

波の性質

日常は、光や電波などの電磁波から水の波、音波など波に満ちている。ここでは、波を特徴付ける基本的な量や波が重なったり反射したりするときの振る舞いについて考える。

2.1 波

ある場所に生じた振動が次々とまわりに伝わる現象を波または波動^{注1}という。波を伝える物質を媒質といい、振動の源を波源という。ここで注意しなければならないのは、媒質そのものが動いていくのではなく、媒質の振動が伝わっていくことである。

図 2.1 のように、紐の右端を壁に固定し、すばやく左端を 1 回上下に動かす。動きが左端から右端に伝わっていく。ここで、紐が媒質となり左端が波源である。ある瞬間の波の形を波形といい、この波形が移動する速さを波の速さという^{注2}。図 2.1 のような波では、媒質全体に媒質の変位が広がっている訳ではなく孤立波と呼ばれる。

注 1 水面に石を落とした場合の波紋の広がりをイメージすると良い。

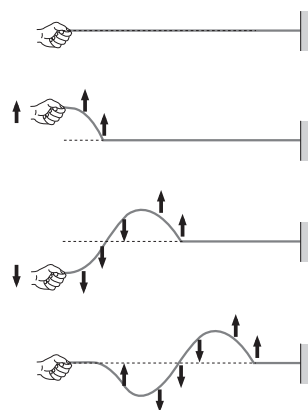


図 2.1 紐の右端は壁に固定し、すばやく左端を上下に 1 回振動する。振動が左端から右端に伝わっていく。紐そのものが右に動くのではない。

注 2 媒質の移動する速さではない。

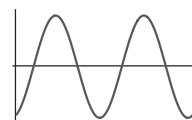
2.2 単振動と波

図 2.2 は等速円運動と単振動の関係を示している。等速円運動を行う物体の射影は単振動になり、等速円運動の 1 回転に対応する往復運動が単振動における 1 回の振動である。このような波源の振動が何回も起こる場合を考えよう (図 2.3 参照)。1 回の振動に要する時間 T [s] を周期、1 秒間あたりの振動の回数 f [Hz] を振動数という。振動数の単位はヘルツ (記号 Hz) である。

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.1)$$

波がない状態からの媒質の位置の変化を変位といい、その最大値を振幅という。波源の単振動が波として伝わると、波の波形は図 2.3 のような正弦曲線になる。波形が正弦曲線の波のことを正弦波という^{注3}。波形のもっとも高いところを山、もっとも低いところを谷という。隣り合う山と山 (谷と谷)

注 3 波というと正弦波のことを考える場合は多い。



の間隔を波長といい、山の高さ（谷の深さ）が振幅である。

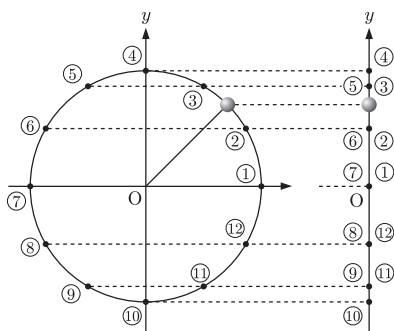


図 2.2 等速円運動を行っている物体を射影すると、単振動を行う影を得ることができる。

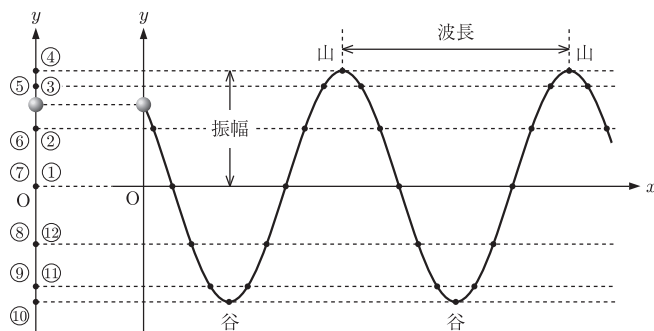


図 2.3 波源が単振動すると、連続的な波が生じる。

図 2.3 より、波源が 1 回振動する間に波は 1 波長進むことがわかる。波の速さ v [m/s]、波長を λ [m] とすると、以下の関係がある。

$$v = f\lambda = \frac{\lambda}{T} \quad (2.2)$$

2.3 波を表す式

注 4 y は引数 x, t をもつ関数である。

位置 x [m]、時刻 t [s] におけるある波の変位を $y(x, t)$ [m] と表すこととする。正弦波の時刻 $t = 0$ s における波形は、その波長を λ [m]、振幅を A [m] とすると、

$$y(x, 0 \text{ s}) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \right) \quad (2.3)$$

と表すことができる。ただし、 $y(0 \text{ m}, 0 \text{ s}) = 0 \text{ m}$ であるとした。この波形が x 軸方向に速さ v [m/s] で動く場合を考える。別のいい方をすると、 $y(x, 0 \text{ s})$ が t [s] 後には vt だけ平行移動するのである。この平行移動を式で表すと、 t 後には $y(x - vt, 0 \text{ s})$ になることを意味している。よって、式 (2.3) より、

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y(x - vt, 0 \text{ s}) \\ &= A \sin 2\pi \left(\frac{x - vt}{\lambda} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

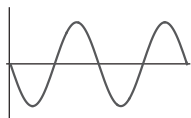
注 5 式 (2.4) は高校では「発展」扱いであったが、便利なので理解すべきである。

注 6 ただし、 $y(0 \text{ m}, \Delta t) < 0 \text{ m}$ 、 $0 \text{ s} < \Delta t \ll 1 \text{ s}$ である。

となる注 5。式変形には $v = \frac{\lambda}{T}$ を用いた注 6。

波では、媒質のある点は同じ運動を繰り返している。その点が 1 周期の中でどのような振動状態（変位とその速度）にあるかを示すために、位相という量が用いられる。式 (2.4) を見ればわかるように、

$$2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (2.5)$$



が決まれば、媒質の振動状態がわかる。すなわち、式(2.5)が位相である。 n を整数として、ある時刻 t のときに媒質のある2点で

$$2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) - 2\pi\left(\frac{x_2}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = 2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda} - \frac{x_2}{\lambda}\right) = 2\pi n$$

の関係があれば、振動状態は同じ^{注7}、すなわち $y(x_1, t) = y(x_2, t)$ なので同位相という。一方、

$$2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) - 2\pi\left(\frac{x_2}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = 2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda} - \frac{x_2}{\lambda}\right) = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

ならば、 $y(x_1, t) = -y(x_2, t)$ なので逆位相という。

注7 三角関数の周期は 2π である。

例題 2.1 図 2.3 の波の振幅は 1.0 m、波長は 2.0 m、周期は $T = 4.0 \times 10^{-1}$ s であった。

- (1) この波の振動数 f [Hz] および波の速さ v [m/s] を求めよ。
- (2) 時刻 $t = 0$ s に山であった点の変位の時間変化を表す式 $y(t)$ [m] を求めよ。

解 (1) 振動数および波の速さはそれぞれ、

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4.0 \times 10^{-1} \text{ s}} = 2.5 \text{ Hz},$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2.0 \text{ m}}{4.0 \times 10^{-1} \text{ s}} = 5.0 \text{ m/s}$$

