『工科系のための偏微分方程式入門』

（岡康之・平山浩之・鈴木俊夫・藤ノ木健介 共著，学術図書出版社）

章末問題解答例

第 1 章　フーリエ級数（p.15–p.16）

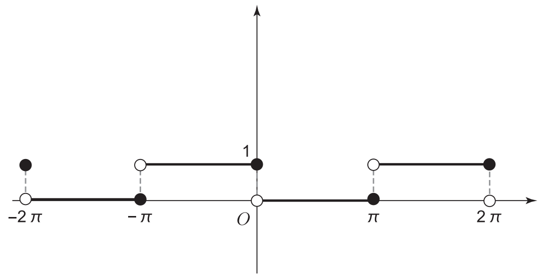
予備知識

$n = 0, 1, 2, \cdots$ とする．次が成立つ．

- $\sin n\pi = \sin(-n\pi) = 0$
- $\cos n\pi = (-1)^n$
- $(-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n$
- $\cos(-ax) = \cos ax,\ \sin(-ax) = -\sin ax\ (a > 0)$
- $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$
- $f(x)$ が偶関数のとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$
- $f(x)$ が奇関数のとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$

1-1

(1)



(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ とする．このとき，

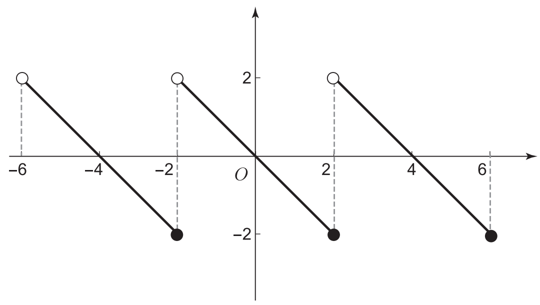
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\ dx = \frac{1}{\pi}\left[x\right]_{-\pi}^{0}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\{0 - (-\pi)\right\} = 1,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos nx\ dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n\pi}\left\{0 - (\sin(-n\pi))\right\} = 0,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin nx\ dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{n\pi}\left\{1 - \cos n\pi\right\}$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\left\{1 - (-1)^n\right\}$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{n\pi} & (n = 2m-1) \\ 0 & (n = 2m) \end{cases} \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

である．

(3) $\displaystyle f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

1-2

(1)



(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ とする．いま $f(x)$ は奇関数より，$a_0 = a_n = 0$ となる．また，

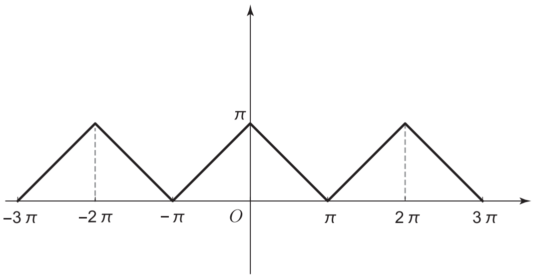
$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\ dx$$
$$= \int_0^2 (-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\ dx$$
$$= -\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\ dx$$
$$= -\left\{\left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\ dx\right\}$$
$$= -\left\{-\frac{2}{n\pi}(2\cos n\pi - 0) + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2\right\}$$
$$= -\left\{\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4}{n^2\pi^2}(0-0)\right\}$$
$$= \frac{4\cdot(-1)^n}{n\pi}$$

である．

(3) $\displaystyle f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$

1-3

(1)



(2) $n=1,2,3,\cdots$ とする．いま $f(x)$ は偶関数より，$b_n=0$ となる．また，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\ dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[\pi x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left\{\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)-(0-0)\right\}$$
$$=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nx\ dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n}(\pi-x)\sin nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\ dx\right\}$$
$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n}(0-0)+\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}\right\}$$
$$=-\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=-\frac{2}{n^2\pi}\left\{(-1)^n-1\right\}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{4}{n^2\pi} & (n=2m-1)\\ 0 & (n=2m)\end{cases}\ (m=1,2,\cdots)$$

である．

(3) $f(x)\sim\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

1-4

(1) $n=1,2,3,\cdots$ とする．いま，$f(x)$ は偶関数より，$b_n=0$ となる．また，

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\ dx=\frac{2}{3}\int_0^3 x\ dx$$
$$=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{1}{3}\times(9-0)=3,$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\ dx$$
$$=\frac{2}{3}\int_0^3 x\cos\frac{n\pi x}{3}\ dx$$
$$=\frac{2}{3}\left\{\left[\frac{3}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3-\frac{3}{n\pi}\int_0^3\sin\frac{n\pi x}{3}\ dx\right\}$$
$$=\frac{2}{3}\left\{\frac{3}{n\pi}(0-0)-\frac{3}{n\pi}\left[-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3\right\}$$
$$=\frac{6}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$$
$$=\frac{6}{n^2\pi^2}\left\{(-1)^n-1\right\}$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{12}{n^2\pi^2} & (n=2m-1)\\ 0 & (n=2m)\end{cases}\ (m=1,2,\cdots)$$

となる．よって，求めるフーリエ級数は，

$$f(x)\sim\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}$$

である．

(2) $n=1,2,3,\cdots$ とする．このとき，

$$a_0=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}f(x)\ dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}(x+4)\ dx=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-4}^{0}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{(0+0)-(8-16)\right\}=2,$$

$$a_n=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}\ dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}(x+4)\cos\frac{n\pi x}{4}\ dx$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left[\frac{4}{n\pi}(x+4)\sin\frac{n\pi x}{4}\right]_{-4}^{0}-\frac{4}{n\pi}\int_{-4}^{0}\sin\frac{n\pi x}{4}\ dx\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{4}{n\pi}(0-0)-\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\right]_{-4}^{0}\right\}$$
$$=\frac{4}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)=\frac{4}{n^2\pi^2}\left\{1-(-1)^n\right\},$$

$$b_n=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4}f(x)\sin\frac{n\pi x}{4}\ dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}(x+4)\sin\frac{n\pi x}{4}\ dx$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left[-\frac{4}{n\pi}(x+4)\cos\frac{n\pi x}{4}\right]_{-4}^{0}+\frac{4}{n\pi}\int_{-4}^{0}\cos\frac{n\pi x}{4}\ dx\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{-\frac{4}{n\pi}(4-0)+\frac{4}{n\pi}\left[\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\right]_{-4}^{0}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{-\frac{4}{n\pi}\cdot(4-0)+\frac{16}{n^2\pi^2}\cdot(0-0)\right\}$$
$$=-\frac{4}{n\pi}$$

となる．以上より，求めるフーリエ級数は，

$$f(x)\sim 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cdot\{1-(-1)^n\}}{\pi^2n^2}\cos\frac{n\pi x}{4}-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\right)$$

である．

1-5

フーリエ余弦級数を求める．与えられた関数 $f(x)=-x+1$ $(0\leq x\leq 1)$ を偶関数に拡張した関数

$$g(x)=\begin{cases}-x+1 & (0\leq x\leq 1)\\ x+1 & (-1<x<0)\end{cases}$$

を基本周期とする周期 2 の周期関数のフーリエ級数を求める．いま，$n=1,2,3,\cdots$ とする．このとき，$g(x)$ は偶関数

なので，$b_n=0$ である．また，

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 2\int_0^1 (1-x)\ dx \\
&= 2\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)-(0-0)\right\} = 1, \\
a_n &= \int_{-1}^{1} g(x)\cos n\pi x\ dx \\
&= 2\int_0^1 (1-x)\cos n\pi x\ dx \\
&= 2\left\{\left[\frac{1}{n\pi}(1-x)\sin n\pi x\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\ dx\right\} \\
&= 2\left\{\frac{1}{n\pi}(0-0) + \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^1\right\} \\
&= -\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = -\frac{2}{n^2\pi^2}\{(-1)^n - 1\} \\
&= \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\pi^2} & (n=2m-1) \\ 0 & (n=2m) \end{cases} \ (m=1,2,\cdots)
\end{aligned}
$$

となる．以上より，求める $f(x)$ のフーリエ余弦級数は，

$$
g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}
$$

である．$f(x) \sim \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$ $(0 \le x \le 1)$ でもよい．

フーリエ正弦級数を求める．与えられた関数 $f(x) = -x+1$ $(0 \le x \le 1)$ を奇関数に拡張した関数

$$
h(x) = \begin{cases} -x+1 & (0<x<1) \\ 0 & (x=-1,0,1) \\ -x-1 & (-1<x<0) \end{cases}
$$

