『テキスト 量子力学 萌芽と構築の視点から』

章末問題の解答

川村 嘉春

第 3 章

問 1　(3.4) の真ん中の式から右辺の式を導け．

[解] 物理量 A に関する期待値（平均値）の定義 $\langle A\rangle \equiv \sum_a A_a p_a$ （p_a：状態 a が出現する確率）のもとで，

$$\begin{aligned}\langle \Delta A^2\rangle &\equiv \left\langle (A-\langle A\rangle)^2\right\rangle = \langle A^2 - 2A\langle A\rangle + \langle A\rangle^2\rangle \\ &= \langle A^2\rangle - \langle 2A\langle A\rangle\rangle + \left\langle \langle A\rangle^2\right\rangle \\ &= \langle A^2\rangle - 2\langle A\rangle^2 + \langle A\rangle^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2\end{aligned}$$

のように導かれる．ここで，

$$\langle \lambda A\rangle = \sum_a \lambda A_a p_a = \lambda \sum_a A_a p_a = \lambda\langle A\rangle,$$

$$\langle \lambda\rangle = \sum_a \lambda p_a = \lambda \sum_a p_a = \lambda \quad （\lambda\text{: 定数}）$$

を用いて，$\langle 2A\langle A\rangle\rangle = 2\langle A\rangle\langle A\rangle = \langle A\rangle^2$，$\left\langle \langle A\rangle^2\right\rangle = \langle A\rangle^2$ とした．

問 2　(3.15) の 1 番目の公式の両辺を β で微分することにより，2 番目の公式が導け．同様にして，$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\beta x^2} dx$ を求めよ．ここで，$\beta > 0$，n は自然数とする．

[解] (3.15) の 1 番目の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$ の左辺を β で微分することにより，

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\beta} e^{-\beta x^2} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx$$

が得られ，(3.15) の 1 番目の公式の右辺を β で微分することにより，

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \pi^{1/2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/2} = -\frac{1}{2\beta}\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2} = -\frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

が得られる．これらが等しいとして，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx = \frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

が得られる．同様にして，(3.15) の 1 番目の公式の左辺を β で n 回微分することにより，

$$\frac{\partial^n}{\partial\beta^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial\beta^n} e^{-\beta x^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (-x^2)^n e^{-\beta x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\beta x^2} dx$$

が得られ，(3.15) の 1 番目の公式の右辺を β で n 回微分することにより，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} &= \pi^{1/2} \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/2} \\
&= \pi^{1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) \beta^{-\frac{1}{2}-n} \\
&= (-1)^n 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \frac{\pi^{1/2}}{2^n \beta^{n+\frac{1}{2}}} \\
&= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2\beta)^n} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2\beta)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}
\end{aligned}$$

が得られる．ここで，$(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1$ である．これらが等しいとして，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\beta x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{(2\beta)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

が得られる．

第 4 章

問 1　(4.12) を示せ．

[解] (4.12) は定積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi^3 d\xi}{e^{\xi} - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

のことで，以下のようにして示される．ここで，$\xi = \dfrac{h\nu}{kT} > 0$ で，$e^{\xi} > 1$ である．まず，左辺の被積分関数は $0 < e^{-\xi} < 1$ のもとで，

$$\begin{aligned}
\frac{\xi^3}{e^{\xi} - 1} &= \frac{\xi^3 e^{-\xi}}{1 - e^{-\xi}} = \xi^3 e^{-\xi} \left(1 + e^{-\xi} + e^{-2\xi} + \cdots\right) \\
&= \xi^3 e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\xi} = \xi^3 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)\xi} = \xi^3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi}
\end{aligned}$$

のように展開される．この展開を (4.12) の左辺に代入することにより，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\xi^3 d\xi}{e^{\xi} - 1} &= \int_0^{\infty} \xi^3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \xi^3 e^{-n\xi} d\xi \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \int_0^{\infty} t^3 e^{-t} dt = \frac{\pi^4}{90} \cdot 3! = \frac{\pi^4}{15}
\end{aligned}$$

が導かれる．ここで，変数変換 $t = n\xi$ を行い，級数に関する公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

と定積分に関する公式

$$\int_0^{\infty} t^m e^{-t} dt = m! \quad (m : \text{自然数})$$

を用いた．ちなみに，級数に関する公式はフーリエ解析を用いて以下のように求められる．x^2 は，

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

のようにフーリエ級数展開される．ここで，フーリエ係数 a_0，a_n（$n = 1, 2, \cdots$）は，

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \ dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \ dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \left(\frac{1}{n} \frac{d}{dx} \sin nx \right) \ dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \frac{d}{dx} \left(x^2 \sin nx \right) \ dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \frac{dx^2}{dx} \sin nx \ dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \left[x^2 \sin nx \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2}{n} x \sin nx \ dx \\
&= -\frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \ dx = -\frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \left(-\frac{1}{n} \frac{d}{dx} \cos nx \right) \ dx \\
&= \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \frac{d}{dx} \left(x \cos nx \right) \ dx - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \frac{dx}{dx} \cos nx \ dx \\
&= \frac{4}{n^2\pi} \left[x \cos nx \right]_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \ dx \\
&= \frac{4}{n^2\pi} \pi \cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} = (-1)^n \frac{4}{n^2}
\end{aligned}$$

