \left(L - v_0 t, 0 \text{ m/s}, -\frac{1}{2} g t^2\right)$ ,  $\vec{p}_2(t) = (-m v_0, 0 \text{ kg}\cdot\text{m/s}, -m g t)$
- (3)  $\vec{r}_G(t) = (0, 0, -1) \frac{1}{2} g t^2$ ,  $\vec{p}_G(t) = (0, 0, -2) m g t$
- (4)  $(-1, 0, 0) m v_0$
- (5)  $x$  軸方向の速度がゼロになるので、それに対応した運動エネルギーが失われる。すなわち、 $2 \times \frac{1}{2} m v_0^2 = m v_0^2$  である。

### 問題 9.13<sup>♡</sup>

- (1) 分裂するまでの物体の位置  $\vec{r}(t)$  と速度  $\vec{v}(t)$  は、

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t, 0 \text{ m}, \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right)$$

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} v_0, 0 \text{ m/s}, \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 - g t\right)$$

である。最高点に到達する時刻は  $t_m = \frac{\sqrt{2} v_0}{2g}$  であるから、最高点の座標  $(h_m, 0 \text{ m}, z_m)$  は

$$\left(\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}, 0 \text{ m}, \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{g}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right) \frac{v_0^2}{g}$$

である。

- (2) 水平に分裂し落下点が  $(1, 1, 0) h_m$  なので、 $y$  方向の成分しかないはずである。また、落下するまでの時間は  $t_m$  であるから、求める速度は

$$h_m (0, 1, 0) \frac{1}{t_m} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) v_0$$

- (3) もう一つの破片の分裂直後の速度を  $(v_x, v_y, 0 \text{ m/s})$  とすると、分裂の前後の運動量は

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) m v_0 = \frac{m}{2} (0, 1, 0) \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 + \frac{m}{2} (v_x, v_y, 0 \text{ m/s})$$

したがって、

$$(v_x, v_y, 0 \text{ m/s}) = \left(\sqrt{2}v_0, -\frac{\sqrt{2}}{2}v_0, 0 \text{ m/s}\right) = \left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) v_0$$

でなければならない。

- (4) 初期位置  $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right) \frac{v_0^2}{g}$ 、初期速度  $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) v_0$  の運動を考える。  $z = 0 \text{ m}$  となるまでの時間は  $t_m$  であるから、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} + \sqrt{2}v_0 t_m, 0 \text{ m} - \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t_m, 0 \text{ m}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2} \frac{v_0^2}{g}, -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}, 0 \text{ m}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \frac{v_0^2}{g} \end{aligned}$$

となる。

## 第 10 章

### 問題 10.1<sup>♡</sup>

- (1) 物体に作用する重力が  $mg$  で、モーメントの腕が  $L_1$  である。それらは直交しているので、重力による力のモーメントの大きさは  $mgL_1$  である。
- (2) 点  $P_2$  に作用する力の大きさは  $F$  で、モーメントの腕の長さは  $L_2 \cos \theta$  である。したがって、力のモーメントの大きさは  $FL_2 \cos \theta$  である。
- (3)  $mgL_1 = FL_2 \cos \theta$  を満たす  $F$  が最小の力の大きさである。したがって、 $F = \frac{mgL_1}{L_2 \cos \theta}$  が物体を持ち上げるために必要な最小の力の大きさになる。

問題 10.2<sup>♡</sup> 質量  $3m$  のおもりをつるす糸の張力の大きさを  $T_A$  とすると、力のモーメントの釣り合いより

$$T_A \cdot 5 - 3mg \cdot 1 = 0 \text{ N}$$

である。これより、 $T_A = \frac{3}{5}mg$  であることがわかる。一方、質量  $m$  のおもりを支える力の大きさを  $N$  とすると、

$$mg - T_A - N = 0 \text{ N}$$

である。したがって、 $N = \frac{2}{5}mg$  であることがわかる。

問題 10.3<sup>▽</sup> 棒が糸から受ける張力の大きさを  $T$ ，棒が A 端で受ける力の水平成分を  $f_h$ ，鉛直成分を  $f_v$  とする．水平方向の力の釣り合いより，