となる。

- (2) $t = 0$ s のときに山であることより、 $A = 1.0$ m を振幅として、

$$y(t) = A \cos 2\pi \frac{t}{T} = (1.0 \text{ m}) \cdot \cos \left(2\pi \frac{t}{4.0 \times 10^{-1} \text{ s}} \right)$$

$$= (1.0 \text{ m}) \cdot \cos \{ 2\pi (2.5 \text{ Hz}) \cdot t \}$$

となる。

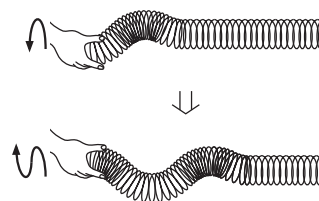


図 2.4 横波。

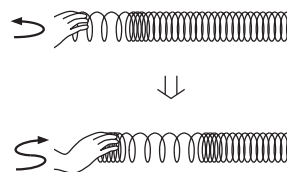
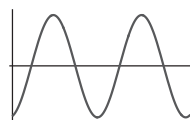


図 2.5 縦波。

2.4 縦波と横波 ♡

波には、横波(図 2.4)と縦波(図 2.5)がある。横波は波の進行方向と垂直な方向に媒質の振動が起こる波で、縦波は波の進行方向と同じ方向に媒質の振動が起こる波である。縦波では、体積^{注8}変化に対して復元力がはたらけば伝わるができる。すなわち、縮まれば体積を大きくしようとする力がはたらき、膨張すれば体積を小さくするような力がはたらけばよい。気体の場合はボイルの法則から、このような復元力があることがわかるだろう。液体や固体にもこのような力がはたらく。また、体積変化は密度の変化とい

注8 この体積は物質が占める空間という意味で通常の体積の概念より広い概念である。バネの例を参照。



注9 地震波のP波は縦波、S波は横波である。P波とS波の伝わり方の違いから、地球の中心には液体の核があることが知られている。

注10 縦波が横波に変わる訳ではないので、注意が必要である。作問者がこのことを勘違いをして、大学入試問題として成立しなくなったことがあった。

うこともできるので、縦波は疎密波とも呼ばれる。横波が伝わるのは、媒質が進行方向に対して垂直方向に変位したときにも、復元力がはたらく場合である。このような力は液体中や気体中では生じないので、横波は伝わる事ができず、固体中のみを伝わる^{注9}。

縦波では波の進む方向と変位の方向が同じである。そのため、波の進行と変位を同時に表すのは煩雑である(図2.6参照)。そこで、進行方向に対して仮想的な y 軸を考えて、変位をこの y 軸に対して表記することがある。このような表示方法を縦波の横波表示という^{注10}。密になるのは正の変位から負の変位に変わるところで、疎になるのは変位が負から正に変わるところである。

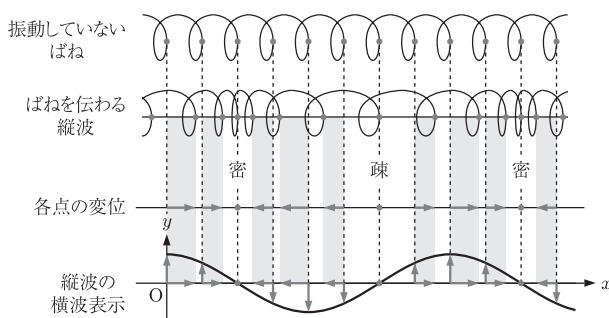


図2.6 縦波の変位の表示法。

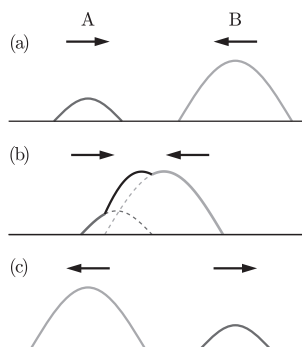


図2.7 波の(b)重ね合わせと(c)独立性。

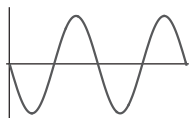
注11 小物体の衝突とは異なる振る舞いである。

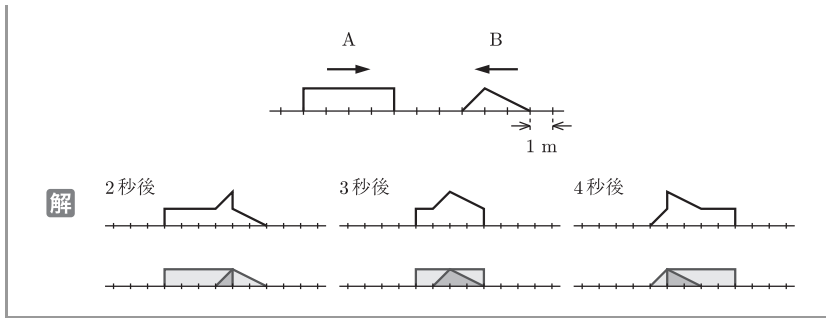
波が伝わるということは、動いていなかった媒質が振動するようになることである。媒質は質量を持つので、波が伝わるとは振動に伴う運動エネルギーが伝わることである。このようなエネルギーを波のエネルギーという。

2.5 波の重ね合わせ♡

二つの波、波1と波2が重なりあうとき(図2.7(a)参照)、媒質の変位はそれぞれの波の変位の和 $y_1(x, t) + y_2(x, t)$ となり、図2.7(b)のような波形が観察される。このような関係を重ね合わせの原理といい、重なり合っている波を合成波という。また、波が通りすぎた後は、図2.7(c)のようにお互いの影響を受けることなく進行する。この性質のことを波の独立性という^{注11}。

例題2.2 図のような二つの波A、Bが互いに逆向きに速さ1 m/sで進む。図の時刻から2秒後、3秒後、4秒後の波形をそれぞれ図示せよ。





2.6 定常波♡

波長、振幅、周波数が等しく互いに逆向きに進む二つの正弦波の合成波は図 2.8 のようになる。全く振動しない部分（節）と大きく振動する部分（腹）が現れ、腹と腹（節と節）の間隔は元の波の波長の半分である。また、この腹（節）は位置を変えないので、定常波または定在波（進行しない波）と呼ばれる。しかしながら、媒質の振動は起こっていることに注意すること。

2.7 波の反射♡

波は、媒質の端や異なる媒質との境界で反射する。端や境界に向かう波を入射波、そこから戻ってくる波を反射波という。反射波の振動は反射端の振動によって決まり、その反射端の振動は入射波の振動によって決まっている。したがって、入射波と反射波の振動数は等しい。また、入射波と反射波は進行方向が異なっているだけなので、その速度の大きさは同じである。

反射端には 2 種類ある。反射端の媒質が自由に動くことができる自由端と、固定されている固定端である。自由端の場合には反射端における入射波と反射波の位相は同じで、固定端の場合には 180° (π rad) だけ変化する。

それぞれの場合の反射波は以下のようにして求められる。

- 自由端 (図 2.9(a))