である．パーシバルの等式より，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^2 \right)^2 \ dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)$$

が成り立ち，この式の左辺は，

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \ dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{5} \pi^5$$

で，右辺は，

$$\begin{aligned}
&\pi \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{4}{n^2} \right\}^2 \right] \\
&= \pi \left(\frac{2}{9} \pi^4 + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right)
\end{aligned}$$

である．この両者が等しいということから，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{16\pi}\left(\frac{2}{5}\pi^5-\frac{2}{9}\pi^5\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)\pi^4=\frac{\pi^4}{90}$$

のように導かれる．定積分に関する公式は部分積分を繰り返し m 回行うことにより，

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}t^m e^{-t}dt&=\int_0^{\infty}t^m\left(-\frac{d}{dt}e^{-t}\right)dt\\&=-\int_0^{\infty}\frac{d}{dt}\left(t^m e^{-t}\right)dt+\int_0^{\infty}\left(\frac{d}{dt}t^m\right)e^{-t}dt\\&=\left[-t^m e^{-t}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}mt^{m-1}e^{-t}dt\\&=m\int_0^{\infty}t^{m-1}e^{-t}dt=m(m-1)\int_0^{\infty}t^{m-2}e^{-t}dt\\&=m(m-1)\cdots 2\cdot 1\times\int_0^{\infty}e^{-t}dt=m!\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty}=m!\end{aligned}$$

のように導かれる．

問 2　$dU=TdS-PdV$ および U が $V^{1/3}$ に反比例することを用いて，$P=u_{\mathrm{T}}/3$ を導け．

[解] $dU=TdS-PdV$ より，$P=-\dfrac{\partial U}{\partial V}$ が得られ，U が $V^{1/3}$ に反比例すること，すなわち，$U=\dfrac{\beta}{V^{1/3}}$ （$\beta:V$ に依存しない量）であること，および $u_{\mathrm{T}}=\dfrac{U}{V}$ を用いて，

$$P=-\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\beta}{V^{1/3}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{V^{4/3}}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{1}{3}u_{\mathrm{T}}$$

が導かれる．

問 3　(4.30) の $U_{\mathrm{T}}(T)$ を T で微分して，(4.31) を導け．

[解] (4.30) にあるように $U_{\mathrm{T}}(T)$ は，

$$U_{\mathrm{T}}(T)=3RT\cdot D(x)$$

で与えられる．ここで，$D(x)$ は，

$$D(x)=\frac{3}{x^3}\int_0^{x}\frac{\xi^3 d\xi}{e^{\xi}-1}$$

で，$x=\dfrac{h\nu_{\mathrm{M}}}{kT}$ で与えられる．これらを用いて，固体の定積モル比熱 C_V は，

$$\begin{aligned}C_V=\frac{\partial U_{\mathrm{T}}(T)}{\partial T}&=3RD(x)+3RT\frac{\partial D(x)}{\partial T}\\&=3R\left(D(x)+T\frac{\partial D(x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial T}\right)=3R\left(D(x)-x\frac{\partial D(x)}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3R\left\{D(x) - x\left(-\frac{3}{x}D(x) + \frac{3}{e^x - 1}\right)\right\} \\
&= 3R\left(D(x) + 3D(x) - \frac{3x}{e^x - 1}\right) = 3R\left(4D(x) - \frac{3x}{e^x - 1}\right)
\end{aligned}
$$

のように得られる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial T} &= -\frac{h\nu_{\mathrm{M}}}{kT^2} = -\frac{x}{T}, \\
\frac{\partial D(x)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{x^3}\int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}\right) = -\frac{9}{x^4}\int_0^x \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} + \frac{3}{x^3}\frac{x^3}{e^x - 1} \\
&= -\frac{3}{x}D(x) + \frac{3}{e^x - 1}
\end{aligned}
$$

を用いた．

第 5 章

問 1　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$ を用いて，(5.19) を示せ．

[解] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$ の両辺を x で微分することにより，

$$
-\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = -\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}
$$

が得られ，これらを組み合わせて，

$$
\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} = \frac{\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}}{\frac{1}{1-e^{-x}}} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}
$$

が得られる．この式の両辺に $h\nu$ を掛けて，$x = \dfrac{h\nu}{kT}$ と取ることにより (5.19) の公式

$$
\frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}
$$

が導かれる．

問 2　(5.36)，(5.37) を示せ．

[解] ポアソン分布は，

$$
\widetilde{P}_n \equiv \frac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v} = \frac{\frac{(\rho v)^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho v)^n}{n!}}
$$

で定義され，この確率分布のもとで n，n^2 の平均値はそれぞれ

$$
\langle n \rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n\widetilde{P}_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v} = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \rho v \frac{(\rho v)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\rho v} = \rho v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v} \\
&= \rho v e^{\rho v} e^{-\rho v} = \rho v,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle n^2 \rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \widetilde{P}_n &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \rho v \frac{(\rho v)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\rho v} = \rho v \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\rho v)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\rho v} \\
&= \rho v \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v} \\
&= \rho v \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v} + \rho v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v} \\
&= \rho v \rho v + \rho v = \rho v(\rho v + 1) = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle
\end{aligned}
$$