$$f_h - T \cos 30^\circ = 0 \text{ N}$$

一方，鉛直方向の力の釣り合いは，

$$f_v + T \sin 30^\circ - mg = 0 \text{ N}$$

である．さらに，力のモーメントの釣り合いは

$$T \sin 30^\circ \cdot L - mg \cdot \frac{L}{2} = 0 \text{ Nm}$$

である．これらより，以下となることがわかる．

(1)

$$T = mg$$

(2)

$$\vec{f} = (f_v, f_h) = \left( \frac{1}{2}mg, \frac{\sqrt{3}}{2}mg \right)$$

問題 10.4<sup>▽</sup>

(1) 棒の中心（重心）にはたらき，鉛直下向きに大きさ  $Mg$  である．

(2)

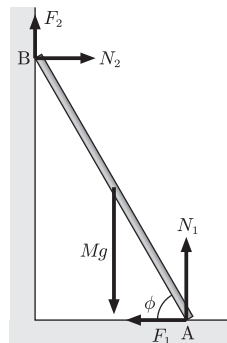


図 7 壁に立てかけられた棒にはたらく力．

(3)  $N_2 - F_1 = 0 \text{ N}$

(4)  $N_1 + F_2 - Mg = 0 \text{ N}$

(5) 力のモーメントがゼロになることが条件になる．例題とは， $F_2$  がある点が異なっている．

$$N_2 l \sin \phi + F_2 l \cos \phi - \frac{1}{2}Mgl \cos \phi = 0 \text{ Nm}$$

参考 外積を使った力のモーメントの定義を用いて計算すると以下のようになる．紙面水平方向右向きを  $x$  軸の正の向き，紙面上向きを  $y$

軸方向の正の向きとして、紙面に垂直手前向きを  $z$  軸の正の向きとすると、

$$l(-\cos \phi, \sin \phi, 0) \wedge (N_2, F_2, 0 \text{ N}) \\ + l \left( -\frac{1}{2} \cos \phi, \frac{1}{2} \sin \phi, 0 \right) \wedge Mg(0, -1, 0) = \vec{0} \text{ Nm}$$

となり、整理すると上と同じ結果を得る。

- (6) 力のモーメントがゼロになることが条件になる。例題と同じである。すなわち、

$$N_1 l \cos \phi - F_1 l \sin \phi - \frac{1}{2} Mgl \cos \phi = 0 \text{ Nm}$$

である。

**参考** 同じように、外積を使った力のモーメントの定義を用いて計算すると、以下のようなになる。

$$l(\cos \phi, -\sin \phi, 0) \wedge (-F_1, N_1, 0 \text{ N}) \\ + L \left( \frac{1}{2} \cos \phi, -\frac{1}{2} \sin \phi, 0 \right) \wedge Mg(0, -1, 0) = \vec{0} \text{ Nm}$$

整理すると上と同じ結果を得る。

- (7) 解くと

$$N_1 = Mg - \frac{Mg}{2} \frac{\mu_2 \cos \phi}{\mu_2 \cos \phi + \sin \phi} \\ N_2 = F_1 = \frac{Mg}{2} \frac{\cos \phi}{\mu_2 \cos \phi + \sin \phi} \\ F_2 = \frac{Mg}{2} \frac{\mu_2 \cos \phi}{\mu_2 \cos \phi + \sin \phi}$$

となる。  $F_2 = \mu_2 N_2$  である点に注意。

- (8)

$$\frac{F_1}{N_1} = \frac{1}{\mu_2 + 2 \tan \phi}$$

となるので、この値が  $\mu_1$  より大きくなると棒を立てかけておくことができなくなる。すなわち、それは

$$\tan \phi_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_1} - \mu_2 \right)$$