反射端がないとして、入射波を延長して描く^{注 12}。この延長した波に対して、反射端を含み進行方向に垂直な面に対称となる波を描く。

- 固定端 (図 2.9(b))

反射端がないとして、入射波を延長して描く。延長した波の変位の正負を逆転した波を描く^{注 13}。この反転した波に対して反射端を含み進行方向に垂直な面に対称となる波を描く。

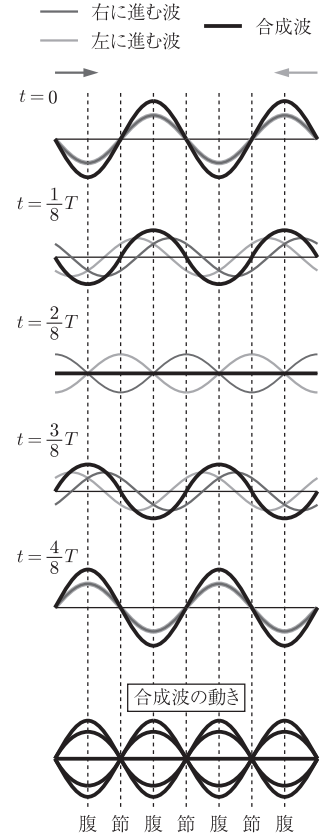


図 2.8 定常波。

— 入射波 — 反射波
— 合成波

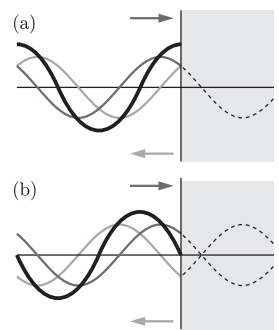
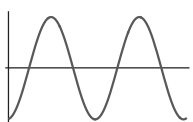


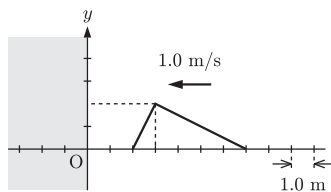
図 2.9 波の反射。(a) 自由端と (b) 固定端。

注 12 反射端で位相は変化しないことに対応する。

注 13 反射端で位相が 180° 度変化する事に対応する。



例題 2.3 図のような入射波が速さ 1.0 m/s で進んでおり、 y 軸上にある境界面で反射する。図は $t = 0.0 \text{ s}$ の入射波を描いたものである。



(1) y 軸の位置で波が自由端反射する場合。

(a) $t = 3.0 \text{ s}$ での入射波、反射波および入射波と反射波の合成波を描け。

(b) $t = 5.0 \text{ s}$ での入射波、反射波および入射波と反射波の合成波を描け。

(2) y 軸の位置で波が固定端反射する場合。

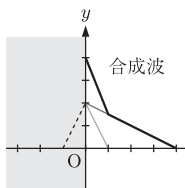
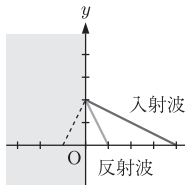
(a) $t = 3.0 \text{ s}$ での入射波、反射波および入射波と反射波の合成波を描け。

(b) $t = 5.0 \text{ s}$ での入射波、反射波および入射波と反射波の合成波を描け。

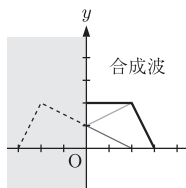
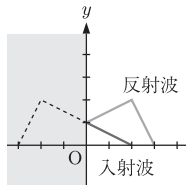
解

(1) 自由端反射

(a) $t = 3.0 \text{ s}$

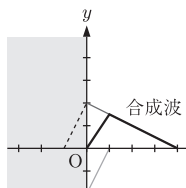
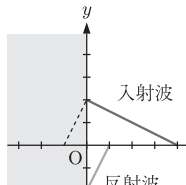


(b) $t = 5.0 \text{ s}$

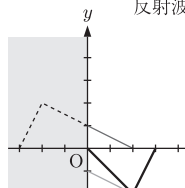
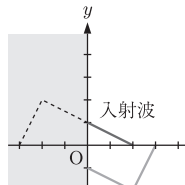


(2) 固定端反射

(a) $t = 3.0 \text{ s}$

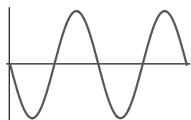


(b) $t = 5.0 \text{ s}$



2.8 波の干渉・反射・屈折・回折

今までは直線上を進行する波を考えていた。ここでは、いろいろな方向に進む波を考える。波の進む向きを表すために、同位相の点を連ねてできた線



または面（波面）を用いる。波面は波の進む向きに対して垂直である。1点の波源から広がる波は、平面上ならば波面は円、3次元空間内ならば球面となり、球面波という。一方、波源が直線状あるいは面状な場合には波面は直線あるいは平面になり平面波という^{注14}。

図2.10のように、同位相で振動する二つの波源からの球面波の重ね合わせを考えよう。二つの波源 S_1 と S_2 からの波がある点 P で同位相になれば二つの波は強め合うし、逆位相^{注15} ならば弱め合う。このように、波が互いに強め合ったり弱め合うあったりする現象のことを波の干渉という。ある点での位相が同位相になるか逆位相になるかは、波長 λ だけ波が移動すると位相は $2\pi \text{ rad}$ だけ変化することより、以下の式で判定できる。 m は整数である。

$$\text{同位相} : \overline{PS_1} - \overline{PS_2} = m\lambda \quad (2.6)$$

$$\text{逆位相} : \overline{PS_1} - \overline{PS_2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (2.7)$$

2.9 ホイヘンスの原理 ◇

平面上あるいは3次元空間上の波の進み方を説明するために、ホイヘンスは「波面上の各点からは、それを波源とする球面波（素元波）が発生する。素元波は元の波の進む速さと等しい速さで広がり、すべての素元波に共通する面が次の瞬間の波面になる」というホイヘンスの原理を提唱した（図2.11, 2.12 参照）。

ホイヘンスの原理により、反射、屈折および回折を統一的に理解できる。

● 反射

壁（反射面）に平面波が入射すると、波は反射する。反射面の法線と入射する波の進む向きがなす角（入射角）を θ 、反射する波の進む向きがなす角（反射角）を θ' とすると、入射角と反射角は等しい、すなわち、

$$\theta = \theta' \quad (2.8)$$

という反射の法則をホイヘンスの原理を用いて以下のように説明することができる（図2.13 参照）。

入射波の波面 A_1B_1 の左端が壁（反射面）に達した瞬間を時刻 $t = 0 \text{ s}$ とする。この波面上の A_1 が壁上の点 A_2 に達するまでの時間を $\tau [\text{s}]$ とする。また、波の速さを $v [\text{m/s}]$ とする。 $0 \text{ s} \leq t \leq \tau$ の間に、 B_1A_2 上の B_1 に近い点から次々と素元波は発生する。これら素元波に共通して接する面が反射波の波面になる。この波面