を基本周期とする周期 2 の周期関数のフーリエ級数を求める．いま，$n=1,2,3,\cdots$ とする．このとき，$h(x)$ は奇関数なので，$a_0=a_n=0$ である．また，

$$
\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} h(x)\sin n\pi x\ dx \\
&= 2\int_0^1 (1-x)\sin n\pi x\ dx \\
&= 2\left\{\left[-\frac{1}{n\pi}(1-x)\cos n\pi x\right]_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\ dx\right\} \\
&= 2\left\{-\frac{1}{n\pi}(0-1) - \frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^1\right\} \\
&= 2\left\{\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2}(0-0)\right\} \\
&= \frac{2}{n\pi}
\end{aligned}
$$

となる．以上より，求める $f(x)$ のフーリエ正弦級数は，

$$
h(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}
$$

である．$f(x) \sim \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}$ $(0 \le x \le 1)$ でもよい．

1-6

(1) $n=\pm1,\pm2,\cdots$ とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{6\pi}\left\{\pi^3 - (-\pi)^3\right\} = \frac{\pi^2}{3}, \\
\alpha_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx}\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\underbrace{\left[-\frac{1}{in}x^2e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0} + \frac{2}{in}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\ dx\right\} \\
&= \frac{1}{in\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\ dx \\
&= \frac{1}{in\pi}\left\{\left[-\frac{1}{in}xe^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\ dx\right\} \\
&= \frac{1}{in\pi}\left\{-\frac{1}{in}\left\{\pi e^{-in\pi} - (-\pi)e^{in\pi}\right\} + \frac{1}{in}\left[-\frac{1}{in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{in\pi}\left\{-\frac{(2\pi)\cdot(-1)^n}{in} + \frac{1}{n^2}(e^{-in\pi} - e^{in\pi})\right\} \\
&= \frac{1}{in\pi}\left\{-\frac{(2\pi)\cdot(-1)^n}{in} + \frac{1}{n^2}\{(-1)^n - (-1)^n\}\right\} \\
&= \frac{2\cdot(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}
$$

となる．よって，求めるフーリエ級数は，

$$
f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx}
$$

である．

(2) $n=\pm1,\pm2,\cdots$ とする．

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}|x|\ dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{4}\cdot(4-0) = 1 \qquad \text{(S.1)}
\end{aligned}
$$

を得る．また，

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}|x|e^{-i\frac{n\pi}{2}x}\ dx \\
&= \frac{1}{4}\left\{\int_{-2}^{0}(-x)e^{-i\frac{n\pi}{2}x}\ dx + \int_0^2 xe^{-i\frac{n\pi}{2}x}\ dx\right\} \qquad \text{(S.2)}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$\int_{-2}^{0}(-x)e^{-i\frac{n\pi}{2}x}\ dx = -\int_{-2}^{0} xe^{-i\frac{n\pi}{2}x}\ dx$$

$$= -\left\{\left[-\frac{2}{in\pi}xe^{-i\frac{n\pi}{2}x}\right]_{-2}^{0} + \frac{2}{in\pi}\int_{-2}^{0} e^{-i\frac{n\pi}{2}x}\ dx\right\}$$

$$= -\left\{-\frac{2}{in\pi}(0-(-2)\cdot e^{in\pi}) + \frac{2}{in\pi}\left[-\frac{2}{in\pi}e^{-i\frac{n\pi}{2}x}\right]_{-2}^{0}\right\}$$

$$= \frac{4\cdot(-1)^n}{in\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}(1-e^{in\pi})$$

$$= \frac{4\cdot(-1)^n}{in\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\{1-(-1)^n\} \tag{S.3}$$

となり，また，

$$\int_{0}^{2} xe^{-i\frac{n\pi}{2}x}\ dx = \int_{0}^{2} xe^{-i\frac{n\pi}{2}x}\ dx$$

$$= \left[-\frac{2}{in\pi}xe^{-i\frac{n\pi}{2}x}\right]_{0}^{2} + \frac{2}{in\pi}\int_{0}^{2} e^{-i\frac{n\pi}{2}x}\ dx$$

$$= -\frac{2}{in\pi}(2\cdot e^{-in\pi}-0) + \frac{2}{in\pi}\left[-\frac{2}{in\pi}e^{-i\frac{n\pi}{2}x}\right]_{0}^{2}$$

$$= -\frac{4\cdot(-1)^n}{in\pi} + \frac{4}{n^2\pi^2}(e^{-in\pi}-1)$$

$$= -\frac{4\cdot(-1)^n}{in\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\{1-(-1)^n\} \tag{S.4}$$

となる．よって， (S.2), (S.3), (S.4) より，

$$\alpha_n = \frac{1}{4}\Big\{\frac{4\cdot(-1)^n}{in\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\{1-(-1)^n\} - \frac{4\cdot(-1)^n}{in\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\Big\}$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi^2}\{1-(-1)^n\}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi^2} & (n=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots) \\ 0 & (n=\pm2,\pm4,\pm6,\cdots)\end{cases} \tag{S.5}$$

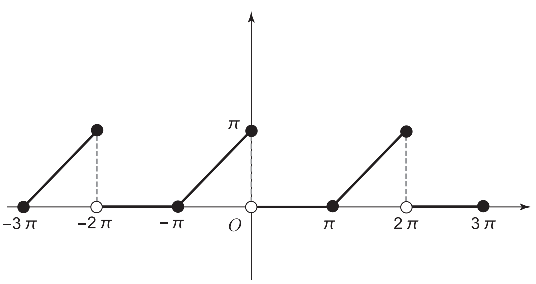
となる．以上 (S.1), (S.5) より，求めるフーリエ級数は，

$$f(x) \sim 1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{i\frac{(2n-1)\pi}{2}x}$$

である．

1-7

(1) $f(x)$ のグラフは次のようになる．



また，$f(x)$ のフーリエ係数は，$n=1,2,\cdots$ とすると，

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2+\pi x\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi}\left\{(0+0)-\left(\frac{\pi^2}{2}-\pi^2\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\cos nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{n}(x+\pi)\sin nx\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\ dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{n}(0-0) - \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{0}\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\{1-\cos(-n\pi)\} = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{n}(x+\pi)\cos nx\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\ dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1}{n}(\pi-0) + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{0}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n} + \frac{1}{n^2}(0-0)\right\} = -\frac{1}{n}$$

となる．よって，$f(x)$ のフーリエ級数は，

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx - \frac{1}{n}\sin nx\right) \tag{S.6}$$

である．いま，$f(x)$ のフーリエ級数は $x=0$ のとき $\frac{\pi}{2}$ となるので，(S.6) より，

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

である．

第 2 章　フーリエ変換（p.34）

2-1

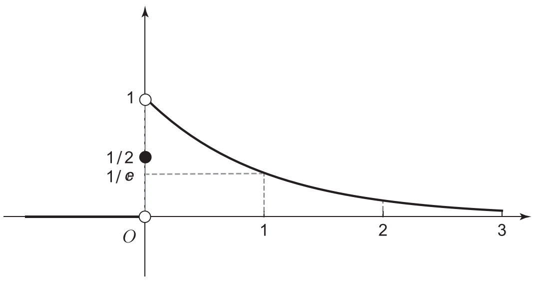
(1) $f(x)$ のフーリエ変換は，

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-ix\xi}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\xi)x}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{1+i\xi} e^{-(1+i\xi)x} \right]_0^{\infty} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\xi)} (0-1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\xi)} = \frac{1-i\xi}{\sqrt{2\pi}(1+\xi^2)}
\end{aligned}
$$

である．また，フーリエ逆変換より $f(x)$ は次の積分表示を持つ．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\ d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-i\xi}{\sqrt{2\pi}(1+\xi^2)} \right) e^{ix\xi}\ d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-i\xi}{1+\xi^2} e^{ix\xi}\ d\xi.
\end{aligned}
$$

$f(x)$ のグラフは次のようになる．



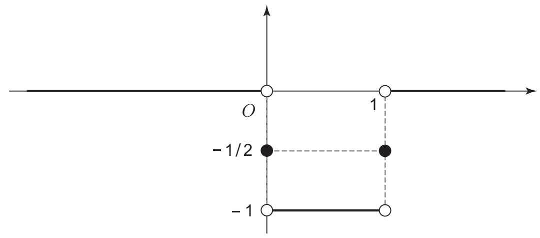
(2) $f(x)$ のフーリエ変換は，

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\ dx \\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} (-1) e^{-ix\xi}\ dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{i\xi} e^{-ix\xi} \right]_0^{1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} i\xi} (e^{-i\xi} - 1) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}\xi} (1 - e^{-i\xi})
\end{aligned}
$$