のように求められる．

問 3　(5.48) を示せ．

[解] 体積 V の中の全光子数 N_{T} に関する公式

$$
\begin{aligned}
N_{\mathrm{T}} &= \int_0^{\infty} N_{\gamma}(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{8\pi V}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \nu^2 d\nu \\
&= \frac{8\pi V}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \int_0^{\infty} e^{-t} t^2 dt = 16\pi V \left(\frac{kT}{hc}\right)^3
\end{aligned}
$$

が導かれる．ここで，変数変換 $t = \dfrac{h\nu}{kT}$ を行い，定積分に関する公式

$$
\int_0^{\infty} t^m e^{-t} dt = m! \quad (m : \text{自然数})
$$

を用いた．

第 6 章

問 1　ある金属に波長 2000 Å の光を当てたとき，出てくる電子の最大エネルギーは 4.00 eV であった．この金属の仕事関数はいくらか．ここで，1 Å $= 10^{-10}$ m（Å はオングストローム）である．

[解] 出てくる電子の最大エネルギーを E_{e}，金属の仕事関数を W とすると，力学的エネルギーの保存則より $E_{\mathrm{e}} = h\nu - W$ が成り立つ．この式より，

$$
W = h\nu - E_{\mathrm{e}} = \frac{hc}{\lambda} - E_{\mathrm{e}}
$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} \times 3.00 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{2000 \times 10^{-10}\ \mathrm{m} \times 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}} - 4.00\ \mathrm{eV}$$
$$= 6.22\ \mathrm{eV} - 4.00\ \mathrm{eV} = 2.22\ \mathrm{eV}$$

が得られる．

問 2　陽子のコンプトン波長 $\dfrac{h}{m_{\mathrm{p}}c}$ はいくらか．

[解] h，m_{p}，c の値を用いて，

$$\frac{h}{m_{\mathrm{p}}c} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} \times 3.00 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}} = 1.32 \times 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

が得られる．

問 3　波長 0.200 Å の X 線が 60 度の方向にコンプトン散乱されたとき，散乱された X 線の波長はいくらか．

[解] コンプトン効果の公式 (6.13) を用いて，

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + \lambda_{\mathrm{e}}(1 - \cos\theta)$$
$$= 0.200\ \text{Å} + \frac{2.43 \times 10^{-13}\ \mathrm{m} \times (1 - \cos(\pi/3))}{10^{-10}\ \mathrm{m/Å}} = 0.212\ \text{Å}$$

が得られる．ここで，λ_{e} は電子のコンプトン波長で，

$$\lambda_{\mathrm{e}} \equiv \frac{h}{m_{\mathrm{e}}c} = 2.43 \times 10^{-13}\ \mathrm{m}$$

である．

第 7 章

問 1　ラジウムから放射される α 線のエネルギーを

$$E_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha v_0^2 = 1.00 \times 10^{7}\ \mathrm{eV}$$

とする．$Z = 79$ として，(7.22) を用いて，最近接距離 r_0 の値を求めよ．

[解] (7.22) を用いて，

$$r_0 = \frac{4Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\alpha v_0^2}$$
$$= \frac{4 \times 79 \times (1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m} \times 2.00 \times 10^{7}\ \mathrm{eV} \times 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}}$$
$$= 2.27 \times 10^{-14}\ \mathrm{m}$$

が得られる．

第 8 章

問 1　(8.7) を示せ．

[解] $\nu_{nl} = \dfrac{E_n - E_l}{h}$，$\nu_{lm} = \dfrac{E_l - E_m}{h}$，$\nu_{nm} = \dfrac{E_n - E_m}{h}$ を用いて，

$$\nu_{nl} + \nu_{lm} = \frac{E_n - E_l}{h} + \frac{E_l - E_m}{h} = \frac{E_n - E_m}{h} = \nu_{nm}$$

のように示される．

問 2　(8.15) の E_n を α，c，m_e，n を用いて表せ．また，E_1 の値を求めよ．

[解] (8.15) と $\alpha \equiv \dfrac{2\pi k_0 e^2}{hc} \fallingdotseq \dfrac{1}{137}$ を用いて，

$$E_n \equiv -\frac{2\pi^2 k_0^2 e^4 m_\mathrm{e}}{h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}m_\mathrm{e}c^2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2$$

が得られる．この式を用いて，$n = 1$ のとき，

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \times (3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})^2}{2 \times (137)^2} \\ &= -2.18 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} = -13.6\ \mathrm{eV} \end{aligned}$$

が得られる．

問 3　電子に対して，$m_\mathrm{e}c$，$m_\mathrm{e}c^2$，$\dfrac{\hbar}{m_\mathrm{e}c}$，$\dfrac{\hbar}{m_\mathrm{e}c^2}$ はいくらか．