注14 大きな半径の球面波のごく一部は、平面波と近似することができる。

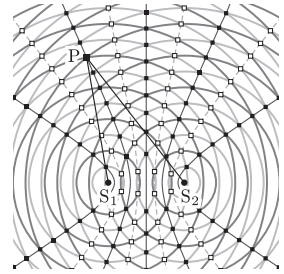


図2.10 球面波の干渉。黒線はある瞬間の波の山、灰色線は谷を表す。■の点では波は強め合い、□の点では弱め合う。

注15 異なる二つの波の位相が $\pi \text{ rad}$ だけ異なる。

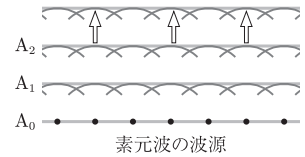


図2.11 平面波。

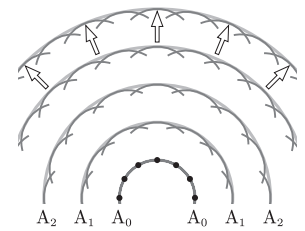


図2.12 球面波。

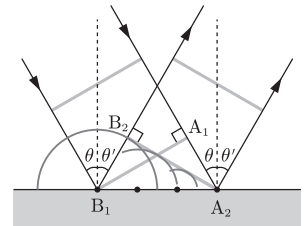
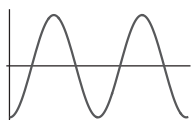


図2.13 反射の法則。



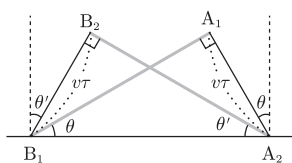


図 2.14 ホイヘンズの原理による反射の法則の説明.

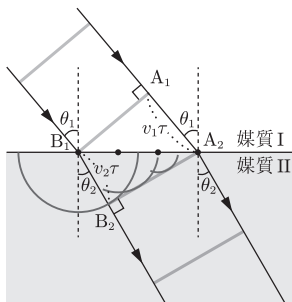


図 2.15 屈折の法則.

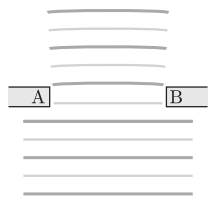


図 2.16 回折現象 (a). 開いている部分が波長よりも長いと、波は直進する.

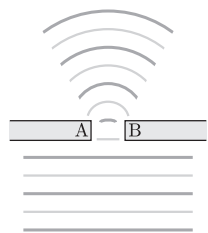


図 2.17 回折現象 (b). 開いている部分が波長程度のとき、波は壁の裏側にも回り込む.

は、中心が B_1 で半径 $v\tau = \overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$ の円への A_2 からの接線 B_2A_2 である. 三角形 $A_1B_1A_2$ と三角形 $B_2A_2B_1$ は合同なので, $\theta = \angle A_1B_1A_2 = \angle B_2A_2B_1 = \theta'$, すなわち入射角と反射角が等しい, ことがわかる.

● 屈折

平面波が二つの異なる媒質 I, II の境界面に向かって媒質 I から媒質 II に斜めに入射すると, 境界面で進行方向が変化する. この現象を屈折といい, 屈折して進む波を屈折波という. 屈折波の進行方向と媒質の境界面の法線のなす角を屈折角という. 入射角を θ_1 , 屈折角を θ_2 , 媒質 I の中での波の速さと波長を v_1 [m/s], λ_1 [m], 媒質 II の中での波の速さと波長を v_2 [m/s], λ_2 [m] とすると,

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (2.9)$$

で表される屈折の法則が成り立つ. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_{12}$ を媒質 I に対する媒質 II の屈折率という. 屈折の法則も, ホイヘンズの原理を用いて以下のように説明することができる (図 2.15 参照).

入射波の波面 A_1B_1 の左端が境界面に達した瞬間を時刻 $t = 0$ s とし, この波面上の A_1 が境界面上の点 A_2 に達するまでの時間を τ [s] とする. $0 \leq t \leq \tau$ の間に, 媒質 II に B_1A_2 上の B_1 に近い点から次々と素元波は発生する. これら素元波に共通して接する面が屈折波の波面になる. この波面は, 中心が B_1 で半径 $v_2\tau = \overline{B_1A_2}$ の円への A_2 からの接線 B_2A_2 である. 三角形 $A_1B_1A_2$ と三角形 $B_2A_2B_1$ では $\overline{B_1A_2}$ は共通なので, $\overline{B_1A_2} = \frac{v_1\tau}{\sin \theta_1} = \frac{v_2\tau}{\sin \theta_2}$ が成り立ち, 屈折の法則が導かれる.

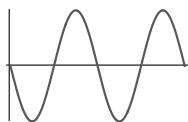
● 回折

AB 間だけ開いた壁に対して, 波面がその壁に平行な平面波を入射する. $\overline{AB}$ が波長より十分長いと通過した波は直進するが, $\overline{AB}$ が波長と同程度以下ならば, 波は壁の裏側にも回り込む. このような現象を回折という. これは AB 線上で素元波が発生すると考えると説明できる.

2.10 正弦波の反射と定常波

ここでは, 先に定性的に考察した波の反射と定常波について, 正弦波に注目して考えよう. x 軸の負の方向から原点に向かって進む波^{注 16}

注 16 正の速度の波である.



$$y_i(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

が $x = 0$ m において反射する場合を考える.

● 自由端 (図 2.18)

反射がないとして延長した波形を原点を含み x 軸と垂直な直線で折り返す ($x \rightarrow -x$) と, 反射波 $y_r(x, t)$ を得ることができる. すなわち,

$$\begin{aligned} y_r(x, t) &= y_i(-x, t) = A \sin 2\pi \left(-\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \\ &= -A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) \end{aligned}$$

が反射波になる.

● 固定端 (図 2.19)

反射がないとして延長した波形を x 軸に対して反転した ($-y_i(x, t)$ を作る) 後に, 原点を含み x 軸と垂直な直線で折り返す ($x \rightarrow -x$) と, 反射波 $y_r(x, t)$ を得ることができる. すなわち,

$$\begin{aligned} y_r(x, t) &= -y_i(-x, t) = -A \sin 2\pi \left(-\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \\ &= A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right) \end{aligned}$$

が反射波になる.

次に, 定常波について考えよう. お互いに反対方向に進む振幅, 周波数, 速さが同じ二つの正弦波

$$y_1(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

$$y_2(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + vt) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} \right)$$

を考える. この二つ波の合成波は三角関数の公式を用いて^{注17},

$$y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2A \sin \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right)$$

となることがわかる. 変数 x, t は独立しており, 振幅の最大値になる x 座標は時間の関数ではない. すなわち, この波は進行波ではないことがわかる. 振幅が最大になる x 座標は $\lambda/2$ の整数倍になるので, 腹の間隔は $\lambda/2$ である^{注18}.

2.11 波動方程式 ◆

弦の運動を支配する微分方程式を導出しよう. 弦は張力 F_t で張られているとし, 図 2.20 のように弦の変位を曲線 $y(x, t)$ で表す. 弦の微小部分 (x と $x + dx$ の間) に対する運動方程式を考える.