である．また，フーリエ逆変換より $f(x)$ は次の積分表示を持つ．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\ d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i}{\sqrt{2\pi}\xi} (1 - e^{-i\xi}) \right) e^{ix\xi}\ d\xi \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\xi}}{\xi} e^{ix\xi}\ d\xi.
\end{aligned}
$$

$f(x)$ のグラフは次のようになる．



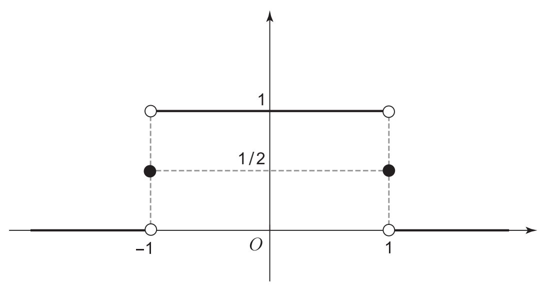
(3) $f(x)$ のフーリエ変換は，

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{i\xi} e^{-ix\xi} \right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} i\xi} (e^{-i\xi} - e^{i\xi}) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}\xi} \cdot (-2i \sin\xi) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\xi}{\xi}
\end{aligned}
$$

である．また，フーリエ逆変換より $f(x)$ は次の積分表示を持つ．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\ d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\xi}{\xi} \right) e^{ix\xi}\ d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\xi}{\xi} e^{ix\xi}\ d\xi.
\end{aligned}
$$

$f(x)$ のグラフは次のようになる．



(4) $f(x)$ のフーリエ変換は，

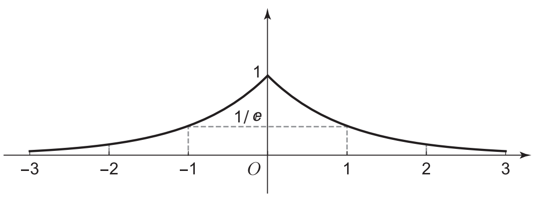
$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-ix\xi}\ dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-ix\xi}\ dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-ix\xi}\ dx\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\xi)x}\ dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\xi)x}\ dx\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\frac{1}{1-i\xi}e^{(1-i\xi)x}\right]_{-\infty}^{0}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left[-\frac{1}{1+i\xi}e^{-(1+i\xi)x}\right]_{0}^{\infty}\right\}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{1-i\xi}(1-0) - \frac{1}{1+i\xi}(0-1)\right\}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2}{(1-i\xi)(1+i\xi)}\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}
\end{aligned}
$$

である．また，フーリエ逆変換より $f(x)$ は次の積分表示を持つ．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\xi^2}\right)e^{ix\xi}\ d\xi\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix\xi}}{1+\xi^2}\ d\xi.
\end{aligned}
$$

$f(x)$ のグラフは次のようになる．



2-2

関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ のフーリエ変換は，

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}e^{-ix\xi}\ dx\\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\times\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}e^{ix(-\xi)}\ dx\right) \qquad \text{(S.7)}
\end{aligned}
$$

と表せる．一方で，***2-1*** (4) より，$e^{-|x|}$ の積分表示は，

$$
e^{-|x|} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi^2+1}e^{ix\xi}\ d\xi
$$

となる．ここで，x と ξ の役割を入れ換える（$x \to \xi$, $\xi \to x$）と，

$$
e^{-|\xi|} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}e^{ix\xi}\ dx \qquad \text{(S.8)}
$$

となる．(S.7) と (S.8) より，$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ のフーリエ変換は，

$$
\widehat{\frac{1}{x^2+1}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|-\xi|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|\xi|}
$$

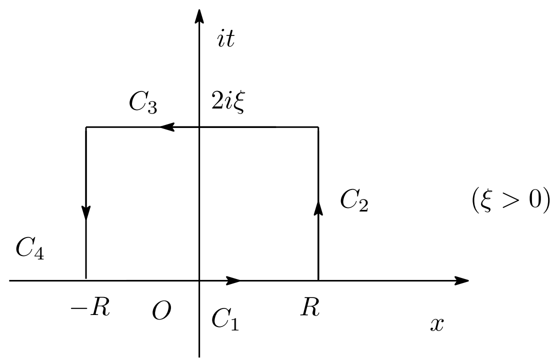
である．

2-3

関数 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$ のフーリエ変換は定義より，

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4}}e^{-ix\xi}\ dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}(x+2i\xi)^2}\ dx
\end{aligned}
$$

となる．いま，$\xi > 0$ とし，積分 $\displaystyle\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{4}}\ dz$ を考える．ただし，$z = x + it$ は複素変数で，曲線 C_R は以下の $C_R = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ で表される閉曲線である．



複素関数 $e^{-\frac{z^2}{4}}$ は複素平面全体で正則なので，コーシーの積分定理より，

$$
\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{4}}\ dz = 0
$$

となる．つまり，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-R}^{R}e^{-\frac{x^2}{4}}\ dx + \int_{0}^{2\xi}e^{-\frac{1}{4}(R+it)^2}\ idt\\
&-\int_{-R}^{R}e^{-\frac{1}{4}(x+2i\xi)^2}dx - \int_{0}^{2\xi}e^{-\frac{1}{4}(-R+it)^2}\ idt = 0 \quad \text{(S.9)}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{0}^{2\xi}e^{-\frac{1}{4}(R+it)^2}\ idt\right| &\le \int_{0}^{2\xi}\left|e^{-\frac{1}{4}(R+it)^2}\right|\ dt\\
&\le \int_{0}^{2\xi}e^{-\frac{1}{4}(R^2-t^2)}\ dt\\
&\le 2\xi e^{\xi^2}e^{-\frac{R^2}{4}}\\
&\to 0 \ \ (R\to\infty)
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{2\xi}e^{-\frac{1}{4}(R+it)^2}\ idt = 0
$$

を得る．同様に，

$$
\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{2\xi}e^{-\frac{1}{4}(-R+it)^2}\ idt = 0
$$

も得るので，(S.9) より，

$$
\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}(x+2i\xi)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4}}\ dx \qquad \text{(S.10)}
$$

となる．$\xi < 0$ のときも同様の議論より (S.10) は成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}}\ dx \\ &= \sqrt{2} e^{-\xi^2}\end{aligned}$$

となる．以上より，

$$\widehat{e^{-\frac{x^2}{4}}}(\xi) = \sqrt{2} e^{-\xi^2}$$

である．

2-4

オイラーの公式から，

$$\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

となる．一方，

$$\delta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{1}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\ dx$$

なので，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\sin kx](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sin kx) e^{-ix\xi}\ dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) e^{-ix\xi}\ dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i(\xi - k)x} - e^{-i(\xi + k)x} \right) dx \right\} \\ &= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(\xi - k) + \delta(\xi + k))\end{aligned}$$

と表せる．よって，

$$\mathcal{F}[\sin kx](\xi) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(\xi - k) + \delta(\xi + k))$$

である．

2-5

$g(x) = e^{-|x|}$ とおく．このとき，***2-1*** (4) より，$g(x)$ のフーリエ変換は，

$$\hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \xi^2} \tag{S.11}$$

となる．いま，$f(x) = e^{-|x+3|}$ は $g(x)$ を x 軸に対して -3 だけ平行移動した関数なので，(S.11) より，

$$\hat{f}(\xi) = e^{3i\xi} \hat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{3i\xi}}{1 + \xi^2}$$

である．

2-6

$f(x) = e^{-x^2}$ のフーリエ変換は，例題 2.3 より，$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$ なので，

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2 f}{dx^2} \right](\xi) = -\xi^2 \mathcal{F}[f](\xi) = -\frac{\xi^2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$$

となる．また，$g(x) = \frac{1}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x^2 + 4}$ のフーリエ変換は，例題 2.2 より，$\mathcal{F}[g](\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} e^{-2|\xi|}$ なので，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f](\xi) \mathcal{F}[g](\xi) \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} e^{-2|\xi|} \right) \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-\xi^2 - 2|\xi|}\end{aligned}$$

である．

2-7

2-2 より，$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1 + x^2} \right](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\xi|}$ であるので，$g(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\xi|}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{1}{(1 + x^2)^2} \right](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (g * g)(\xi) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|} e^{-|\xi - \eta|}\ d\eta \end{aligned} \tag{S.12}$$

となる．いま，$\xi \geq 0$ に対し，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|} e^{-|\xi - \eta|}\ d\eta &= \int_{-\infty}^{0} e^{2\eta - \xi}\ d\eta + \int_{0}^{\xi} e^{-\xi}\ d\eta \\ &\quad + \int_{\xi}^{\infty} e^{-2\eta + \xi}\ d\eta \\ &= \frac{e^{-\xi}}{2} + \xi e^{-\xi} + \frac{e^{-\xi}}{2} \\ &= e^{-\xi} + \xi e^{-\xi}\end{aligned}$$