となる角  $\phi_0$  より小さい角度の場合である。この解は、前問の  $\mu_2 = 0$  の場合の解を含んでいる点に注意。

**問題 10.5**<sup>♡</sup> 針金の線密度を  $\lambda$  とする。また、OB に沿って  $x$  軸を、OA に沿って  $y$  軸をとる。OA 部分の重心は  $(0, \frac{1}{2} \cdot 1.0 \times 10^{-1}) \text{ m}$  で、OA 部分の質量は  $\lambda \cdot 1.0 \times 10^{-1}$  である。一方、OB 部分の重心は  $(\frac{1}{2} \cdot 2.0 \times 10^{-1}, 0) \text{ m}$

で、OB部分の質量は $\lambda \cdot 2.0 \times 10^{-1}$ である。これらより、全体の重心は

$$\frac{\lambda \cdot 1.0 \times 10^{-1}(0, \frac{1}{2} \cdot 1.0 \times 10^{-1}) + \lambda \cdot 2.0 \times 10^{-1}(\frac{1}{2} \cdot 2.0 \times 10^{-1}, 0)}{\lambda \cdot 1.0 \times 10^{-1} + \lambda \cdot 2.0 \times 10^{-1}}$$

$$= (6.7 \times 10^{-2}, 1.7 \times 10^{-2}) \text{ m}$$

となる。

- 問題 10.6<sup>♡</sup> 1.  $\frac{2\pi R}{v}$  2.  $\frac{v}{R}$  3. 点 A 4.  $\frac{v^2}{R}$  5. 点 A 6.  $m \frac{v^2}{R}$   
7.  $mvR$  8. 中心力 9.  $\frac{1}{2}v$  10. 角運動量

### 問題 10.7

- (1) 式(10.18)より、回転軸Oのまわりの慣性モーメントは $I = I_G + Ma^2$ である。  
 (2) 式(10.5)に代入して、 $I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mga \sin \theta$ を得る。  
 (3)  $\sin \theta \rightarrow \theta$ に置き換えればよい。したがって、 $I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mga\theta$ となる。  
 (4) したがって、角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{Mga}{I_G + Ma^2}}$ となる。

### 問題 10.8<sup>♡</sup>

- (1) 滑らないためには $v_0 = -\omega r_0$ でなければならない。したがって、 $\omega = -\frac{v_0}{r_0}$ 。ここで負号は回転が右回りであることを表している。  
 (2)  $t = \Delta$ の点Aの位置ベクトルは、

$$(v_0\Delta, r_0) + r_0(-\sin \omega\Delta, \cos \omega\Delta)$$

- (3)  $t = \Delta$ の点Bの位置ベクトルは、

$$(v_0\Delta, r_0) + r_0(-\sin(\pi + \omega\Delta), \cos(\pi + \omega\Delta))$$

- (4) スローシャッターと言っても $\Delta$ が十分小さいと考えて、点AとBの $t = \Delta$ のときの位置ベクトルを近似すると、

$$A: (v_0\Delta - r_0\omega\Delta, r_0 + r_0) = (2v_0\Delta, 2r_0)$$

$$B: (v_0\Delta + r_0\omega\Delta, r_0 - r_0) = (0 \text{ m}, 0 \text{ m})$$

となる。ただし、 $\omega = -\frac{v_0}{r_0}$ を用いた。したがって、点Aの方が点Bよりブレは大きいことがわかる。

### 問題 10.9<sup>♡</sup>

- (1) 円柱は回転しないので、運動エネルギーは重心の並進運動のエネルギーのみ。したがって、 $\frac{1}{2}mv^2$ 。

- (2) 円筒は回転しないので、運動エネルギーは重心の並進運動のエネルギーのみ。したがって、 $\frac{1}{2}mv^2$ 。
- (3) 回転角速度は  $\frac{v}{r_0}$  である。円柱の慣性モーメントは  $\frac{1}{2}mr_0^2$  である。運動エネルギーは回転運動のエネルギーと重心の並進運動のエネルギーの和なので、

$$\frac{1}{2} \left( \frac{mr_0^2}{2} \right) \omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