[解] $m_\mathrm{e} \fallingdotseq 9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$，$c \fallingdotseq 3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$，$\hbar \fallingdotseq 1.05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ を用いて，

$$\begin{aligned} m_\mathrm{e}c &= 9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \times 3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s} = 2.73 \times 10^{-22}\ \mathrm{m/s}, \\ m_\mathrm{e}c^2 &= 9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \times (3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})^2 = 8.20 \times 10^{-14}\ \mathrm{J}, \\ \frac{\hbar}{m_\mathrm{e}c} &= \frac{1.05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \times 3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}} = 3.84 \times 10^{-13}\ \mathrm{m}, \\ \frac{\hbar}{m_\mathrm{e}c^2} &= \frac{1.05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \times (3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})^2} = 1.28 \times 10^{-21}\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

が得られる．

問 4　(7.39) で与えられた τ において，r_i を r_B として，τ を α，c，r_B を用いて表せ．

[解] (7.39) において，$r_{\rm i}$ を $r_{\rm B} \equiv \dfrac{1}{(2\pi)^2}\dfrac{h^2}{k_0 e^2 m_{\rm e}}$ とし，$r_{\rm e} \equiv \dfrac{k_0 e^2}{m_{\rm e} c^2} = \alpha^2 r_{\rm B}$ を用いて，

$$\tau = \frac{4\pi^2\varepsilon_0^2 c^3 m_{\rm e}^2}{e^4} r_{\rm B}^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2 (m_{\rm e}c^2)^2 \frac{r_{\rm B}^3}{c} = \frac{1}{4}\left(\frac{m_{\rm e}c^2}{k_0 e^2} r_{\rm B}\right)^2 \frac{r_{\rm B}}{c}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{r_{\rm B}}{r_{\rm e}}\right)^2 \frac{r_{\rm B}}{c} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^2 \frac{r_{\rm B}}{c} = \frac{1}{4}\frac{r_{\rm B}}{\alpha^4 c}$$

が得られる．ここで，$\alpha \equiv \dfrac{2\pi k_0 e^2}{hc}$ である．

第 9 章

問 1　調和振動子の位置が $q = a\cos(2\pi\nu t + \delta)$ $(a > 0)$ と表されるとき，$E = nh\nu$ を課すことにより，a はどのように量子化されるか．

[解] $q = a\cos(2\pi\nu t + \delta)$ を時間で微分することにより，

$$\frac{dq}{dt} = -2\pi\nu a \sin(2\pi\nu t + \delta)$$

が得られ，これらを用いて，

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m(2\pi\nu)^2 q^2$$
$$= \frac{1}{2}m(2\pi\nu)^2 a^2\left\{\sin^2(2\pi\nu t + \delta) + \cos^2(2\pi\nu t + \delta)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}m(2\pi\nu)^2 a^2 = 2\pi^2 m\nu^2 a^2$$

が得られる．この式と $E = nh\nu$ を連立させることにより，

$$a = \sqrt{\frac{nh}{2\pi^2 m\nu}}$$

が得られる．

問 2　調和振動子の位置が $q = Xe^{2\pi i\nu t} + X^* e^{-2\pi i\nu t}$ と表されるとき，$E = nh\nu$ を課すことにより，$|X|$ はどのように量子化されるか．なお，$*$ は複素共役を表す．

[解] $X = |X|e^{i\delta}$ とすると，

$$q = Xe^{2\pi i\nu t} + X^* e^{-2\pi i\nu t} = |X|\left(e^{2\pi i\nu t + i\delta} + e^{-2\pi i\nu t - i\delta}\right)$$
$$= 2|X|\cos(2\pi\nu t + \delta)$$

となり，$a = 2|X|$ として前問の結果を用いて，

$$|X| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{nh}{2\pi^2 m\nu}} = \sqrt{\frac{nh}{8\pi^2 m\nu}}$$

が導かれる．

問 3　(9.51)，(9.52) を導け．

[解] J_θ の積分区間は $-\pi \le \theta \le \pi$ のうち，$L^2 - \dfrac{L_z^2}{\sin^2\theta} \ge 0$ を満たす領域で，

$$\theta_1 \le \theta \le \pi - \theta_1, \quad -\pi - \theta_2 \le \theta \le \theta_2$$

である．ここで,θ_1 は $\sin\theta_1 = \dfrac{|L_z|}{L}$（$0 \le \theta_1 \le \dfrac{\pi}{2}$）,$\theta_2$ は $\sin\theta_2 = -\dfrac{|L_z|}{L}$（$-\dfrac{\pi}{2} \le \theta_2 \le 0$）を満たす．これを踏まえて，

$$\begin{aligned}
J_\theta &= \left(\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} + \int_{-\pi-\theta_2}^{\theta_2}\right)\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= 2\int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1}\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= 2\left(\int_{\theta_1}^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\theta_1}\right)\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= 4\int_{\theta_1}^{\pi/2}\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta
\end{aligned}$$

が得られる．変数変換 $t = \tan\theta$ を行うことにより，

$$\sin\theta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad d\theta = \frac{dt}{1+t^2}$$

が成り立ち，$\sin\theta_1 = \dfrac{t_+}{\sqrt{1+t_+^2}}$ とすると，

$$t_+ = \frac{\sin\theta_1}{\sqrt{1-\sin^2\theta_1}} = \frac{|L_z|/L}{\sqrt{1-(|L_z|/L)^2}} = \frac{|L_z|}{\sqrt{L^2-L_z^2}}$$