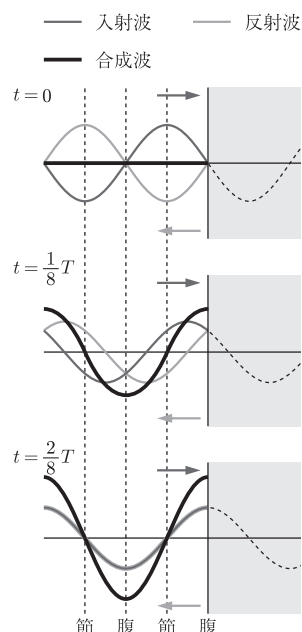


図 2.18 自由端での反射.

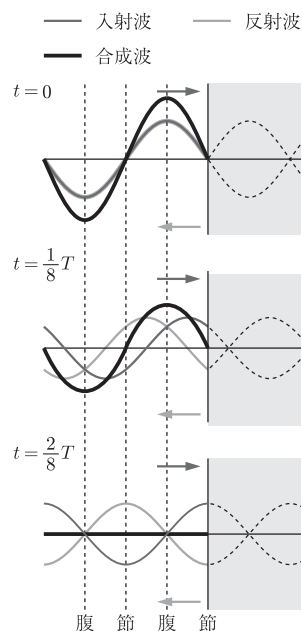
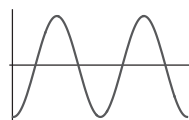


図 2.19 固定端での反射.

注17 $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

注18 $|\sin \theta| = 1$ (最大) となるのは π ごとであって, 三角関数の周期 2π ではない.



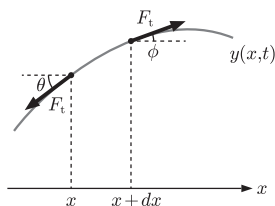


図 2.20 弦の微小部分にはたらく力.

この弦の微小区間の質量はこの弦の線密度を ρ とすると、 ρdx である。この弦の微小部分にはたらく力は、次の表のように整理できる。

	x 軸に平行な成分	x 軸に垂直な成分
左端	$-F_t \cos \theta$	$-F_t \sin \theta$
右端	$F_t \cos \phi$	$F_t \sin \phi$
和	0	$F_t(\sin \phi - \sin \theta)$

弦の変位が十分小さい場合には、 θ と ϕ の大きさは 1 に比べて十分小さいので、 $\cos \theta = \cos \phi$ と近似できる。したがって、この微小区間にはたらく力の x 成分はつり合っている。一方、 x 軸に垂直な成分の力がつり合わず、変位を小さくする力（復元力）がはたらくことになる。

この微小区間に対して運動方程式を立てると、

$$F_t(\sin \phi - \sin \theta) = \rho dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

となる。ここで、

$$\sin \theta = \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)_x, \sin \phi = \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)_{x+dx}$$

注 19 $(*)_x$ は $*$ の x における値を示す。

なので注 19, 20, 運動方程式は、

$$\frac{F_t}{\rho} \frac{\left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)_x}{dx} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

となる。 $\frac{\left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)_x}{dx}$ は、 $dx \rightarrow 0$ の極限で $y(x, t)$ を x で

2 回微分（偏微分）したものであるので、 $\frac{F_t}{\rho} = v^2$ とおくと、

$$v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

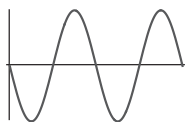
が得られる。これを波動方程式という。ここで、 v は波の速さを与えることが以下の考察からわかる。

x と t が $x - vt$ のように結びついている関数 $g(x - vt)$ は波動方程式 (2.10) の解である注 21 ことが以下の考察によってわかる。ここで、 $g(x - vt)$ は任意の関数であることに注意する。 $g(x - vt)$ が表す波は孤立波でも良いし、正弦波のような空間に広がっている波でも良い。

$$\frac{\partial^2 g(x - vt)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} g'(x - vt) = g''(x - vt)$$

$$\frac{\partial^2 g(x - vt)}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial t} g'(x - vt) = v^2 g''(x - vt)$$

注 21 ある関数がある（偏）微分方程式を満たす場合、その関数をその（偏）微分方程式の解という。



ただし、 $g'(z) = \frac{\partial g(z)}{\partial z}$, $g''(z) = \frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2}$ とする。同様に、関数 $g(x+vt)$ もこの（偏）微分方程式の解であることがわかる。以上のことより、時間が経つにつれて関数（ここでは、変位のパターン、すなわち波形）が速さ v で正または負の方向へ平行移動するならば、それは波動方程式の解であることがわかる。

また、 $y_1(x, t)$ と $y_2(x, t)$ がともに波動方程式 (2.10) の解ならば、これらの波の線形結合 $\alpha_1 y_1(x, t) + \alpha_2 y_2(x, t)$ も解になる。このような性質を持つ偏微分方程式のことを線形偏微分方程式といい、波の重ね合わせと独立性はこの線形性の表れである。

例題 2.4 正弦波 $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ が、波動方程式

$$v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

の解となるための k と ω の関係を式で表せ。

解 $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ を波動方程式に代入して、

$$\text{左辺} = -A\omega^2 \sin(kx - \omega t)$$

$$\text{右辺} = v^2 \{-Ak^2 \sin(kx - \omega t)\}$$

となるので、方程式の解となるためには

$$\omega^2 = v^2 k^2$$

の関係を満足していればよい。なお、 k は波数と呼ばれ $k\lambda = 2\pi$ となる。

2.12 減衰振動と強制振動 ◆

減衰振動^{注 22} 単振動を表す微分方程式は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \quad (2.11)$$

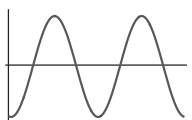
であった。ただし、 $\omega_0 > 0$ とする。この微分方程式を解くと

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (2.12)$$

が解になる。ここで、 A と ϕ は積分定数で、初期条件に応じて決まる。この微分方程式では振動が永遠に続いてしまう。そこで、振動がだんだん小さくなる現実に合うモデル

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.13)$$

注 22 たとえば、鐘をついた後に鐘の振動がゆっくりと小さくなっていく現象。鐘の振動が小さくなっていくことは、鐘からの音がだんだん小さくなっていくことからわかる。除夜の鐘を思い出すこと。



注 23 熱力学で出てきた比熱比とは異なっている。

を考えよう。 γ は、エネルギーの散逸（ある種の摩擦）を導入するための定数である 注 23。

$x = e^{\lambda t}$ とおいて、方程式を満たす λ を探すことによって、微分方程式を解こう。式 (2.13) に代入すると、

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$$

となる。ここで、 $e^{\lambda t} \neq 0$ なので、

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.14)$$

でなければならない。言い換えると、式 (2.14) を満たす λ が求まれば、式 (2.13) の解が得られたことになる。2 次方程式の解の公式より、

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (2.15)$$

となる。その解を $\lambda_{\pm}$ と書くことにすると、一般解は

$$x(t) = ae^{\lambda_+ t} + be^{\lambda_- t} \quad (2.16)$$

となる。 $x(t)$ は有限の値を持たないと物理的には意味がないので、 $t \rightarrow \infty$ で $x(t) \rightarrow 0$ になるように、 $\gamma > 0$ の場合を考える。