- (4) 回転角速度は  $-\frac{v}{r_0}$  である。円筒の慣性モーメントは  $mr_0^2$  である。運動エネルギーは回転運動のエネルギーと重心の並進運動のエネルギーの和なので、

$$\frac{1}{2} (mr_0^2) \omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2$$

### 問題 10.10

- (1) 重力は  $Mg(\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$ 、垂直抗力は  $N(0, 1, 0)$ 、摩擦力は  $f(-1, 0, 0)$  である。
- (2)  $M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = (Mg \sin \varphi - f, -Mg \cos \varphi + N, 0 \text{ N})$
- (3) 斜面をすべらずに運動しているので、図より明らかなように重心の  $y$  座標は常に一定である。
- (4)  $R(0, -1, 0) \wedge f(-1, 0, 0) + (\vec{0} \text{ m}) \wedge Mg(\sin \varphi, -\cos \varphi, 0) + R(0, -1, 0) \wedge N(0, 1, 0) = I_G(0, 0, 1) \frac{d^2 \theta}{dt^2}$  である。整理すると、 $z$  成分は  $-Rf = I_G \frac{d^2 \theta}{dt^2}$  となり、他の成分は両辺ともゼロになる。
- (5) 円筒は滑らずに転がっているので、 $x = -R\theta$  である。
- (6) 解くべき 3 つの方程式は

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin \varphi - f$$

$$I_G \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -Rf$$

$$x = -R\theta$$

である。 $f, \theta$  を消去すると  $\left( M + \frac{I_G}{R^2} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin \varphi$  となり、

$$x = \frac{1}{2} \frac{g \sin \varphi}{1 + \frac{I_G}{MR^2}} t^2$$

となる。すべる場合の  $x = \frac{1}{2}(g \sin \varphi)t^2$  にくらべて、すべらずに回転する場合は、慣性モーメントのために重心の加速度は小さくなる。



問題 10.11 ◆ 注 12

注 12 数値 0 の単位は補うこと。

- (1) 重心の運動エネルギーは  $\frac{1}{2}Mv_0^2$  で、回転運動のエネルギーは  $\frac{1}{2}I\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2$  である。全体の運動エネルギーはこの和である。したがって、  
 $\frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{a^2}\right)v_0^2$  である。
- (2)  $\left(0, 0, -I\frac{v_0}{a}\right) + (0, a-h, 0) \wedge (Mv_0, 0, 0) = \left(0, 0, -(I + a(a-h)M)\frac{v_0}{a}\right)$
- (3) 段差と衝突した瞬間にはたらく撃力は点 P を作用点とするので、この撃力による点 P のまわりの角運動量の変化はない。そのほか、重力が作用しているが、この重力（重力のモーメント）による角運動量の変化は作用している時間が短いので無視できる。以上により、点 P まわりの角運動量は変化しない。
- (4)  $(0, 0, -(I + a^2M)\omega_1)$
- (5)  $-(I + a(a-h)M)\frac{v_0}{a} = -(I + a^2M)\omega_1$  を  $\omega_1$  について解いて

$$\omega_1 = \frac{I + a(a-h)M}{I + a^2M} \frac{v_0}{a}$$

- (6)  $\frac{1}{2}(I + a^2M)\omega_1^2$
- (7)  $\frac{1}{2}(I + a^2M)\omega_1^2 \geq Mgh$  より、等号がなりたつ  $v_0 = \frac{2\sqrt{3a}}{3a-2h}\sqrt{gh}$  が求めるものである。
- (8) エネルギーが失われるのは、円筒が段差の角にあたった瞬間である。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{a^2}\right)v_0^2 - \frac{1}{2}(I + a^2M)\omega_1^2 \\ &= \frac{2I + a(2a-h)M}{I + a^2M} \frac{h}{a} \frac{1}{2}Mv_0^2 \\ &= \left(1 - \frac{h}{3a}\right) \frac{h}{a}Mv_0^2 \end{aligned}$$