が得られる．このような変数変換により，積分区間は $\theta : \theta_1 \to \dfrac{\pi}{2}$ から $t : t_+ \to \infty$ に変わる．これらを用いて，

$$\begin{aligned}
J_\theta &= 4\int_{\theta_1}^{\pi/2}\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta = 4\int_{t_+}^{\infty}\sqrt{L^2 - \frac{1+t^2}{t^2}L_z^2}\,\frac{dt}{1+t^2} \\
&= 4\int_{t_+}^{\infty}\frac{\sqrt{(L^2-L_z^2)t^2 - L_z^2}}{t}\,\frac{dt}{1+t^2} \\
&= 2\int_{t_+}^{\infty}\frac{\sqrt{(L^2-L_z^2)t^2 - L_z^2}}{t^2(1+t^2)}\,dt^2 = 2\int_{t_+^2}^{\infty}\frac{\sqrt{(L^2-L_z^2)x - L_z^2}}{x(1+x)}\,dx \\
&= 2\int_{t_+^2}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{(L^2-L_z^2)x - L_z^2}}{x} - \frac{\sqrt{(L^2-L_z^2)x - L_z^2}}{x+1}\right)dx
\end{aligned}$$

が得られる．3 行目の 1 番目の式から 2 番目の式に移る際に，変数変換 $x = t^2$ を行っ

た．積分公式

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{px+q}\,dx = \frac{2}{p}\sqrt{ax+b} + \frac{bp-aq}{p}\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax+b}},$$

$$\begin{aligned}\int &\frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax+b}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{(aq-bp)p}}\tan^{-1}\frac{p\sqrt{ax+b}}{\sqrt{(aq-bp)p}} \qquad ((aq-bp)p>0)\end{aligned}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}J_\theta &= 2\int_{t_+^2}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{(L^2-L_z^2)x-L_z^2}}{x} - \frac{\sqrt{(L^2-L_z^2)x-L_z^2}}{x+1}\right)dx\\ &= 2\left[2\sqrt{(L^2-L_z^2)x-L_z^2} - 2|L_z|\tan^{-1}\frac{\sqrt{(L^2-L_z^2)x-L_z^2}}{|L_z|}\right.\\ &\qquad \left. -2\sqrt{(L^2-L_z^2)x-L_z^2} + 2L\tan^{-1}\frac{\sqrt{(L^2-L_z^2)x-L_z^2}}{L}\right]_{t_+^2}^{\infty}\\ &= -4|L_z|\left(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0\right) + 4L\left(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0\right)\\ &= 4\left(L-|L_z|\right)\left(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0\right) = 2\pi\left(L-|L_z|\right)\end{aligned}$$

が得られる．ここで，$\tan^{-1}\infty = \dfrac{\pi}{2}$ および $\tan^{-1}0 = 0$ を用いた．

J_r の積分区間は 2 次方程式 $2m_\mathrm{e}Er^2 + 2m_\mathrm{e}k_0e^2r - L^2 = 0$ の実数解である $r_1, r_2(\geq r_1)$ を用いて，$r_1 \leq r \leq r_2$ で与えられる．これを踏まえて，

$$\begin{aligned}J_r &= 2\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2m_\mathrm{e}E + \frac{2m_\mathrm{e}k_0e^2}{r} - \frac{L^2}{r^2}}\,dr\\ &= 2\int_{r_1}^{r_2}\frac{\sqrt{2m_\mathrm{e}Er^2 + 2m_\mathrm{e}k_0e^2r - L^2}}{r}\,dr\end{aligned}$$

と表される．2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を x_1，x_2 とする積分公式

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x}\,dx &= \left[ax^2+bx+c\right]_{x_1}^{x_2}\\ &\quad + \frac{b}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\\ &= \frac{b}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}},\end{aligned}$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\pi}{\sqrt{-a}} \qquad (a<0),$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\pi}{\sqrt{|c|}}$$

を用いて，

$$J_r = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{2m_\mathrm{e}Er^2 + 2m_\mathrm{e}k_0e^2r - L^2}}{r}\,dr$$

$$= 2m_\mathrm{e}k_0e^2\frac{\pi}{\sqrt{-2m_\mathrm{e}E}} + 2(-L^2)\frac{\pi}{L} = -2\pi\left(L - \frac{m_\mathrm{e}k_0e^2}{\sqrt{-2m_\mathrm{e}E}}\right)$$

が得られる．

問 4　(9.56) を導け．

[解] (9.49) と (9.52) より $|L_z| = \dfrac{h}{2\pi}|m|$ が得られ，(9.50) と (9.53) より $L - |L_z| = \dfrac{h}{2\pi}k'$ が得られ，これらを連立させて，

$$L = \frac{h}{2\pi}(k' + |m|)$$

が得られる．さらに，(9.51) と (9.54) より

$$-2\pi\left(L - \frac{m_\mathrm{e}k_0e^2}{\sqrt{-2m_\mathrm{e}E}}\right) = n'h$$

