2024 年 4 月 11 日

『力学のサボり方』

（小田将人 著，学術図書出版社）

章末問題解答

第 2 章

2.1 いきなり意地悪問題ですみません．こんなことはできません．ので，“数学が必要になりますよ” と確認してもらうという問題でした．

2.2

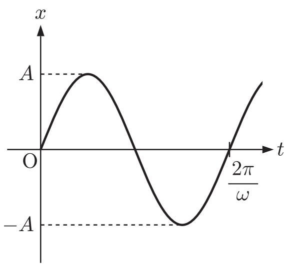
(1) $\boldsymbol{r}(0) = (0, -6, 0), \boldsymbol{r}(5) = (-45, 19, 3)$ なので，$\Delta\boldsymbol{r} = (-45, 25, 3)$.

(2) $\boldsymbol{v}(t) = \left(1 - 4t, 5, \dfrac{3\pi}{10}\cos\left(\dfrac{\pi}{10}t\right)\right), \boldsymbol{v}(5) = (-19, 5, 0)$.

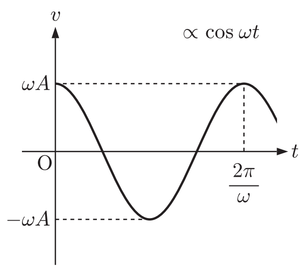
(3) $\boldsymbol{a}(t) = \left(-4, 0, -\dfrac{3\pi^2}{100}\sin\left(\dfrac{\pi}{10}t\right)\right)$.

2.3

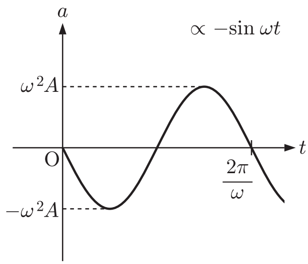
(1)



(2) $v(t) = \omega A\cos(\omega t)$.



(3)　$a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t)$.



2.4

(1)　$v_z(t) = gt$ なので，$v_z(3) = 30\,\mathrm{m/s}$.

(2)　$100 = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2$ なので，$t = 4.4$ 秒後．　※そもそも g をだいぶサボっているので，$\sqrt{5}$ もだいたいで構わない．

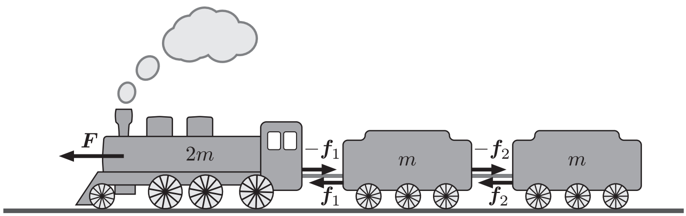
2.5　式 (2.17), (2.20) から，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} &= (-v \sin \omega t, v \cos \omega t) \cdot (-a \cos \omega t, -a \sin \omega t) \\ &= av(\sin \omega t \cos \omega t - \cos \omega t \sin \omega t) = 0. \end{aligned}$$

第 3 章

3.1　$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = (2,0) + (-1,3) + (0,-2) = (1,1)$ の方向

3.2　図のように各車両間にかかる力を $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ とする．



各車両の運動方程式は，

$$2m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{f}_1, \quad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2, \quad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{f}_2$$

となる．これらを解いて，各車両共通の加速度は，$\dfrac{\boldsymbol{F}}{4m}$ となる．機関車にかかる力は，$\dfrac{\boldsymbol{F}}{2}$．2, 3 台目にかかる力は共に $\dfrac{\boldsymbol{F}}{4}$.