問題 10.12 ◆

- (1) 題意より、衝突直後の  $y$  軸方向の運動はない。 $x$  軸方向の運動量保存について衝突の前後で、

$$Mv_0 = m_1v_1 + m_2v_2 + Mv$$

が成り立つ。一方、運動エネルギー保存について

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

が成り立つ。

- (2) 棒の重心は棒を  $m_2 : m_1$  に内分する点である。重心から質点  $m_1$  の距離を  $a$  とすると  $a = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\ell$  で、質点  $m_2$  までの距離は  $\ell - a = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\ell$

である. 3 質点を質点系と考えると重心を基準点とした角運動量の保存則は以下のように表される.

$$aMv_0 = am_1v_1 + (a-l)m_2v_2 + aMv$$

すなわち,

$$Mv_0 = m_1v_1 + \left(1 - \frac{\ell}{a}\right)m_2v_2 + Mv$$

である.

- (3) 角運動量保存と運動量保存の式を連立すると

$$\begin{array}{rcl} Mv_0 & = & m_1v_1 + m_2v_2 + Mv \\ -) & Mv_0 & = m_1v_1 + \left(1 - \frac{\ell}{a}\right)m_2v_2 + Mv \\ \hline 0 \text{ kg}\cdot\text{m/s} & = & \frac{\ell}{a}m_2v_2 \end{array}$$

したがって,  $v_2 = 0 \text{ m/s}$  であることがわかる.

- (4)  $v_2 = 0 \text{ m/s}$  を運動量保存とエネルギー保存の式に代入して整理すると,

$$\begin{aligned} Mv_0 &= m_1v_1 + Mv \\ Mv_0^2 &= m_1v_1^2 + Mv^2 \end{aligned}$$

となる. これらより,  $v_1, v$  を解くと,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2M}{m_1 + M}v_0 \\ v &= \frac{M - m_1}{m_1 + M}v_0 \end{aligned}$$

衝突後に  $v > 0 \text{ m/s}$  となる条件は,  $M > m_1$  である.

- (5) 運動量保存より, 棒の重心の速度は  $\frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1$  となる.  
 (6) 求める角速度を  $\omega$  として, 角運動量を  $v_1$  と  $\omega$  を使って表す. まず, 棒の慣性モーメント  $I$  を求める.

$$\begin{aligned} I &= m_1a^2 + m_2(\ell - a)^2 \\ &= m_1\left(\frac{m_2\ell}{m_1 + m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1\ell}{m_1 + m_2}\right)^2 \\ &= \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\ell^2 \end{aligned}$$

である.

$$am_1v_1 = I\omega, \text{ すなわち } \frac{m_2\ell}{m_1 + m_2}m_1v_1 = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\ell^2\omega$$

である。整理すると、

$$v_1 = \ell\omega$$

したがって、 $\omega = \frac{v_1}{\ell}$  である。

- (7) 重心の座標は、 $\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1t, \frac{m_2}{m_1+m_2}\ell\right)$  である。半径が  $a = \frac{m_2}{m_1+m_2}\ell$  で、初期位相が  $-\pi/2$ 、角速度が  $\omega = \frac{v_1}{\ell}$  の円運動は、

$$(a \cos(-\pi/2 + \omega t), a \sin(-\pi/2 + \omega t)) = (a \sin \omega t, -a \cos \omega t)$$

である。この二つの運動を合成すると、質点 1 の運動になる。

$$\frac{m_2}{m_1+m_2} \left( \frac{m_1 v_1}{m_2} t + \ell \sin\left(\frac{v_1}{\ell} t\right), \ell \left(1 - \cos\left(\frac{v_1}{\ell} t\right)\right) \right)$$

$\left|\frac{v_1}{\ell} t\right| \ll 1$  のとき、上の式は、 $(v_1 t, 0)$  となり、衝突直後の質点 1 の速度が  $v_1$  であることを再現できる。