が得られ，前式と連立させることにより

$$n'h = -2\pi\left(\frac{h}{2\pi}k' + \frac{h}{2\pi}|m| - \frac{m_\mathrm{e}k_0e^2}{\sqrt{-2m_\mathrm{e}E}}\right)$$

が導かれる．

第 11 章

問 1　F_{nm} が $F^*_{mn} = F_{nm}$（エルミート性）を満たすとき，$f_{nm}(t) = F_{nm}e^{i\omega_{nm}t}$ もエルミート性を満たすことを示せ．

[解] $f^*_{mn}(t) = F^*_{mn}e^{-i\omega_{mn}t} = F_{nm}e^{i\omega_{nm}t} = f_{nm}$ となり，エルミート性を満たすことが示される．ここで，$F^*_{mn} = F_{nm}$ および $\omega_{mn} = -\omega_{nm}$ を用いた．

問 2　(11.71) を示せ．

[解] Q_{nm} と P_{nm} に対して，ユニタリー変換

$$Q'_{nm} = \sum_{k,l} U^\dagger_{nk}Q_{kl}U_{lm}, \quad P'_{nm} = \sum_{k,l} U^\dagger_{nk}P_{kl}U_{lm}$$

を行ったものに対して，交換関係を計算することにより，

$$[Q', P']_{nm} = \sum_s (Q'_{ns}P'_{sm} - P'_{ns}Q'_{sm})$$

$$= \sum_s \sum_{k,l} \sum_{k',l'} \Big(U^\dagger_{nk}Q_{kl}U_{ls}U^\dagger_{sk'}P_{k'l'}U_{l'm}$$

$$-U^\dagger_{nk}P_{kl}U_{ls}U^\dagger_{sk'}Q_{k'l'}U_{l'm}\Big)$$

$$= \sum_{k,l}\sum_{k',l'}\left(U^{\dagger}_{nk}Q_{kl}\delta_{lk'}P_{k'l'}U_{l'm} - U^{\dagger}_{nk}P_{kl}\delta_{lk'}Q_{k'l'}U_{l'm}\right)$$

$$= \sum_{k,l}\sum_{l'}U^{\dagger}_{nk}\left(Q_{kl}P_{ll'} - P_{kl}Q_{ll'}\right)U_{l'm}$$

$$= \sum_{k}\sum_{l'}U^{\dagger}_{nk}i\hbar\delta_{kl'}U_{l'm} = i\hbar\sum_{k}U^{\dagger}_{nk}U_{km} = i\hbar\delta_{nm}$$

が得られる．$[Q',Q']_{nm}$，$[P',P']_{nm}$ に関しても同様に計算され，交換関係

$$[Q',P']_{nm} = i\hbar\delta_{nm},\quad [Q',Q']_{nm} = 0,\quad [P',P']_{nm} = 0$$

が示される．ここで，U は任意のユニタリー行列で，

$$\sum_{k}U^{\dagger}_{nk}U_{km} = \sum_{k}U_{nk}U^{\dagger}_{km} = \delta_{nm}$$

を満たし，これらの式を用いた．

第 12 章

問 1　(12.7) を示せ．

[解] (12.7) の左辺は，

$$[fg,h]_{nm} = \sum_{k}\{(fg)_{nk}h_{km} - h_{nk}(fg)_{km}\}$$

$$= \sum_{k,l}\left(f_{nl}g_{lk}h_{km} - h_{nk}f_{kl}g_{lm}\right)$$

のように表され，(12.7) の右辺は，

$$\sum_{k}[f,h]_{nk}g_{km} + \sum_{k}f_{nk}[g,h]_{km}$$

$$= \sum_{k}\{(fh)_{nk}g_{km} - (hf)_{nk}g_{km}\} + \sum_{k}\{f_{nk}(gh)_{km} - f_{nk}(hg)_{km}\}$$

$$= \sum_{k,l}\left(f_{nl}h_{lk}g_{km} - h_{nl}f_{lk}g_{km}\right) + \sum_{k,l}\left(f_{nk}g_{kl}h_{lm} - f_{nk}h_{kl}g_{lm}\right)$$

$$= \sum_{k,l}\left(f_{nk}g_{kl}h_{lm} - h_{nl}f_{lk}g_{km}\right) = \sum_{k,l}\left(f_{nl}g_{lk}h_{km} - h_{nk}f_{kl}g_{lm}\right)$$