具体的に $x(t)$ がどのような関数になるかを考えるために、2 次方程式 (2.14) の判別式の正負に応じて場合分けを行う。

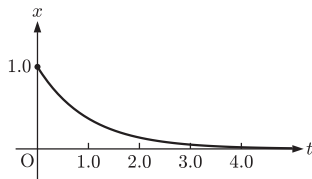


図 2.21 $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = 0.1$, $\gamma = 1$ の場合。 $x(t) = \frac{e^{-(1+0.1)t} + e^{-(1-0.1)t}}{2}$ になる。

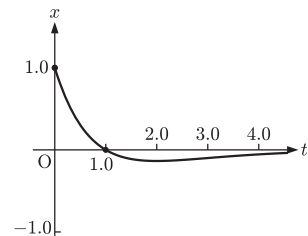


図 2.22 $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = 0$, $\gamma = 1$ の場合。 $x(t) = (1-t)e^{-t}$ になる。

- $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

$\lambda_{\pm}$ は実数なので $x(t)$ を描くことができ、指数関数的に変化することがわかる（図 2.21 参照）。

- $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$

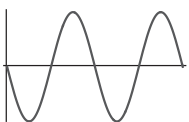
微分方程式 (2.13) の解の一つは $x(t) = ae^{-\gamma t}$ である。この解とは独立な別の解を $x_2(t) = u(t)e^{-\gamma t}$ とおいて求める。 $x_2(t)$ を微分方程式 (2.13) に代入し、

$$\begin{aligned} & \left(\gamma^2 e^{-\gamma t} u(t) - 2\gamma e^{-\gamma t} \frac{du(t)}{dt} + e^{-\gamma t} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \right) \\ & + 2\gamma \left(-\gamma e^{-\gamma t} u(t) + e^{-\gamma t} \frac{du(t)}{dt} \right) + \omega_0^2 e^{-\gamma t} u(t) = 0 \\ & e^{-\gamma t} \left(\frac{d^2 u(t)}{dt^2} - (\gamma^2 - \omega_0^2) u(t) \right) = 0 \end{aligned}$$

整理すると 注 24,

$$e^{-\gamma t} \left(\frac{d^2 u(t)}{dt^2} \right) = 0$$

となる。したがって、 $\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = 0$ を満たす $u(t) = ct + d'$ を用いた $x(t) = (ct + d')e^{-\gamma t}$ が、もう一つの独立な解になる。ここで、 c と d'



は積分定数である。したがって、一般解は

$$x(t) = (ct + d)e^{-\gamma t} \quad (2.17)$$

となる (図 2.22 参照)。ただし、 $d = d' + a$ である。

- $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$

$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ と書き換えると一般解は^{注 25},

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} \left(a'e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t} + b'e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t} \right) \\ &= e^{-\gamma t} \left(a \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t \right) + b \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t \right) \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

となる (図 2.23 参照)。すなわち、角振動数 $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ で振動しながら、減衰定数 γ で振幅が減衰することがわかる。特に $\omega_0 \gg \gamma$ の場合が物理的に興味深い。すなわち、振動がゆっくりと減衰する場合を表すことができる。そのときの周波数は ω_0 で近似できる。

強制振動^{注 26} 次に、角振動数 ω_f で振幅 f ^{注 27} の力が加わる場合を考えよう。考える微分方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \sin \omega_f t \quad (2.19)$$

である。左辺は微分方程式 (2.13) と同じなので、 ω_f 以外の角振動数で振動する成分は十分時間が経てば、ゼロになるはずである^{注 28}。したがって、 $x(t) = a \sin(\omega_f t - \phi_0)$ が解になるはずである。ここで、 a と ϕ_0 は定数である。微分方程式 (2.19) を満たすような a と ϕ_0 が見つければ、解が得られたことになる。この $x(t)$ を式 (2.19) に代入すると、

$$\begin{aligned} &(-a\omega_f^2 \sin(\omega_f t - \phi_0)) + 2a\gamma\omega_f (\cos(\omega_f t - \phi_0)) + a\omega_0^2 \sin(\omega_f t - \phi_0) \\ &= f \sin \omega_f t \end{aligned}$$

整理すると、

$$a(\omega_0^2 - \omega_f^2) \sin(\omega_f t - \phi_0) + 2a\gamma\omega_f (\cos(\omega_f t - \phi_0)) = f \sin \omega_f t$$

右辺の位相 $\omega_f t = (\omega_f t - \phi_0) + \phi_0$ と見なすと、

$$\begin{aligned} &a(\omega_0^2 - \omega_f^2) \sin(\omega_f t - \phi_0) + 2a\gamma\omega_f (\cos(\omega_f t - \phi_0)) \\ &= f \cos \phi_0 \sin(\omega_f t - \phi_0) + f \sin \phi_0 \cos(\omega_f t - \phi_0) \end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$a(\omega_0^2 - \omega_f^2) = f \cos \phi_0, \quad 2a\gamma\omega_f = f \sin \phi_0$$

となるように、 a, ϕ_0 を決めれば良い。この二つの式を割り算すると、

$$\tan \phi_0 = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}$$

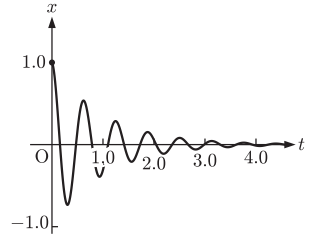


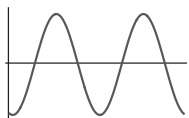
図 2.23 $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 10, \gamma = 1$ の場合。 $x(t) = e^{-t} \cos 10t$ になる。

注 25 オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いる。

注 26 たとえば、重心移動によってブランコをだんだん大きく揺らすような現象。

注 27 f は周波数ではない。

注 28 ω_f で振動する運動のエネルギーが他の ω で振動する運動のエネルギーに変化することはない。



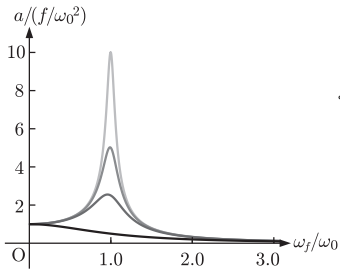


図 2.24 式 (2.20) を a を縦軸, ω_f を横軸にして, $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.05, 0.1, 0.2, 1$ の場合をプロットした. γ が小さくなるほど, ピークが鋭くなる.

注 29 外力がなければ減衰振動になる. 減衰振動で表すことができる現象は多数存在する.

注 30 小さな子供がブランコを大きく揺らすことができないのは, 式 (2.22) になるように体を動かすことができないからである. ブランコを上手にこげるように, このような数学を教える必要があるかも知れない?

が得られ a が消去できる. 一方, $\cos^2 \phi_0 + \sin^2 \phi_0 = 1$, すなわち,

$$a^2 (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4a^2 \gamma^2 \omega_f^2 = f^2$$

より, ϕ_0 を消去すると,

$$a = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}} \quad (2.20)$$

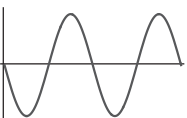
$$= \frac{f}{\sqrt{(\omega_f^2 - (\omega_0^2 - 2\gamma^2))^2 + 4\gamma^2 (\omega_0^2 - \gamma^2)}} \quad (2.21)$$

が得られる.