## 第 11 章

### 問題 11.1<sup>♡</sup>

- (1) 万有引力と遠心力がつり合うので、

$$mg = m \left( \frac{2\pi R}{T} \right)^2 / R$$

である。したがって、 $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$  である。

- (2) 代入すると、 $T = 5.1 \times 10^3$  s が得られる。  
 (3) 北緯 60 度の地表面では、回転軸からの距離は  $R/2$  になる。したがって、遠心力は  $\frac{mg}{2}$  である。したがって、合力は地表面の法線に対して 30 度傾いている。

### 問題 11.2<sup>♡</sup>

- (1)  $\frac{4}{3}\rho\pi x^3$  である。  
 (2) 前問から質点におよぼす万有引力は、 $\frac{4}{3}\rho\pi x^3$  の質点が中心にある場合と等価で、距離は  $x$  である。したがって、 $\frac{(4/3)\rho\pi x^3}{x^2} = \frac{4}{3}\rho\pi x$  に比例するはずである。一方、 $x = R$  のときには、 $mg$  であるから、求める力の大きさは  $mg\frac{x}{R}$  となる。  
 (3) ばね定数が  $\frac{mg}{R}$  の場合と同じように復元力がはたらくことになる。

また、質量は  $m$  であるから、その周期  $T$  は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{R}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

となる。反対側に到達するまでの時間は  $\frac{T}{2}$  なので、 $\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$  が求めるものである。

(4) 数値を代入して概算すると、 $2.5 \times 10^3$  s となる。

問題 11.3<sup>♡</sup> 重力の位置エネルギーは  $-\frac{GMm}{r}$  である。

$$(1) -\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2) \cdot (6.0 \times 10^{24} \text{ kg}) \cdot (1.0 \text{ kg})}{6.4 \times 10^6 \text{ m}} \\ = -6.3 \times 10^7 \text{ J.}$$

$$(2) -\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2) \cdot (6.0 \times 10^{24} \text{ kg}) \cdot (1.0 \text{ kg})}{4.2 \times 10^7 \text{ m}} \\ = -9.5 \times 10^6 \text{ J.}$$

問題 11.4<sup>♡</sup> 1.  $mr\omega^2$  2.  $\frac{2\pi}{\omega}$  3.  $r^3$  4.  $\frac{4\pi^2 km}{r^2}$  5. 作用反作用  
6.  $\frac{Mm}{r^2}$

問題 11.5<sup>♡</sup>

$$(1) F = G \frac{Mm}{R^2} = g'm \text{ だから, } g' = 1.04 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2 = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2.$$

$$(2) \sqrt{g' \cdot 1.5 \times 10^2 \text{ m}} = 1.2 \times 10^{-1} \text{ m/s.}$$

$$(3) \sqrt{2g' \cdot 1.5 \times 10^2 \text{ m}} = 1.8 \times 10^{-1} \text{ m/s.}$$

注 13  $g$  は地球上の重力加速度で  $9.8 \text{ m/s}^2$  である。

注 14 このイトカワの表面における引力の弱さが試料採取の困難さの大きな原因であった。

$$(4) \frac{1}{2}mv_2^2 = mgh \text{ より } \text{注 } 13, h = 1.65 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.7 \times 10^{-3} \text{ m} \text{ となる. すなわち, } 2 \text{ mm 程度「ジャンプ」できる人ならばイトカワの引力圏から足の力だけで脱出することができる } \text{注 } 14.$$

(5) 車輪が有効なためには、車輪が路面から滑らないように十分な摩擦力が必要である。しかしながら、リュウグウのように重力が地上の 8 万分の 1 しかないような環境では、垂直抗力が小さく十分な摩擦力は期待できない。したがって、車輪は有効な移動手段ではない。

探査機はローバー内のモーターの回転によって発生したトルクによってローバーを回転させ、小惑星表面との反力でホップするという方法が取られている。

問題 11.6<sup>♡</sup>

$$(1) \text{人工衛星上で力のつりあいを考えると, } \frac{GMm}{R^2} - m \frac{v_1^2}{R} = 0 \text{ であ}$$