を得る．一方で，$\xi < 0$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|} e^{-|\xi - \eta|}\ d\eta &= \int_{-\infty}^{\xi} e^{2\eta - \xi}\ d\eta + \int_{\xi}^{0} e^{\xi}\ d\eta \\ &\quad + \int_{0}^{\infty} e^{-2\eta + \xi}\ d\eta \\ &= \frac{e^{\xi}}{2} + (-\xi) e^{\xi} + \frac{e^{\xi}}{2} \\ &= e^{\xi} - \xi e^{\xi}\end{aligned}$$

を得るので，すべての ξ に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|} e^{-|\xi - \eta|}\ d\eta = (1 + |\xi|) e^{-|\xi|} \tag{S.13}$$

となる．よって，(S.12) と (S.13) より，

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{(1 + x^2)^2} \right](\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1 + |\xi|) e^{-|\xi|}$$

である．

第 3 章　ラプラス変換（p.62–64）

3-1

ラプラス変換の定義より，

$$\mathcal{L}[t^2](s) = \int_0^\infty t^2 e^{-st}\, dt$$
$$= \left[-\frac{1}{s}t^2 e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-st}\, dt. \quad \text{(S.14)}$$

ここで，$s > 0$ なのでロピタルの定理より，

$$\lim_{t\to\infty} te^{-st} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{st}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{se^{st}} = 0$$

となる．同様に，

$$\lim_{t\to\infty} t^2 e^{-st} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^{st}} = \lim_{t\to\infty}\frac{2t}{se^{st}} = \lim_{t\to\infty}\frac{2}{s^2 e^{st}} = 0$$

となるので，(S.14) より，

$$\mathcal{L}[t^2](s) = -\frac{1}{s}(0-0) + \frac{2}{s}\left\{\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt\right\}$$
$$= \frac{2}{s}\left\{-\frac{1}{s}(0-0) + \frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty\right\}$$
$$= -\frac{2}{s^3}(0-1) = \frac{2}{s^3}.$$

3-2

(1) ラプラス変換の線形性より，

$$\mathcal{L}[t^2 - t - 2](s) = \mathcal{L}[t^2](s) - \mathcal{L}[t](s) - 2\mathcal{L}[1](s)$$
$$= \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}$$

である．

(2) ラプラス変換の線形性より，

$$\mathcal{L}[2t^3 + 1](s) = 2\mathcal{L}[t^3](s) + \mathcal{L}[1](s)$$
$$= 2\cdot\frac{3!}{s^4} + \frac{1}{s} = \frac{12}{s^4} + \frac{1}{s}$$

である．

(3) ラプラス変換の線形性より，

$$\mathcal{L}[e^{-2t} + 2e^{3t}](s) = \mathcal{L}[e^{-2t}](s) + 2\mathcal{L}[e^{3t}](s)$$
$$= \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s-3}$$

である．

(4) ラプラス変換の線形性より，

$$\mathcal{L}[3t^4 - 2e^{-2t}](s) = 3\mathcal{L}[t^4](s) - 2\mathcal{L}[e^{-2t}](s)$$
$$= 3\cdot\frac{4!}{s^5} - 2\cdot\frac{1}{s+2}$$
$$= \frac{72}{s^5} - \frac{2}{s+2}$$

である．

(5) ラプラス変換の線形性より，

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} - e^{-t}\right](s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[t^2](s) + \frac{1}{6}\mathcal{L}[t^3](s) - \mathcal{L}[e^{-t}](s)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2!}{s^3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3!}{s^4} - \frac{1}{s+1}$$
$$= \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4} - \frac{1}{s+1}$$

である．

(6) ラプラス変換の線形性より，

$$\mathcal{L}[\cos t + \sin t](s) = \mathcal{L}[\cos t](s) + \mathcal{L}[\sin t](s)$$
$$= \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} = \frac{s+1}{s^2+1}$$

である．

(7) ラプラス変換の線形性より，

$$\mathcal{L}[3\cos 2t + 1](s) = 3\mathcal{L}[\cos 2t](s) + \mathcal{L}[1](s)$$
$$= \frac{3s}{s^2+4} + \frac{1}{s}$$

である．

(8) 三角関数の半角公式より，$\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$．よって，ラプラス変換の線形性より，

$$\mathcal{L}[\cos^2 t](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right](s)$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}[1](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2t](s)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}$$
$$= \frac{(s^2+4)+s^2}{2s(s^2+4)} = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$$

である．

(9) 三角関数の半角公式より，$\sin^2 3t = \dfrac{1-\cos 6t}{2}$．よって，ラプラス変換の線形性より，

$$\mathcal{L}[\sin^2 3t](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6t\right](s)$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}[1](s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 6t](s)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+36}$$
$$= \frac{(s^2+36)-s^2}{2s(s^2+36)} = \frac{18}{s(s^2+36)}$$

である．

(10) 三角関数の加法定理より，

$$\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2t\cos\frac{\pi}{4} - \cos 2t\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2t$$

となるので，ラプラス変換の線形性より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2t\right](s)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}[\sin 2t](s) - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}[\cos 2t](s)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{s^2+4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{s}{s^2+4}\\ &= \frac{2-s}{\sqrt{2}(s^2+4)}\end{aligned}$$

である．

(11) 三角形の加法定理より，

$$\begin{aligned}\cos\left(t-\frac{2}{3}\pi\right) &= \cos t\cos\frac{2}{3}\pi + \sin t\sin\frac{2}{3}\pi\\ &= -\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\end{aligned}$$

なので，ラプラス変換の線形性より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\cos\left(t-\frac{2}{3}\pi\right)\right](s) &= \mathcal{L}\left[-\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right](s)\\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos t](s) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{L}[\sin t](s)\\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}\\ &= \frac{\sqrt{3}-s}{2(s^2+1)}\end{aligned}$$

である．

3-3

(1) $\mathcal{L}[t^2](s) = \dfrac{2!}{s^3}$ より，

$$\mathcal{L}[t^2e^{2t}](s) = \frac{2!}{(s-2)^3} = \frac{2}{(s-2)^3}$$

である．

(2) $\mathcal{L}[t^3](s) = \dfrac{3!}{s^4}$ より，

$$\mathcal{L}[t^3e^{-2it}](s) = \frac{3!}{(s+2i)^4} = \frac{6}{(s+2i)^4}$$

である．

(3) $\mathcal{L}[\sin 2t](s) = \dfrac{2}{s^2+4}$ より，

$$\mathcal{L}[e^t\sin 2t](s) = \frac{2}{(s-1)^2+4}$$

である．

(4) $\mathcal{L}[\cos 3t](s) = \dfrac{s}{s^2+9}$ より，

$$\mathcal{L}[e^{-2t}\cos 3t](s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

である．

(5) $\mathcal{L}[\cos 2t](s) = \dfrac{s}{s^2+4}$ より，

$$\mathcal{L}[e^{-3it}\cos 2t](s) = \frac{s+3i}{(s+3i)^2+4}$$

である．

3-4

(1) $\mathcal{L}[\sin 3t](s) = \dfrac{3}{s^2+9}$ より，

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin 3u\ du\right](s) = \frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}[\sin 3t](s) = \frac{3}{s(s^2+9)}$$

である．

(2) $\mathcal{L}[\cos(-2t)](s) = \dfrac{s}{s^2+4}$ より，

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \cos(-2u)\ du\right](s) = \frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}[\cos(-2t)](s) = \frac{1}{s^2+4}$$

である．

(3) $\mathcal{L}[t^3-e^{-t}](s) = \dfrac{3!}{s^4} - \dfrac{1}{s+1}$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t (u^3-e^{-u})\ du\right](s) &= \frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}[t^3-e^{-t}](s) = \frac{1}{s}\left(\frac{3!}{s^4}-\frac{1}{s+1}\right)\\ &= \frac{6}{s^5} - \frac{1}{s(s+1)}\end{aligned}$$

である．

(4) $\mathcal{L}[t^2-e^{2it}](s) = \dfrac{2!}{s^3} - \dfrac{1}{s-2i}$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t (u^2-e^{2iu})\ du\right](s) &= \frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}[t^2-e^{2it}](s) = \frac{1}{s}\left(\frac{2!}{s^3}-\frac{1}{s-2i}\right)\\ &= \frac{2}{s^4} - \frac{1}{s(s-2i)}\end{aligned}$$