のように変形され，両者が一致することがわかる．よって，交換子に関する公式

$$[fg,h]_{nm} = \sum_{k}[f,h]_{nk}g_{km} + \sum_{k}f_{nk}[g,h]_{km}$$

が示される．

問 2　(12.65)，(12.66) を確かめよ．

[解] $q(t)$，$p(t)$ の行列表示

$$q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1}e^{-i\omega t} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1}e^{i\omega t} & 0 & \sqrt{2}e^{-i\omega t} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2}e^{i\omega t} & 0 & \sqrt{3}e^{-i\omega t} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3}e^{i\omega t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$p(t) = i\sqrt{\frac{\mu\omega\hbar}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1}e^{-i\omega t} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1}e^{i\omega t} & 0 & -\sqrt{2}e^{-i\omega t} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2}e^{i\omega t} & 0 & -\sqrt{3}e^{-i\omega t} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3}e^{i\omega t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\mu}p(t)^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 q(t)^2 \\
&= \frac{1}{2\mu}\left(i\sqrt{\frac{\mu\omega\hbar}{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1}e^{-i\omega t} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1}e^{i\omega t} & 0 & -\sqrt{2}e^{-i\omega t} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2}e^{i\omega t} & 0 & -\sqrt{3}e^{-i\omega t} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3}e^{i\omega t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
&\qquad \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1}e^{-i\omega t} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1}e^{i\omega t} & 0 & -\sqrt{2}e^{-i\omega t} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2}e^{i\omega t} & 0 & -\sqrt{3}e^{-i\omega t} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3}e^{i\omega t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2}\mu\omega^2\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1}e^{-i\omega t} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1}e^{i\omega t} & 0 & \sqrt{2}e^{-i\omega t} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2}e^{i\omega t} & 0 & \sqrt{3}e^{-i\omega t} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3}e^{i\omega t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1}e^{-i\omega t} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1}e^{i\omega t} & 0 & \sqrt{2}e^{-i\omega t} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2}e^{i\omega t} & 0 & \sqrt{3}e^{-i\omega t} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3}e^{i\omega t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{4}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -7 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \frac{\hbar\omega}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 7 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \hbar\omega\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

および

$$[q(t), p(t)] = q(t)p(t) - p(t)q(t)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\, i\sqrt{\frac{\mu\omega\hbar}{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1}e^{-i\omega t} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1}e^{i\omega t} & 0 & \sqrt{2}e^{-i\omega t} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2}e^{i\omega t} & 0 & \sqrt{3}e^{-i\omega t} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3}e^{i\omega t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1}e^{-i\omega t} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1}e^{i\omega t} & 0 & -\sqrt{2}e^{-i\omega t} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2}e^{i\omega t} & 0 & -\sqrt{3}e^{-i\omega t} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3}e^{i\omega t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$- i\sqrt{\frac{\mu\omega\hbar}{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1}e^{-i\omega t} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1}e^{i\omega t} & 0 & -\sqrt{2}e^{-i\omega t} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2}e^{i\omega t} & 0 & -\sqrt{3}e^{-i\omega t} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3}e^{i\omega t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1}e^{-i\omega t} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1}e^{i\omega t} & 0 & \sqrt{2}e^{-i\omega t} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2}e^{i\omega t} & 0 & \sqrt{3}e^{-i\omega t} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3}e^{i\omega t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{i}{2}\hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\hbar\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= i\hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

が導かれる．

第 13 章

問 1　5.0 m/s の速度で走っている 60 kg の人のド・ブロイ波長はいくらか．

[解] ド・ブロイ波長の公式を用いて，

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{60\ \mathrm{kg} \times 5.0\ \mathrm{m/s}} = 2.2 \times 10^{-36}\ \mathrm{m}$$

が得られる．

問 2　1.0×10^5 m/s の速度で運動している自由電子のド・ブロイ波長はいくらか．

[解] ド・ブロイ波長の公式を用いて，

$$\lambda = \frac{h}{m_\mathrm{e} v} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \times 1.0 \times 10^5\ \mathrm{m/s}} = 7.3 \times 10^{-8}\ \mathrm{m}$$

が得られる．

問 3　1.0 K で熱運動しているヘリウム原子のド・ブロイ波長はいくらか．

[解] T[K] で熱運動しているヘリウム原子の運動エネルギーは $E_\alpha = \dfrac{3}{2}kT$ で，$E_\alpha = \dfrac{p_\alpha^2}{2m}$ と連立させて，この原子の運動量の大きさが，

$$p_\alpha = \sqrt{2m_\alpha E_\alpha} = \sqrt{3m_\alpha kT}$$

であることがわかる．この式とド・ブロイ波長の公式を用いて，

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p_\alpha} = \frac{h}{\sqrt{3m_\alpha kT}} \\ &= \frac{6.63\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}{\sqrt{3\times4\times1.67\times10^{-27}\ \mathrm{kg}\times1.38\times10^{-23}\ \mathrm{J/K}\times1.0\ \mathrm{K}}} \\ &= 1.3\times10^{-9}\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

が得られる．

問 4　電子に $V = 81$ V の電位差をかけたとき，電子が得た運動エネルギーが eV に等しいとして，そのときの電子のド・ブロイ波長はいくらか．

[解] $E = \dfrac{p^2}{2m_\mathrm{e}}$ より，電子の運動量の大きさは $p = \sqrt{2m_\mathrm{e}E}$ で与えられる．この式とド・ブロイ波長の公式を用いて，

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_\mathrm{e}E}} \\ &= \frac{6.63\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}{\sqrt{2\times9.11\times10^{-31}\ \mathrm{kg}\times81\ \mathrm{eV}\times1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J/eV}}} \\ &= 1.4\times10^{-10}\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

が得られる．

第 14 章

問 1　$u \equiv (\hbar^2/2m)\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + \psi^* V\psi$ で定義されたエネルギー密度に対して，連続の方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{s} = 0$ を満たす熱流密度 $\boldsymbol{s}$ を求めよ．