る。したがって、 $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$  である。

(2) 面積速度一定の法則  $Rv_2 = 2Rv$  より、 $v = \frac{1}{2}v_2$

(3) 力学的エネルギー保存を点 A と B で考えると、 $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_2}{2}\right)^2 - \frac{GMm}{2R}$  したがって、 $v_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{GM}{R}}$

(4)  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  となる。

問題 11.7♡

(1) 地球の自転の周期と同じであるから、 $(60 \text{ s/min}) \cdot (60 \text{ min/h}) \cdot 24 \text{ h} = 8.6 \times 10^4 \text{ s}$ 。

(2)  $2\pi / (8.6 \times 10^4 \text{ s}) = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ 。

(3) 静止衛星と一緒に動く観測者からみる。万有引力と遠心力のつりあいを考えて  $\frac{GMm}{r^2} = mr\omega^2$  より、 $r = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} = (76 \times 10^{21} \text{ m}^3)^{1/3} = 4.2 \times 10^7 \text{ m}$ 。

問題 11.8♡

(1) 惑星と太陽を結ぶ線に垂直な惑星の速度の成分は  $v \sin \theta$  である。したがって、十分小さな時間  $t$  の間に太陽と惑星を結ぶ線が掃く面積は  $\frac{1}{2}rvt \sin \theta$  となる。したがって面積速度は  $\frac{1}{2}rv \sin \theta$  である。

(2) Q と T では、 $\theta = \pi/2$  である。したがって、 $r_Q v_Q = r_T v_T$  が成り立つ。

問題 11.9

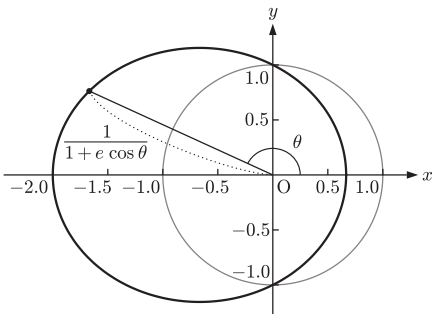


図 8  $r = \frac{1}{1 + e \cos \theta}$  で  $e = 0.5$  の場合。

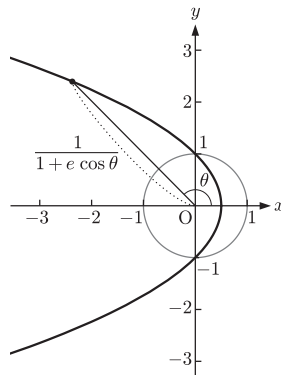


図 9  $r = \frac{1}{1 + e \cos \theta}$  で  $e = 1$  の場合。

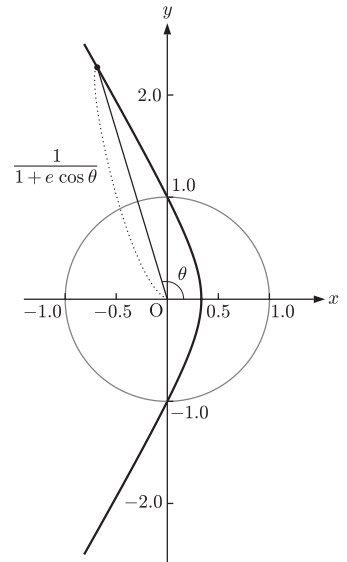


図 10  $r = \frac{1}{1 + e \cos \theta}$  で  $e = 2$  の場合。

問題 11.10  $\spadesuit$ 

- (1) 万有引力は中心力なので、その力のモーメント  $\vec{N}$  は  $\vec{N} = \vec{r} \wedge \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$  からゼロである。これは、角運動量が保存されることであり、運動が太陽を含む平面に拘束されることがわかる。
- (2)  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  を動径方向と接線方向の単位ベクトルとすると、角運動量  $\vec{L}$  は以下のように表される。

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = (\vec{e}_r r) \wedge (\vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta) = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$$

ただし、 $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$  であることに注意。

$\vec{L}$  は一定であるから、 $h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$  は時間によらず、一定である。