である．

(5) $\mathcal{L}[e^{-2t}t^2](s) = \dfrac{2!}{(s+2)^3}$ より，

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-2u}u^2\ du\right](s) = \frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}[e^{-2t}t^2](s) = \frac{2}{s(s+2)^3}$$

である．

(6) $\mathcal{L}[e^{3t}\cos 2t](s) = \dfrac{s-3}{(s-3)^2+4}$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{3u}\cos 2u\ du\right](s) &= \frac{1}{s}\cdot\mathcal{L}[e^{3t}\cos 2t](s)\\ &= \frac{s-3}{s\{(s-3)^2+4\}}\\ &= \frac{s-3}{s(s^2-6s+13)}\end{aligned}$$

である．

3-5

(1) $\mathcal{L}[\sin 3t](s) = \dfrac{3}{s^2+9}$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t\sin 3t](s) &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)\\ &= (-3)\cdot\frac{d}{ds}\left\{(s^2+9)^{-1}\right\}\\ &= (-3)\cdot(-1)\cdot(s^2+9)^{-2}\cdot(2s)\\ &= \frac{6s}{(s^2+9)^2}\end{aligned}$$

である．

(2) $\mathcal{L}[\cos\sqrt{2}t](s) = \dfrac{s}{s^2+2}$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t\cos\sqrt{2}t](s) &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+2}\right)\\ &= -\frac{1\cdot(s^2+2)-s\cdot(2s)}{(s^2+2)^2}\\ &= \frac{s^2-2}{(s^2+2)^2}\end{aligned}$$

である．

(3) $\mathcal{L}[\sin 3t](s) = \dfrac{3}{s^2+9}$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t u\sin 3u\ du\right](s) &= \left(-\frac{1}{s}\right)\cdot\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)\right\}\\ &= \left(-\frac{3}{s}\right)\cdot\left\{\frac{d}{ds}\left((s^2+9)^{-1}\right)\right\}\\ &= \left(-\frac{3}{s}\right)\cdot(-1)\cdot(s^2+9)^{-2}\cdot(2s)\\ &= \frac{6}{(s^2+9)^2}\end{aligned}$$

である．

(4) $\mathcal{L}[e^{-2t}](s) = \dfrac{1}{s+2}$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t ue^{-2u}\ du\right](s) &= \frac{1}{s}\left(-\frac{d}{ds}F(s)\right)\\ &= \left(-\frac{1}{s}\right)\cdot\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right)\right\}\\ &= \left(-\frac{1}{s}\right)\cdot\left\{\frac{d}{ds}\left((s+2)^{-1}\right)\right\}\\ &= \left(-\frac{1}{s}\right)\cdot(-1)\cdot(s+2)^{-2}\\ &= \frac{1}{s(s+2)^2}\end{aligned}$$

である．

3-6

関数 $f(t)$ は周期 2 の周期関数より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 f(t)e^{-st}\ dt\\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\int_0^1 te^{-st}\ dt + \int_1^2 (2-t)e^{-st}\ dt\right\}\end{aligned} \tag{S.15}$$

となる．いま，

$$\begin{aligned}\int_0^1 te^{-st}\ dt &= \left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}\ dt\\ &= -\frac{1}{s}\left(e^{-s}-0\right) + \frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^1\\ &= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}-1}{s^2}\end{aligned} \tag{S.16}$$

となり，また，

$$\begin{aligned}\int_1^2 (2-t)e^{-st}\ dt &= \left[-\frac{1}{s}(2-t)e^{-st}\right]_1^2 - \int_1^2 e^{-st}\ dt\\ &= -\frac{1}{s}(0-e^{-s}) - \frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_1^2\\ &= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s^2}\end{aligned} \tag{S.17}$$

となるので，(S.15), (S.16), (S.17) より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left\{\left(-\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1-e^{-s}}{s^2}\right)\right.\\ &\qquad\left. + \left(\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s^2}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\cdot\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}\\ &= \frac{1}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})}\cdot\frac{(1-e^{-s})^2}{s^2}\\ &= \frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})} = \frac{1-\dfrac{1}{e^s}}{s^2\left(1+\dfrac{1}{e^s}\right)} = \frac{e^s-1}{s^2(e^s+1)}\end{aligned}$$

となる．

3-7

$\mathcal{L}[e^{3t}](s) = \dfrac{1}{s-3}$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[U\left(t-\frac{2}{3}\right)e^{3t-2}\right](s) &= \mathcal{L}\left[U\left(t-\frac{2}{3}\right)e^{3(t-\frac{2}{3})}\right](s)\\ &= \frac{e^{-\frac{2}{3}s}}{s-3}\end{aligned}$$

である．

3-8

関数 $f(t)$ は $f(t) = \begin{cases} 2 & (0 < t \leq 1) \\ 0 & (1 < t \leq 2)\end{cases}$ を基本周期に持つ周期 2 の周期関数より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](t) &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 f(t)e^{-st}\ dt\\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^1 2e^{-st}\ dt\\ &= \frac{2}{1-e^{-2s}}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{1-e^{-2s}}\cdot\left(-\frac{1}{s}\right)\cdot(e^{-s}-1)\\ &= \frac{2(1-e^{-s})}{s(1-e^{-s})(1+e^{-s})}\\ &= \frac{2}{s(1+e^{-s})} = \frac{2}{s\left(1+\dfrac{1}{e^s}\right)}\\ &= \frac{2e^s}{s(e^s+1)}\end{aligned}$$

となる．

（別解）$f(t)=2U(t)-2U(t-1)+2U(t-2)-2U(t-3)+\cdots$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](t)&=\frac{2}{s}-\frac{2e^{-s}}{s}+\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{2e^{-3s}}{s}+\cdots\\&=\frac{2}{s}\underbrace{\left(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+\cdots\right)}_{\text{初項 1，公比}-e^{-s}\text{の無限等比級数}}\\&=\frac{2}{s}\times\frac{1}{1-(-e^{-s})}=\frac{2}{s(1+e^{-s})}\\&=\frac{2e^s}{s(e^s+1)}\end{aligned}$$

となる．

3-9

$$\begin{aligned}F(s)&=\mathcal{L}[f](s)=\mathcal{L}[t^3](s)=\frac{3!}{s^4},\\G(s)&=\mathcal{L}[g](s)=\mathcal{L}[3\cos 2t](s)=\frac{3s}{s^2+4},\\H(s)&=\mathcal{L}[h](s)=\mathcal{L}[2e^{-t}](s)=\frac{2}{s+1}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f*g*h](s)&=F(s)G(s)H(s)\\&=\frac{3!}{s^4}\times\frac{3s}{s^2+4}\times\frac{2}{s+1}\\&=\frac{36}{s^3(s+1)(s^2+4)}\end{aligned}$$

となる．

3-10

$\lambda>-1$ とする．このとき，ラプラス変換の定義より，

$$\mathcal{L}[t^\lambda](s)=\int_0^\infty t^\lambda e^{-st}\,dt\quad(s>0)\tag{S.18}$$

となる．ここで，$T=st$ と置換すると，$t=\dfrac{T}{s}$, $dt=\dfrac{1}{s}dT$, $t:0\to\infty$ のとき $T:0\to\infty$ より，(S.18) から

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^\lambda](s)&=\int_0^\infty\left(\frac{T}{s}\right)^\lambda e^{-T}\frac{dT}{s}\\&=\frac{1}{s^{\lambda+1}}\underbrace{\int_0^\infty e^{-T}T^{(\lambda+1)-1}\,dT}_{\Gamma(\lambda+1)}\\&=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}\end{aligned}\tag{S.19}$$

を得る．ここで，

$$\Gamma(x):=\int_0^\infty e^{-y}y^{x-1}dy$$

であり，これはガンマ関数と呼ばれる．特に，(S.19) において $\lambda=\dfrac{1}{2}$ とすると，

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

より，

$$\mathcal{L}[\sqrt{t}](s)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{s^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}$$

となる．

3-11

(1) ラプラス逆変換の線形性より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}+\frac{3}{s-2}\right](t)&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right](t)+3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right](t)\\&=t^3+3e^{2t}\end{aligned}$$

である．

(2) ラプラス逆変換の線形性より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-i\omega}-\frac{1}{s+i\omega}\right](t)&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-i\omega}\right](t)-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+i\omega}\right](t)\\&=e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}=2i\sin\omega t\end{aligned}$$

である．

(3) ラプラス逆変換の線形性より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}+\frac{12}{s^2+16}\right](t)&=2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t)+3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+16}\right](t)\\&=2+3\sin 4t\end{aligned}$$