[解] エネルギー密度 u を時間 t で微分することにより，

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\psi)^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + (\boldsymbol{\nabla}\psi)^*\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\psi\right\} + V\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\left\{\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + (\boldsymbol{\nabla}\psi)^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\} - V\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\left[\boldsymbol{\nabla}\left\{\frac{1}{-i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\psi^*\right\}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi\right. \\ &\qquad \left. +(\boldsymbol{\nabla}\psi)^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\left\{\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V\right)\psi\right\}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+V\frac{i\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\cdot\{\psi^*(\boldsymbol{\nabla}\psi)-(\boldsymbol{\nabla}\psi)^*\psi)\}\\
&=\frac{\hbar^2}{2m}\left[\boldsymbol{\nabla}\left\{\frac{1}{-i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2+V\right)\psi^*\right\}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi\right.\\
&\qquad\left.+(\boldsymbol{\nabla}\psi)^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\left\{\frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2+V\right)\psi\right\}\right]\\
&\qquad+V\frac{i\hbar}{2m}\left\{\psi^*(\boldsymbol{\nabla}^2\psi)-(\boldsymbol{\nabla}^2\psi)^*\psi)\right\}\\
&=\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{i\hbar}{2m}\left[\left\{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2+V\right)\psi^*\right\}\boldsymbol{\nabla}\psi\right.\\
&\qquad\qquad\left.-(\boldsymbol{\nabla}\psi)^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2+V\right)\psi\right]
\end{aligned}
$$

が得られる．1 行目から 2 行目に移る際に，確率の保存則を意味する連続の方程式 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=0$ を用いた．ここで，ρ，$\boldsymbol{j}$ はそれぞれ

$$
\rho=\psi^*\psi,\quad \boldsymbol{j}=-\frac{i\hbar}{2m}\left\{\psi^*(\boldsymbol{\nabla}\psi)-(\boldsymbol{\nabla}\psi)^*\psi\right\}
$$

である．また，2 行目から 3，4 行目に移る際に，シュレーディンガー方程式

$$
i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2+V\right)\psi,\quad -i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2+V\right)\psi^*
$$

を用いた．よって，$\dfrac{\partial u}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{s}=0$ を満たす熱流密度 $\boldsymbol{s}$ は，

$$
\boldsymbol{s}=\frac{i\hbar}{2m}\left[(\boldsymbol{\nabla}\psi)^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2+V\right)\psi-\left\{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2+V\right)\psi^*\right\}\boldsymbol{\nabla}\psi\right]
$$

である．

問 2　エルミート演算子 $\hat{A}$ は時間をあらわに含んでいないとする．このとき，$\dfrac{d\langle\widehat{A}\rangle}{dt}=\dfrac{1}{i\hbar}\langle[\widehat{A},\widehat{H}]\rangle$ を示せ．

[解] $\langle\widehat{A}\rangle$ の時間微分は，シュレーディンガー方程式

$$
i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\widehat{H}\psi,\quad -i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=\widehat{H}\psi^*
$$

を用いて，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\widehat{A}\rangle&=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\widehat{A}\psi d^3r\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\widehat{A}\psi+\psi^*\widehat{A}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d^3r\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{-i\hbar}\widehat{H}\psi^*\right)\widehat{A}\psi+\psi^*\widehat{A}\left(\frac{1}{i\hbar}\widehat{H}\psi\right)\right\}d^3r\\
&=\frac{1}{-i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(\widehat{H}\widehat{A}-\widehat{A}\widehat{H}\right)\psi d^3r
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(\widehat{A}\widehat{H}-\widehat{H}\widehat{A}\right)\psi d^3r = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle$$

のように計算され，

$$\frac{d}{dt}\langle\widehat{A}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle$$

が示される．3 行目の式から 4 行目の式に移る際に，微分演算子を含む部分に関して部分積分を 2 回行った．また，$\lim_{|\boldsymbol{r}|\to\infty}\psi(\boldsymbol{r},t)=0$ および $\lim_{|\boldsymbol{r}|\to\infty}\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}$ を用いて表面項を落とした．

第 17 章

問 1　パウリ行列は，いずれもエルミート行列であることを示せ．

[解] パウリ行列とは 3 個の 2 行 2 列の行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のことで，エルミート共役（転置と複素共役）を取ることにより，

$$\sigma_x^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x,\quad \sigma_y^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y,\quad \sigma_z^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z$$

が得られ，いずれもエルミート行列であることがわかる．

問 2　パウリ行列は，いずれも 2 乗すると単位行列になることを示せ．

[解] パウリ行列を 2 乗すると，

$$(\sigma_x)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\sigma_y)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\sigma_z)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，いずれも単位行列になることがわかる．

問 3　$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z$，$\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x$，$\sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$ を示せ．

[解] パウリ行列を用いて，

$$\sigma_x\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_z,$$

$$\sigma_y\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_z,$$

$$\sigma_y\sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_x,$$

$$\sigma_z\sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_x,$$

$$\sigma_z\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y,$$

$$\sigma_x\sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_y$$

となり，

$$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z, \quad \sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x, \quad \sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$$

が示される．