- (3) 重力の位置エネルギーは  $-\frac{GMm}{r}$  である。一方、運動エネルギーは
- $$\frac{1}{2} m \left( \left( \vec{e}_r \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( \vec{e}_\theta r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} m \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( \frac{h}{r} \right)^2 \right)$$

これらの和

$$E(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2} m \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( \frac{h}{r} \right)^2 \right)$$

が力学的エネルギー  $E(r)$  である。

- (4)  $\frac{\partial E(r)}{\partial r}$  を計算すると、

$$\frac{\partial E(r)}{\partial r} = GMmr^{-2} - mh^2r^{-3} = mr^{-2} (GM - h^2r^{-1})$$

となる。ただし、 $\frac{dr}{dt}$  は  $r$  にあらわには依存していないので、その  $r$  による偏微分はゼロである。したがって、 $r_{\min} = \frac{h^2}{GM}$  のとき、極小値をとる。

そのときのエネルギーは  $E(r_{\min})$  を計算することによって、 $E_0$  を得ることができる。

$$\begin{aligned} E(r_{\min}) &= -\frac{GMm}{h^2/GM} + \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \frac{h^2}{h^4/(G^2M^2)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{G^2M^2}{h^2} + \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。第二項は必ず 0 以上なので、 $E_0 = -\frac{1}{2} \frac{G^2M^2}{h^2}$  である。

- (5)  $E(r)$  の式に  $r_1$  あるいは  $r_2$  を代入する。ただし、 $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) は最

大または最小なのでそのとき  $\frac{dr_i}{dt} = 0$  である。したがって、

$$E = -\frac{GMm}{r_i} + \frac{1}{2}m \left( \frac{h}{r_i} \right)^2$$

整理すると、

$$Er_i^2 + GMmr_i - \frac{1}{2}mh^2 = 0$$

となる。これを解くと

$$r_i = \frac{-GMm \pm \sqrt{(GMm)^2 + 2Emh^2}}{2E}$$

が得られる。  $E < 0$  なので、  $r_i$  は正の値を持つ。

$$\begin{aligned} (6) \quad \int_0^T \frac{1}{2}m \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 dt &= \int_0^T \frac{1}{2}m \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt \\ &= \left[ \frac{1}{2}m\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right]_0^T - \int_0^T \frac{1}{2}m\vec{r} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} dt \\ &= \left[ \frac{1}{2}m\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right]_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \vec{r} \cdot \vec{F} dt \end{aligned}$$

である。  $\left[ \frac{1}{2}m\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right]_0^T$  は有限なので、その長時間平均はゼロに近づく。したがって、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}m \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 dt = -\frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \vec{r} \cdot \vec{F} dt$$

となる。すなわち、  $A = -\frac{1}{2}$  である。

$$\begin{aligned} (7) \quad \int_0^T \vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) dt &= - \int_0^T \vec{r} \cdot \frac{GMm\vec{r}}{r^3} dt = - \int_0^T \frac{GMm}{r} dt \text{ より,} \\ \langle \vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \rangle &= \left\langle -\frac{GMm}{r} \right\rangle \end{aligned}$$

である。前問の結果とあわせて、  $-2\langle K(r) \rangle = \left\langle -\frac{GMm}{r} \right\rangle$  である

ことがわかる。  $E$  は定数で、  $E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}m \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2$  であるから、その長時間平均は

$$\begin{aligned} E &= \left\langle -\frac{GMm}{r} \right\rangle + \langle K(r) \rangle = -2\langle K(r) \rangle + \langle K(r) \rangle \\ &= -\langle K(r) \rangle \end{aligned}$$

である。したがって、  $C = -1$  である。

- (8)  $E > 0$  のときには、無限遠点に行っても速度は有限である。すなわち無限の彼方に行ってしまう。小天体は無限遠にいる時間が無限に長いと考えられるので、 $\left\langle -\frac{GMm}{r} \right\rangle = 0$  と期待される。したがって、 $E = \langle K(\vec{r}) \rangle$  となる。