3.3 求める重力加速度を g' とすると，

$$g' = G\frac{M_{\mathrm{E}}}{(R_{\mathrm{E}}+r)^2} = \frac{6.67\times 10^{-11}\cdot 5.97\times 10^{24}}{(6.37+0.4)^2\times 10^{12}} = \frac{3.98\times 10^{14}}{4.58\times 10^{13}} = 8.69\,\mathrm{m/s^2}$$

3.4 $v' = \sqrt{R_{\mathrm{E}}g'} = \sqrt{(6.77\times 10^6)\times 8.69} = 7.67\times 10^3\,\mathrm{m/s}$,
$T' = \dfrac{2\pi(R_{\mathrm{E}}+r)}{v'} = 5.54\times 10^3\,\mathrm{s}$. g を用いたときの誤差は，

$$(T'-T)/T' = 0.086.$$

(8.6%. 結構大きいですね．)

第 4 章

4.1

(1) $y = x^3 - x^2 + 5x + C$.

(2) $y = \dfrac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2$.

(3) $y = \log|x| + C$.

(4) $y = -\mathrm{e}^{-x} + C$.

4.2

(1) $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F$.

(2) $1\,\mathrm{m/s^2}$.

(3) $v(t) = \dfrac{F}{m}t + v_0, v(5) = 5\,\mathrm{m/s}$, $x(t) = \dfrac{F}{2m}t^2 + v_0 t + x_0 = \dfrac{F}{2m}t^2$, $x(5) = 12.5\,\mathrm{m}$.

4.3 (1)

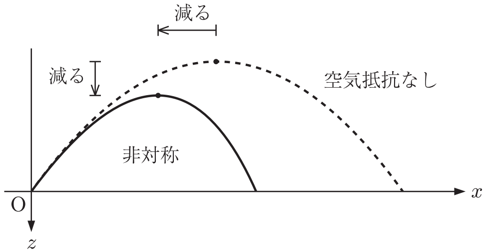
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -bv_x,$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = mg - bv_z.$$

(2)

$$v_x(t) = v_0\cos\theta\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t},$$
$$v_z(t) = \left(v_0\sin\theta - \frac{mg}{b}\right)\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b},$$
$$x(t) = \frac{mv_0\cos\theta}{b}\left(1-\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right),$$

$$z(t) = \frac{mg}{b}t + \frac{m}{b}\left(v_0\cos\theta - \frac{mg}{b}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right).$$

(3)



第 5 章

5.1

(1)　1 次まで　$\mathrm{e}^{0.1} = 1 + 0.1 = 1.1.$ $\dfrac{1.10517 - 1.1}{1.10517} = 0.047.$　4.7 %.

　2 次まで　$\mathrm{e}^{0.1} = 1 + 0.1 + 0.005 = 1.105.$ $\dfrac{1.10517 - 1.105}{1.10517} = 0.00015.$

　0.015 %.

(2)　1 次まで　$\mathrm{e}^{0.5} = 1 + 0.5 = 1.5.$　9.0 %.

　2 次まで　$\mathrm{e}^{0.5} = 1 + 0.5 + 0.125 = 1.625.$　1.4 %.

5.2

(1)　略.

(2)

$$\begin{aligned} C\mathrm{e}^{i\omega t} + D\mathrm{e}^{-i\omega t} &= C(\cos\omega t + i\sin\omega t) + D(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\ &= (C + D)\cos\omega t + i(C - D)\sin\omega t. \end{aligned}$$

　式 (5.4) と比べて $i(C - D) = A$, $C + D = B$ とすれば等価.

(3)　略.

5.3

(1)　式 (5.24) を用いて $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{S}} = 1.42\,\mathrm{s}\ (\simeq \sqrt{2})$.

(2)　(1) で $g \to \dfrac{1}{6}$ だと考える.　$\sqrt{2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{3} = 3.46\,\mathrm{s}$

5.4

(1)　それぞれのバネが受ける力を考えると，

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = -2kx_1 + kx_2, \quad m\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} = kx_1 - 2kx_2$$