ω_0 に対して γ が十分小さいときがしばしば起こる^{注 29}. このとき $\omega_0^2 > 2\gamma^2$ を満たすので, 振幅 a は

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (2.22)$$

で最大になる^{注 30}. このように特定の周波数の外力に対して振幅が大きくなる現象は, 共鳴であったことに注意すること. 特に, $\omega_0 \gg \gamma$ ならば, $\omega_f \sim \omega_0$ のときに振幅が最大になる. また, そのとき $\phi_0 = \pi/2$ になる.



章末問題

問題 2.1[♡] x 軸方向に進む正弦波がある. 図 2.25 の実線は $t = 0$ s の波形を表し, $t = 0.10$ s にはじめて破線の波形となった.

- (1) この波の振幅 A [m], 波長 λ [m], 速さ v [m/s] をそれぞれ求めよ.
- (2) この波の周期 T [s], 振動数 f [Hz] をそれぞれ求めよ.
- (3) $t = 1.0$ s における y - x グラフを描け.
- (4) $x = 0.0$ m における y - t グラフを描け.
- (5) $x = 2.0$ m における y - t グラフを描け.

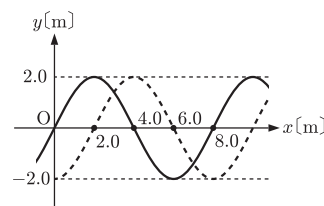


図 2.25

問題 2.2[♡] 図 2.26 は, x 軸方向に速さ 4.0 m/s で伝わる正弦波の, 原点 O ($x = 0$ m) での媒質の変位の時間変化を図示したものである.

- (1) この波の振幅 A [m], 周期 T [s], 振動数 f [Hz], 波長 λ [m] をそれぞれ求めよ.
- (2) $t = 0.0$ s における y - x グラフを描け.
- (3) $x = 2.0$ m における y - t グラフを描け.

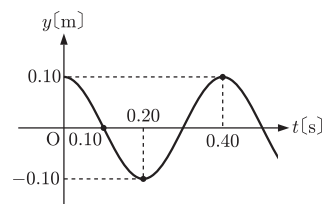


図 2.26

問題 2.3[♡] 図 2.27 は, x 軸方向に速さ 4.0 m/s で伝わる正弦波の $t = 0.0$ s での波形を表したものである.

- (1) この波の周期 T [s] を求めよ.
- (2) $t = 0.0$ s における波形を式で示せ.
- (3) $x = 0.0$ m の媒質の変位 y [m] を時刻 t [s] を用いて表せ.

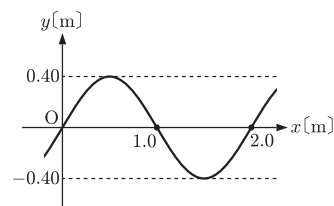


図 2.27

問題 2.4[♡] 図 2.28 は, x 軸方向に伝わる縦波の, ある時刻 t [s] における媒質の各点の変位を横波表示したものである. 次のそれぞれに当てはまる媒質の点はどこか, 当てはまる点を図の A ~ I の記号ですべて答えよ.

- (1) もっとも密な点.
- (2) もっとも疎な点.
- (3) 速度が 0 m/s の点.
- (4) 速度が x 軸の正の向きに最大となる点.
- (5) 速度が x 軸の負の向きに最大となる点.

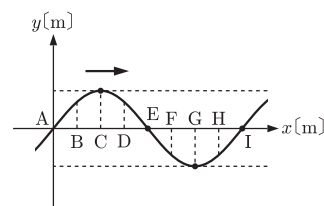
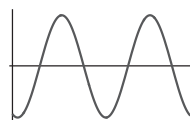


図 2.28

問題 2.5[♡] 二つの正弦波 A, B の位置 x [m], 時刻 t [s] における変位はそれぞれ,

$$\text{正弦波 A : } y_1 = (2.0 \text{ m}) \cdot \sin 2\pi \{ (2 \text{ m}^{-1}) \cdot x + (4 \text{ Hz}) \cdot t \}$$

$$\text{正弦波 B : } y_2 = (2.0 \text{ m}) \cdot \sin 2\pi \{ (2 \text{ m}^{-1}) \cdot x - (4 \text{ Hz}) \cdot t \}$$



と表されるものとする.

- (1) x 軸方向に進む波は正弦波 A と B のどちらか.
- (2) 正弦波 A と B の振幅, 波長, 周期は等しい. これらの振幅, 波長, 周期をそれぞれ求めよ.
- (3) 合成波 $y = y_1 + y_2$ を求めよ.
- (4) 合成波は定常波となる. この定常波の隣り合う腹と腹の距離を求めよ.
- (5) この定常波の周期を求めよ.

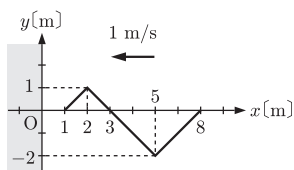


図 2.29

問題 2.6◇ 図 2.29 のような入射波が速度 -1.0 m/s で進んでおり, y 軸上にある境界面で反射する. 図は $t = 0$ s の入射波を描いたものである. 次のそれぞれの場合について, 入射波と反射波との合成波の変位を求めよ.

- (1) y 軸の位置で波が自由端反射する場合.
 - (a) $t = 3$ s での入射波, 反射波および入射波と反射波の合成波を描け.
 - (b) $t = 5$ s での入射波, 反射波および入射波と反射波の合成波を描け.
- (2) y 軸の位置で波が固定端反射する場合.
 - (a) $t = 3$ s での入射波, 反射波および入射波と反射波の合成波を描け.
 - (b) $t = 5$ s での入射波, 反射波および入射波と反射波の合成波を描け.

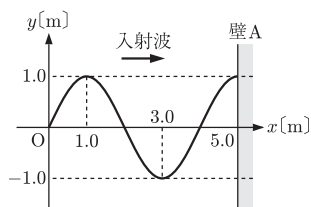


図 2.30

問題 2.7◇ 媒質中を正弦波が速度 1.0 m/s で進み, 壁 A で反射する. 図 2.30 は入射波と反射波が媒質に十分に広がったときの, 入射波だけを描いたものである.

- (1) 壁 A での反射が自由端反射である場合.
 - (a) 3.0 s 後の入射波, 反射波および入射波と反射波の合成波を描け.
 - (b) 6.0 s 後の入射波, 反射波および入射波と反射波の合成波を描け.
- (2) 壁 A での反射が固定端反射である場合.
 - (a) 3.0 s 後の入射波, 反射波および入射波と反射波の合成波を描け.
 - (b) 6.0 s 後の入射波, 反射波および入射波と反射波の合成波を描け.

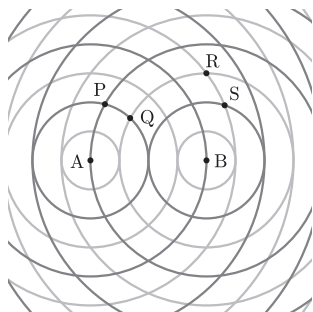
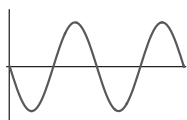


図 2.31

問題 2.8◇ 図 2.31 のように, 広くて深さが一様な水面上 2 点 A, B に波源をおき, これらを同じ位相で振動させて波を送り出している. 図 2.31 は, ある瞬間の波の山 (濃い灰色線) と谷 (淡い灰色線) の波面を表したものである.