である．

(4) ラプラス逆変換の線形性より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+9}+\frac{3s}{s^2+9}\right](t)&=3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+9}\right](t)+3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t)\\&=3e^{-9t}+3\cos 3t=3(e^{-9t}+\cos 3t)\end{aligned}$$

である．

(5) ラプラス逆変換の線形性より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2+4}\right](t)&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right](t)-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right](t)\\&=\cos 2t-\sin 2t\end{aligned}$$

である．

(6) ラプラス逆変換の線形性より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-1}{s^2+9}\right](t)&=2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t)-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right](t)\\&=2\cos 3t-\frac{1}{3}\sin 3t\end{aligned}$$

である．

(7) ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8s-1}{4s^2+1}\right](t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{8s-1}{s^2+\frac{1}{4}}\right](t)$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-\frac{1}{4}}{s^2+\frac{1}{4}}\right](t)$$

$$=2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}\right](t)$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{s^2+\frac{1}{4}}\right](t)$$

$$=2\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}$$

である．

3-12

(1) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2!}{s^3}\right](t)=t^2$．よって，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2!}{(s-2)^3}\right](t)=e^{2t}t^2=t^2e^{2t}$$

となる．

(2) $F(s)=\dfrac{4}{(s+2)^4}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3!}{(s+2)^4}$．いま，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right](t)=t^3$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s+2)^4}\right](t)=\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{(s+2)^4}\right](t)$$

$$=\frac{2}{3}e^{-2t}t^3=\frac{2}{3}t^3e^{-2t}$$

となる．

(3) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t)=\cos 3t$．よって，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right](t)=e^{2t}\cos 3t$$

となる．

(4)

$$F(s)=\frac{2(s-5)}{(s-2)^2+9}=2\cdot\frac{(s-2)-3}{(s-2)^2+9}$$

$$=2\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+9}-\frac{3}{(s-2)^2+9}\right\}.$$

いま，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t)=\cos 3t,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right](t)=\sin 3t$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t)$$

$$=2\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right](t)-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s-2)^2+9}\right](t)\right\}$$

$$=2\left\{e^{2t}\cos 3t-e^{2t}\sin 3t\right\}=2e^{2t}(\cos 3t-\sin 3t)$$

となる．

(5) $F(s)=\dfrac{s-2}{(s-2)^2+4}$ となるので，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right](t)=\cos 2t$$

より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t)=e^{2t}\cos 2t$$

となる．

(6) $F(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2+1}$ となるので，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t)=\sin t$$

より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t)=e^{t}\sin t$$

となる．

(7)

$$F(s)=\frac{2s}{(s+1)^2+4}=\frac{2(s+1)-2}{(s+1)^2+4}$$

$$=2\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+4}-\frac{2}{(s+1)^2+4}.$$

いま，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right](t)=\cos 2t,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right](t)=\sin 2t$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t)=2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right](t)-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+4}\right](t)$$

$$=2e^{-t}\cos 2t-e^{-t}\sin 2t=e^{-t}(2\cos 2t-\sin 2t)$$

となる．

(8)

$$F(s)=\frac{3(s+2)+2}{(s+2)^2+1}$$

$$=3\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+2\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1}.$$

いま，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right](t)=\cos t,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t)=\sin t$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right](t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right](t)$$
$$= 3e^{-2t}\cos t + 2e^{-2t}\sin t = e^{-2t}(3\cos t + 2\sin t)$$

となる．

(9)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{d}{ds}\left\{(s^2+4)^{-1}\right\}$$
$$= (-1)\cdot(s^2+4)^{-2}\cdot(2s) = -\frac{2s}{(s^2+4)^2}$$

より，

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)\right] = \frac{1}{4}\cdot\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\right]$$

となる．いま，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right](t) = \sin 2t$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](s) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}\right](t)$$
$$= \frac{t}{4}\sin 2t$$

となる．

(10)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+2}\right) = \frac{d}{ds}\left\{(s^2+2)^{-1}\right\}$$
$$= (-1)\cdot(s^2+2)^{-2}\cdot(2s) = -\frac{2s}{(s^2+2)^2}$$

より，

$$F(s) = \frac{2s}{(s^2+2)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right)\right]$$

となる．いま，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right](t) = \sin\sqrt{2}t$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right)\right](t)$$
$$= \frac{t}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$$

となる．

(11)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{3s^2+1}\right) = \frac{d}{ds}\left\{(3s^2+1)^{-1}\right\}$$
$$= (-1)\cdot(3s^2+1)^{-2}\cdot(6s) = -\frac{6s}{(3s^2+1)^2}$$

より，

$$F(s) = \frac{6s}{(3s^2+1)^2} = \left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{3s^2+1}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+\frac{1}{3}}\right)\right]$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{s^2+\frac{1}{3}}\right)\right]$$

となる．いま，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{s^2+\frac{1}{3}}\right](t) = \sin\frac{t}{\sqrt{3}} = \sin\frac{\sqrt{3}}{3}t$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](s) = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{s^2+\frac{1}{3}}\right)\right](t)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}t\sin\frac{\sqrt{3}}{3}t$$

となる．

3-13

(1) $F(s) = \dfrac{s+3}{(s-2)(s+2)} = \dfrac{c_1}{s-2} + \dfrac{c_2}{s+2}$

とおくと，

$$c_1 = \lim_{s\to 2}(s-2)F(s) = \lim_{s\to 2}\frac{s+3}{s+2} = \frac{5}{4},$$
$$c_2 = \lim_{s\to -2}(s+2)F(s) = \lim_{s\to -2}\frac{s+3}{s-2} = -\frac{1}{4}$$

より，

$$F(s) = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2}$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{5}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right](t) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](t)$$
$$= \frac{5}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

となる．

(2)

$$F(s) = \frac{s}{(2s-2)(s-3)} = \frac{s}{2(s-1)(s-3)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s-3}\right)$$

とおく．さらに，$G(s) = \dfrac{s}{(s-1)(s-3)}$ とおくと，

$$c_1 = \lim_{s\to 1}(s-1)G(s) = \lim_{s\to 1}\frac{s}{s-3} = -\frac{1}{2},$$
$$c_2 = \lim_{s\to 3}(s-3)G(s) = \lim_{s\to 3}\frac{s}{s-1} = \frac{3}{2}$$

より，

$$F(s) = \frac{1}{2}G(s) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s-3}$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right](t)$$
$$= -\frac{1}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{3t}$$

となる．

(3)

$$F(s) = \frac{2s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{c_1}{s-2} + \frac{c_2}{s+1}$$

とおくと，

$$c_1 = \lim_{s\to 2}(s-2)F(s) = \lim_{s\to 2}\frac{2s-1}{s+1} = 1,$$
$$c_2 = \lim_{s\to -1}(s+1)F(s) = \lim_{s\to -1}\frac{2s-1}{s-2} = 1$$

より，

$$F(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+1}$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](t)$$
$$= e^{2t} + e^{-t}$$

となる．

(4)

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s+1)} = \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s-2} + \frac{c_3}{s+1}$$

とおくと，

$$c_1 = \lim_{s\to 1}(s-1)F(s) = \lim_{s\to 1}\frac{1}{(s-2)(s+1)} = -\frac{1}{2},$$
$$c_2 = \lim_{s\to 2}(s-2)F(s) = \lim_{s\to 2}\frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{3},$$
$$c_3 = \lim_{s\to -1}(s+1)F(s) = \lim_{s\to -1}\frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{6}$$

より，

$$F(s) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s+1}$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right](t)$$
$$+ \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](t)$$
$$= -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t}$$

となる．

(5) $$F(s) = \frac{1}{s(s+2)^2} = \frac{c_1}{s} + \frac{d_1}{s+2} + \frac{d_2}{(s+2)^2}$$

とおくと，

$$c_1 = \lim_{s\to 0}sF(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{(s+2)^2} = \frac{1}{4},$$
$$d_1 = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to -2}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left\{(s+2)^2F(s)\right\}$$
$$= \lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \lim_{s\to -2}\left(-\frac{1}{s^2}\right) = -\frac{1}{4},$$
$$d_2 = \frac{1}{(2-2)!}\lim_{s\to -2}\frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}}\left\{(s+2)^2F(s)\right\}$$
$$= \lim_{s\to -2}\frac{1}{s} = -\frac{1}{2}$$

より，

$$F(s) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+2)^2}$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](t)$$
$$-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right](t)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{t}{2}e^{-2t}$$

となる．

(6)

$$F(s) = \frac{2s-1}{s(s+1)^2} = \frac{c_1}{s} + \frac{d_1}{s+1} + \frac{d_2}{(s+1)^2}$$