(2)　(1) の運動方程式に $x_1 = A\mathrm{e}^{i\omega t}$, $x_2 = B\mathrm{e}^{i\omega t}$ を代入すると，

$$(2k - m\omega^2)A - kB = 0$$

$$-kA + (2k - m\omega^2)B = 0$$

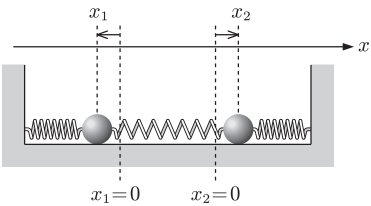
行列で書くと

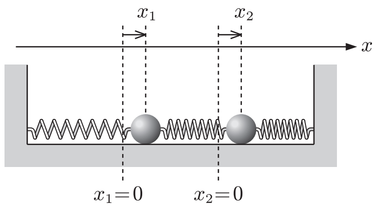
$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

(3)　$(A, 0) \neq \mathbf{0}$ のためには，行列が逆行列をもたなければよい．そのためには，行列式の値が 0 ならばよいので，

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ より } \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}},\ \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\omega = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$ のときは $A = -B$ の逆位相，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ のときは $A = B$ の同位相





第 6 章

6.1　$k = \dfrac{1}{2}mv^2$ より $\dfrac{1}{2} \times 70 \times 10^2 = 3.5 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}$

6.2　$U = mgh$ より $5.0 \times 9.8 \times 10 = 4.9 \times 10^4\,\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}$

6.3　$350\,\mathrm{kcal} = 1470 \times 10^3\,\mathrm{J}$．***6.2*** より，1 階分のぼるために必要なエネルギーは，

$$1.23 \times 10^4\,\mathrm{J}.$$

350 kcal を消費するには，120 階分のぼる．

6.4

(1)　$U = mgh$ より $4 \times 10 \times 32 = 1.28 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}$.

(2)　エネルギー保存則を使って

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2. \quad v = \sqrt{2gh} = 2.56\,\mathrm{m/s}$$

6.5　式 (3.9), (6.38) より，質量 M_{E}，半径 r の星からの脱出速度は，
$v = \sqrt{\dfrac{2GM_{\mathrm{E}}}{r}}$．これが光速よりも大きくなるには，

$$r < \frac{2GM_{\mathrm{E}}}{c^2} = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}}{9.0 \times 10^{16}} = 8.85 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

第 7 章

7.1

(1)　運動エネルギー：$\dfrac{1}{2}mv^2$

角速度：$\dfrac{v}{R}$

角運動量：mRv

中心力：$m\dfrac{v^2}{R}$

(2)　角運動量保存則が保存される．新しい速度を v' とすると，

$$mRv = m(2R)v'$$

$$\therefore v' = \frac{v}{2}$$

運動エネルギー：$\dfrac{1}{8}mv^2$

角速度：$\dfrac{v}{4R}$

角運動量：mRv

中心力：$m\dfrac{{v'}^2}{2R} = m\dfrac{v^2}{8R}$

7.2 ケプラーの第三法則を用いる.

地球の公転周期は 1 年であるから太陽系では,

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{(1.50 \times 10^{11})^3}{1^2} = 3.375 \times 10^{33}\,\mathrm{m}^3/\text{年}^2$$

がすべての惑星で同じとなる.

金星　：0.61 年 $\simeq$ 223 日

海王星：158 年 (164 年)

7.3

(1) $mLv = mL^2 \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

(2) $-Lmg\sin\theta$

(3)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mL^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = -Lmg\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

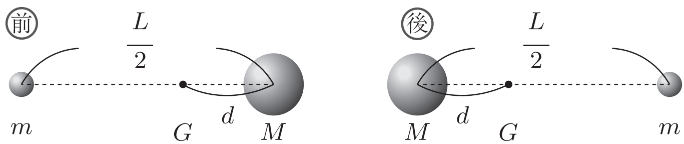
当然ながら式 (5.20) と同じものが得られる.

7.4 $|\theta|$ が小さくなるとき，つまり加速しているときに力のモーメントを大きくし，$|\theta|$ が大きくなるとき，つまり減速するときに力のモーメントを小さくすることでブランコの振幅が大きくなる.

よって，$\theta \to 0$ では座るべきである.