- (1) 線分 AB (点 A, B を除く) 上で, 波源 A, B からの波の位相の差が π の奇数倍になる点はいくつできるか.
- (2) 図の点 P, Q, R, S のうち, 波源 A, B からの波の位相の差が π の偶数倍になる点はどれか, すべて答えよ.
- (3) 図の点 P, Q, R, S のうち, 波源 A, B からの波の位相の差が π の奇



数倍になる点はどれか，すべて答えよ．

- (4) もし，波源 A, B の振動が逆位相であるならば，図の点 P, Q, R, S のうち波源 A, B からの波の位相の差が π の偶数倍になる点はどれか，すべて答えよ．

問題 2.9 $\diamond$ 媒質 I から媒質 II へ進む平面波の波面が図 2.32 のように変化した．この波は媒質 I において波長 $\lambda_1 = 1.4$ m, 振動数 $f_1 = 20$ Hz である．なお，以下の問いに対しては $\sqrt{2} = 1.4$, $\sqrt{3} = 1.7$ として求めよ．

- (1) 媒質 I での波の速さ v_1 [m/s] を求めよ．
- (2) 媒質 I に対する媒質 II の屈折率を求めよ．
- (3) この波の媒質 II での波長 λ_2 [m], 振動数 f_2 [Hz] をそれぞれ求めよ．
- (4) 媒質 II での波の速さ v_2 [m/s] を求めよ．

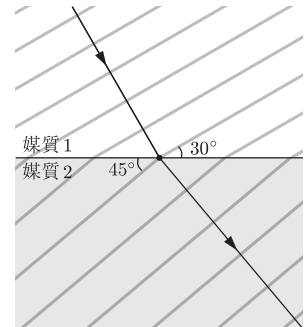
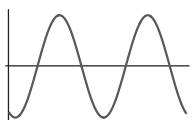


図 2.32



注31 高校で物理を勉強した人でド・ブロイ波の記憶がない人は、勉強をサボっていたということになります。うっかり知らないとは言わない方が良いでしょう。

注32 h はプランク定数です。

注33 水面波がその波長と同程度以下のモノを素通りしてしまうのは、簡単に観察することができます。

注34 顕微鏡がどれくらい小さなものを見ることができるか示す能力。

注35 速度の小さな電子。

注36 思考実験とは、実現することに関する困難さは考慮せず、理想的な条件の下でどのようなことが起こるかを考えることです。

注37 このような低温に到達することは、とても大変です。

注38 ド・ブロイ波長の式を参照してください。

注39 分子になることを妨げるために、電子のスピン向きを揃える必要がありました。

注40 筆者が所属していた研究室でも実現に向けた研究を行っていましたが、結局は成功しませんでした。

ド・ブロイ波という言葉^{注31}を聞いたことがある読者も多いと思います。質量 m の粒子が速さ v で運動しているとき、その粒子は波長 λ (ド・ブロイ波長) が

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

となる波^{注32}とみなせますが、その波のことです。ド・ブロイ波は物質波ともいいます。

光を使って「モノを見る」ということは、モノに当たって反射した光を捉えるということなので、光を反射しないモノは見ることができません。したがって、光が回折によって後ろに回り込んでしまうような小さなモノは見ることができず^{注33}、光学顕微鏡の分解能^{注34}は光の波長によって決まります。さて、電子を使ってモノを見る電子顕微鏡にも同じことがいえます。光学顕微鏡と違うのは、電子を加速することによってド・ブロイ波の波長を短くすることができることです^[1]。原子を見ることができる電子顕微鏡では、 $1.2 \times 10^6 \text{ V}$ の高電圧で電子を加速するものもあります。一方、ド・ブロイ波長の長い電子^{注35}を使って、光と同様な2重スリットの実験を行うこともできます^[2] (9.4節参照)。ファインマンは、この実験を思考実験^{注36}として提案しましたが、技術の進歩のおかげで「実験」になってしまいました。人間の想像(創造?)力は本当に「すごい」と筆者は思います。

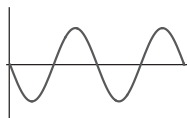
ド・ブロイ波長の長い原子が多数集まったとしましょう。これらの原子のド・ブロイ波は重なり合い、一つの巨大な波ができることがあります。ただし、電子と異なって原子は質量が大きいのので、 v がよっぽど小さくないとこのような現象は起きません。このときの原子の持つエネルギーを温度に換算すると、マイクロ・ケルビン程度またはそれ以下の温度になります^{注37}。この現象は1925年にアインシュタインによって予言され^[3]、ボーズ・アインシュタイン凝縮(BEC)と呼ばれています。また、ミクロな世界の物理学である量子力学が、マクロな世界でも支配的な役割を果たす巨視的量子現象の例としても重要です。1995年に、コロラド大学 JILA の研究グループは⁸⁷Rbで、マサチューセッツ工科大学(MIT)の研究グループは²³Naで、希薄な中性アルカリ原子気体のBECを実現させました。これらの研究によって、コーネル、ワイマン、ケターレが2001年のノーベル物理学賞を受賞しています^[4]。今でも、このBECは物性研究の理想的な実験環境として注目され、活発な研究がされています。

はじめ、BECを実現するための原子としてもっとも軽い原子である水素原子が有力視されていました^{注38}。ただ、水素原子はそのままだと分子になってしまうので工夫が必要で^{注39}、その実現は中性アルカリ原子気体のBEC実現から3年遅れた1998年になってしまいました。BECを実現するために必要な「蒸発冷却」という技術は、水素原子のBECを実現したMITのクレップナーとグレイタックのグループによって開発されたものだったので、さぞ、このグループの人たちは悔しい思いをしたことだろうと思います^{注40}。

化学者と物理学者が話をすると、

化学者は物質に固執し、物理学者は波に固執する

とお互いに呆れます。物理学者はあまりにも「波」に固執するので、物質でさえ「波」にしてしまいました。物理学者の執念に敬意を払いましょう。



参考文献

- [1] 川崎 猛ら, “1.2 MV 原子分解能・ホログラフィー電子顕微鏡の開発”, 顕微鏡 **51** No. 2 (2016) pp. 122~126.
- [2] C. Jönsson, “Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten”, Z. Physik (1961) **161**: 454 ^{注 41}.
- [3] A. Einstein, Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., **261** (1924), 3 (1925) に出版されたようですが, ネットを経由して取得することはできませんでした。しかしながら,
https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_ap/demokritov/mbecfornonphysicists/einstein_1924_1925.pdf
 にありました.
- [4] 大見 哲巨, “中性アルカリ原子気体の BEC : Cornell, Ketterle, Wieman のノーベル賞受賞によせて”, 物性研究 (2002), **78**(1): 80-90,
<http://hdl.handle.net/2433/97200>

注 41 ドイツの学術誌です.