とおくと，

$$c_1 = \lim_{s\to 0}sF(s) = \lim_{s\to 0}\frac{2s-1}{(s+1)^2} = -1,$$
$$d_1 = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to -1}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left\{(s+1)^2F(s)\right\}$$
$$= \lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left(\frac{2s-1}{s}\right) = \lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}\left(2-\frac{1}{s}\right) = \lim_{s\to -1}\frac{1}{s^2}$$
$$= 1,$$

$$d_2 = \frac{1}{(2-2)!} \lim_{s \to -1} \frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}} \left\{ (s+1)^2 F(s) \right\}$$
$$= \lim_{s \to -1} \frac{2s-1}{s} = 3$$

より，

$$F(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + 3 \cdot \frac{1}{(s+1)^2}$$

となるので，ラプラス逆変換の線形性より，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[F](t) &= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](t) \\
&\quad + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right](t) \\
&= -1 + e^{-t} + 3te^{-t}
\end{aligned}$$

となる．

3-14

$F(s) = \dfrac{1}{(s^2+4)^2} = \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{s}{(s^2+4)^2}$ となる．いま，$G(s) = \dfrac{s}{(s^2+4)^2}$ とおくと，$F(s) = \dfrac{1}{s}G(s)$ となる．そのうえ，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) &= \frac{d}{ds}\left\{(s^2+4)^{-1}\right\} \\
&= (-1) \cdot (s^2+4)^{-2} \cdot (2s) = -\frac{2s}{(s^2+4)^2}
\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{s}{(s^2+4)^2} = \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\right]
\end{aligned}$$

を得る．よって，

$$\mathcal{L}^{-1}[G](t) = \frac{1}{4} t \sin 2t$$

となるので，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[F](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right](t) \\
&= \int_0^t \left(\frac{1}{4} u \sin 2u\right)\, du = \frac{1}{4}\int_0^t u \sin 2u \, du \\
&= \frac{1}{4}\left\{\left[-\frac{1}{2} u \cos 2u\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \cos 2u \, du\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{2}(t\cos 2t - 0) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2u\right]_0^t\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{2} t \cos 2t + \frac{1}{4}(\sin 2t - 0)\right\} \\
&= \frac{1}{16}(\sin 2t - 2t\cos 2t)
\end{aligned}$$

となる．

(別解)（たたみ込みを用いる）

$F(s) = \dfrac{1}{(s^2+4)^2} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{s^2+4} \cdot \dfrac{2}{s^2+4}$ となる．いま，$G(s) = \dfrac{2}{s^2+4}$ とおくと，

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G](t) = \sin 2t$$

を得るので，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[F](t) &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}[G^2](t) \\
&= \frac{1}{4}(g * g)(t) \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \sin 2\tau \sin 2(t-\tau)\ d\tau \\
&= \frac{1}{8}\int_0^t \left\{\cos(4\tau - 2t) - \cos 2t\right\}\ d\tau \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4\tau - 2t) - (\cos 2t)\tau\right]_0^t \\
&= \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) - (t\cos 2t - 0)\right\} \\
&= \frac{1}{16}(\sin 2t - 2t\cos 2t)
\end{aligned}$$

となる．

4-1

(1)

$$y' = 2(x+1)$$

を

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+1)$$

と表す．この両辺を x について積分すると，

$$\int\ dy = 2\int (x+1)\ dx$$

となり，一般解は，

$$y = (x+1)^2 + C \tag{S.20}$$

となる．いま，初期条件は $y(0) = 1$ なので，(S.20) より，

$$C = 0$$

を得る．よって，求める特殊解は，

$$y = (x+1)^2 \quad (y = x^2 + 2x + 1)$$

である．

(2)

$$yy' = e^x$$

を

$$y\frac{dy}{dx} = e^x$$

と表す．この両辺を x について積分すると，

$$\int y\ dy = 2\int e^x\ dx$$

となり，一般解は，

$$\frac{1}{2}y^2 = e^x + C \tag{S.21}$$

となる．いま，初期条件は $y(0) = 0$ なので，(S.21) より，

$$C = -1$$

を得る．よって，求める特殊解は，

$$y^2 = 2e^x - 2$$

である．

(3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{y^2}$$

の両辺に y^2 を掛けてから x について積分すると，

$$\int y^2\ dy = \int \log x\ dx$$

となり，

$$\frac{1}{3}y^3 = x\log x - x + C_1 \quad (C_1 : \text{任意定数})$$

となる．よって，求める一般解は

$$y^3 = 3x\log x - 3x + C$$

である（ただし，$3C_1 = C$ とおいた）．

(4)

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

の両辺を y で割ってから x について積分すると，

$$\int \frac{1}{y}\ dy = 2\int x\ dx$$

となり，

$$\log|y| = x^2 + C_1 \quad (C_1 : \text{任意定数})$$

となる．したがって，

$$|y| = e^{x^2 + C_1}$$

となり，

$$y = \pm e^{C_1} e^{x^2}$$

を得る．よって，求める一般解は，

$$y = Ce^{x^2}$$

である（ただし，$\pm e^{C_1} = C$ とおいた）．

(5)

$$(1+x^2)y^3\frac{dy}{dx} = x$$

を

$$y^3\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+x^2}$$

と式変形する．この両辺を x について積分すると，

$$\int y^3\ dy = \int \frac{x}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\ dx$$

となり，

$$\frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C_1 \quad (C_1 : \text{任意定数})$$

となるので，求める一般解は，

$$y^4 = 2\log(1+x^2) + C$$

である（ただし，$4C_1 = C$ とおいた）．

(6)

$$y' = \frac{3x^2 y}{x^3+1}$$

を

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{x^3+1}$$

と式変形する．この両辺を x について積分すると，

$$\int \frac{1}{y}\ dy = \int \frac{3x^2}{x^3+1}\ dx$$

となり，

$$\log|y| = \log|x^3+1| + C_1 \quad (C_1 : \text{任意定数})$$

を得る．したがって，

$$\log\left|\frac{y}{x^3+1}\right| = C_1$$

となるので，

$$\left|\frac{y}{x^3+1}\right| = e^{C_1}$$

となり，求める一般解は

$$y = C(x^3+1)$$

である（ただし，$\pm e^{C_1} = C$ とおいた）．

4-2

(1) $P(x) = x$, $Q(x) = x$ とおく．このとき，

$$\int P(x)\ dx = \int x\ dx = \frac{1}{2}x^2$$

である．そのうえ，

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int xe^{\frac{1}{2}x^2}\ dx = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

となるので，求める一般解 y は，

$$\begin{aligned}y &= \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\ dx + C\right)e^{-\int P(x)dx}\\ &= \left(e^{\frac{1}{2}x^2} + C\right)e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}\end{aligned}$$

である．

(2) $P(x) = \dfrac{1}{x}$, $Q(x) = e^x$ とおく．このとき，

$$\int P(x)\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx = \log x$$

である．そのうえ，

$$\begin{aligned}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx &= \int e^x e^{\log x}\ dx = \int xe^x\ dx\\ &= xe^x - \int e^x\ dx = xe^x - e^x\end{aligned}$$

となるので，求める一般解 y は，

$$\begin{aligned}y &= \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\ dx + C\right)e^{-\int P(x)dx}\\ &= (xe^x - e^x + C)\,e^{-\log x} = (xe^x - e^x + C)\cdot\frac{1}{x}\\ &= e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}\end{aligned}$$

である．

(3) $P(x) = \tan x$, $Q(x) = x\cos x$ とおく．このとき，

$$\int P(x)\,dx = \int \tan x\,dx = -\int \frac{(-\sin x)}{\cos x}\,dx = -\log(\cos x)$$

である．そのうえ，

$$\begin{aligned}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx &= \int (x\cos x)e^{-\log(\cos x)}\ dx\\ &= \int \frac{x\cos x}{\cos x}\ dx\\ &= \int x\ dx = \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

となるので，求める一般解 y は，

$$\begin{aligned}y &= \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\ dx + C\right)e^{-\int P(x)dx}\\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)e^{\log(\cos x)} = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)\cos x\end{aligned}$$

である．

(4) $y'\cos x - y\sin x = 2\cos x\sin x$ を書き換えると

$$y' - y\tan x = 2\sin x$$

となる．いま，$P(x) = -\tan x$, $Q(x) = 2\sin x$ とおく．このとき，

$$\int P(x)\ dx = -\int \tan x\ dx = \log\cos x$$

である．そのうえ，

$$\begin{aligned}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx &= 2\int(\sin x)e^{\log(\cos x)}\ dx\\ &= 2\int \sin x\cos x\ dx = \int \sin 2x\ dx\\ &= -\frac{1}{2}\cos 2x\end{aligned}$$