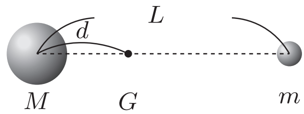
第 8 章

8.1 板と人の重心をそれぞれ M, m とする．全系の重心を G とすると，外力が働かないので G は動かない．歩く前後の状況を考えると図のようになり，板は G に対して $2d$ 動く.



重心の式より $d = \dfrac{M}{M+m}\cdot\dfrac{L}{2}$ なので，板は $2d = \dfrac{M}{M+m}L$ 動く.

8.2 地球，月の質量を M, m とする．



図より

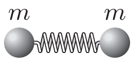
$$Md = m(L-d)$$

$$d = \frac{m}{m+M}L = \frac{0.0735\times10^{24}}{5.97\times10^{24}+0.0735\times10^{24}}\times3.84\times10^{8}$$
$$= 4.68\times10^{6}\,\mathrm{m}$$

$\therefore$ 地球と月の重心は地中 $1.69\times10^{6}\,\mathrm{m}$ にある．(地球の内側!!)

8.3

(1) $M_{\mathrm{H}} = \dfrac{m_{\mathrm{H}}m_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{H}}+m_{\mathrm{H}}} = \dfrac{1}{2}m_{\mathrm{H}} = 8.35\times10^{-28}\,\mathrm{kg}$

(2) 

を  M と考えてよい．

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$ なので

$$k_{\mathrm{H}} = \mu_{\mathrm{H}}\omega_{\mathrm{H}}^2 = 8.35\times10^{-28}\times(1.32)^2\times10^{28}$$
$$= 14.5\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$$

(3) H_2 と同様に

$$\mu_{\mathrm{O}} = 1.33\times10^{-26}\,\mathrm{kg},\quad k_{\mathrm{O}} = \mu_{\mathrm{O}}\omega_{\mathrm{O}}^2 = 28.9\,\mathrm{kg\,s^{-2}}$$

$k_{\mathrm{O}} \sim 2k_{\mathrm{H}}$ なので，酸素分子の結合のほうが強い．

※ こんな簡単なモデルでちゃんと 2 重結合と単結合の違いがわかります!!

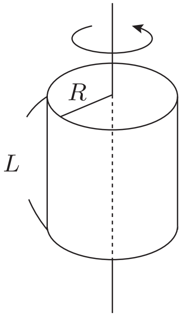
第 9 章

9.1 全質量を M とすると，

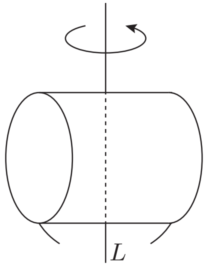
(1) $\dfrac{2}{5}MR^2$

(2) $\dfrac{2}{3}MR^2$

(3)



この軸周り
$\frac{1}{2}MR^2$



この軸周り
$\frac{1}{12}ML^2+\frac{1}{4}MR^2$

(4)　(3) の左と同じ軸：$\dfrac{1}{2}MR^2$，右と同じ軸：$\dfrac{1}{12}ML^2+\dfrac{1}{2}MR^2$

9.2　ポテンシャルエネルギーが並進エネルギーと回転エネルギーに変換される．中身が凍っているほうは，中身ごと回転するため慣性モーメントが大きい．つまり回転エネルギーにより多くのエネルギーがふりわけられる．

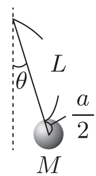
∴ 中身が液体のままのほうが速い．

9.3

(1)　球の重心回りの慣性モーメントは $\dfrac{2}{5}Ma^2$，平行軸の定理を使うとこの振り子の慣性モーメントは

$$I=\frac{2}{5}Ma^2+ML'^2 \quad \left(L'=L+\frac{a}{2}\right)$$

$$\left(=M\left(\frac{13}{20}a^2+La+L^2\right)\right)$$



(2)

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-MgL'\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\simeq-\frac{MgL'}{I}\theta$$

$\cdots$以下略$\cdots$