となるので，求める一般解 y は，

$$\begin{aligned}y &= \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\ dx + C\right)e^{-\int P(x)dx}\\ &= \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right)e^{-\log(\cos x)}\\ &= \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right)\cdot\frac{1}{\cos x}\\ &= -\frac{\cos 2x}{2\cos x} + \frac{C}{\cos x}\ \left(= -\cos x + \frac{C}{\cos x}\right)\end{aligned}$$

である．

(5) $P(x) = 1$, $Q(x) = e^{-x}$ とおく．このとき，

$$\int P(x)\ dx = \int\ dx = x$$

である．そのうえ，

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int e^{-x}e^x\ dx = \int\ dx = x$$

となるので，求める一般解 y は，

$$\begin{aligned}y &= \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\ dx + C\right)e^{-\int P(x)dx}\\ &= (x + C)e^{-x}\end{aligned}$$

である．
(6) $P(x) = -\dfrac{2}{x}$, $Q(x) = 2x^3 + x$ とおく．このとき，

$$\int P(x)\ dx = -2\int \frac{1}{x}\ dx = -2\log x$$

である．そのうえ，

$$\begin{aligned}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx &= \int (2x^3+x)e^{-2\log x}\ dx \\ &= \int \frac{2x^3+x}{x^2}\ dx = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right)\ dx \\ &= x^2 + \log x\end{aligned}$$

となるので，求める一般解 y は，

$$\begin{aligned}y &= \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\ dx + C\right)e^{-\int P(x)dx} \\ &= (x^2+\log x + C)e^{2\log|x|} = (x^2+\log x+C)x^2\end{aligned}$$

である．
(7) $xy' + y = \dfrac{x}{1+x^2}$ を $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{1+x^2}$ と変形する．いま，$P(x) = \dfrac{1}{x}$, $Q(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とおく．このとき，

$$\int P(x)\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx = \log x$$

である．そのうえ，

$$\begin{aligned}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx &= \int \frac{1}{1+x^2}e^{\log x}\ dx \\ &= \int \frac{x}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\ dx \\ &= \frac{1}{2}\log(1+x^2)\end{aligned}$$

となるので，求める一般解 y は，

$$\begin{aligned}y &= \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\ dx + C\right)e^{-\int P(x)dx} \\ &= \left(\frac{1}{2}\log(1+x^2) + C\right)e^{-\log x} \\ &= \left(\frac{1}{2}\log(1+x^2) + C\right)\cdot\frac{1}{x} \\ &= \frac{\log(1+x^2)}{2x} + \frac{C}{x}\end{aligned}$$

である．
(8) $P(x) = 2x$, $Q(y) = e^{-x^2}$ とおく．このとき，

$$\int P(x)\ dx = 2\int x\ dx = x^2$$

である．そのうえ，

$$\begin{aligned}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\ dx &= \int e^{-x^2}e^{x^2}\ dx \\ &= \int\ dx = x\end{aligned}$$

となるので，一般解 y は，

$$\begin{aligned}y &= \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\ dx + C\right)e^{-\int P(x)dx} \\ &= (x+C)\,e^{-x^2}\end{aligned}$$

となる．いま，初期条件 $y(1) = 0$ より，

$$C = -1$$

なので，求める特殊解は，$y = (x-1)e^{-x^2}$ である．
(9) 微分方程式

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^3\log x}{x}$$

の両辺を y^3 で割ると

$$y^{-3}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = \frac{\log x}{x} \tag{S.22}$$

となる．ここで，$z = y^{1-3} = y^{-2}$ とおくと，$z' = -2y^{-3}y'$ となるので，(S.22) は，

$$z' + \frac{2z}{x} = -\frac{2\log x}{x} \tag{S.23}$$

と 1 階線形微分方程式に変形できる．ここで，$p(x) = \dfrac{2}{x}$, $q(x) = -\dfrac{2\log x}{x}$ とおくと，

$$\int p(x)\ dx = \int \frac{2}{x}\ dx = 2\log x$$

となる．また，

$$\begin{aligned}\int q(x)e^{\int p(x)dx}\ dx &= -\int \frac{2\log x}{x}e^{2\log x}\ dx \\ &= -2\int x\log x\ dx \\ &= -2\left(\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2\right) \\ &= -x^2\log x + \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

となるので，(S.23) の一般解は，

$$\begin{aligned}z &= \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}\ dx + C\right)e^{-\int p(x)dx} \\ &= \left(-x^2\log x + \frac{1}{2}x^2 + C\right)e^{-2\log x} \\ &= \left(-x^2\log x + \frac{1}{2}x^2 + C\right)\cdot\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

となる．よって，求める一般解

$$y^{-2} = \frac{1}{2} - \log x + \frac{C}{x^2}$$

を得る．いま，初期条件 $y(e) = \sqrt{2}$ より，$C = e^2$ となるので，求める特殊解は，

$$y^{-2} = \frac{1}{2} - \log x + \frac{e^2}{x^2}$$

である．

4-3

(1) 特性方程式

$$\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$$

を解くと，$\lambda = 3, 7$ となるので，求める一般解 y は，

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{7x}$$

である．

(2) 特性方程式

$$\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$$

を解くと，$\lambda = 5 \pm 2i$ となるので，求める一般解 y は，

$$y = C_1 e^{5x} \cos 2x + C_2 e^{5x} \sin 2x$$

である．

(3) 特性方程式

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

を解くと，$\lambda = 5$ （重解）となるので，求める一般解 y は，

$$y = C_1 x e^{5x} + C_2 e^{5x} = (C_1 x + C_2) e^{5x}$$

である．

(4) 特性方程式

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

を解くと，$\lambda = \pm 3i$ となるので，求める一般解 y は，

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

である．

(5) 特性方程式

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

を解くと，$\lambda = -1$（重解）となるので，一般解 y

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \tag{S.24}$$

を得る．このとき，

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x} \tag{S.25}$$

となる．いま，初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ より，(S.24) と (S.25) から $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ が求まるので，これらを (S.24) に代入して，求める特殊解

$$y = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x) e^{-x}$$

を得る．

(6) 特性方程式

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

を解くと，$\lambda = -3, -2$ となるので，一般解 y

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} \tag{S.26}$$

を得る．このとき，

$$y' = -3C_1 e^{-3x} - 2C_2 e^{-2x} \tag{S.27}$$

となる．いま，初期条件 $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$ より，(S.26) と (S.27) から

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ 3C_1 + 2C_2 = -2 \end{cases}$$

を得る．この連立方程式を解くと，$C_1 = 0$, $C_2 = -1$ となる．これらを (S.26) に代入して，求める特殊解

$$y = -e^{-2x}$$

を得る．

(7) 特性方程式

$$\lambda^2 + c^2 \xi^2 = 0$$

を解くと，$\lambda = \pm c\xi i$ となるので，求める一般解 y は，

$$y = C_1 \cos c\xi x + C_2 \sin c\xi x$$

である．このとき，

$$y' = -C_1 c\xi \sin c\xi x + C_2 c\xi \cos c\xi x$$

を得る．いま，初期条件 $y(0) = \varphi(\xi)$, $y'(0) = \psi(\xi)$ より，$C_1 = \varphi(\xi)$, $C_2 = \dfrac{\psi(\xi)}{c\xi}$ となる．よって，求める特殊解

$$y = \varphi(\xi) \cos c\xi x + \psi(\xi) \frac{\sin c\xi x}{c\xi}$$

を得る．

4-4

(1) 斉次方程式

$$y'' - 7y' - 8y = 0 \tag{S.28}$$

の特性方程式

$$\lambda^2 - 7\lambda - 8 = 0$$

を解くと，$\lambda = -1, 8$ となるので，(S.28) の一般解は，

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{8x} \tag{S.29}$$

となる．いま，$y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{8x}$ とおくと，$y' = -e^{-x}$, $y_2' = 8e^{8x}$ なので，

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{8x} \\ -e^{-x} & 8e^{8x} \end{vmatrix} = 8e^{7x} + e^{7x} = 9e^{7x} \neq 0 \end{aligned}$$

である．そこで，$R(x)=8x^2-2x$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&\int \frac{y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}\ dx\\
&=\int \frac{e^{8x}(8x^2-2x)}{9e^{7x}}\ dx\\
&=\frac{2}{9}\int e^x(4x^2-x)\ dx\\
&=\frac{2}{9}\left(e^x(4x^2-x)-\int e^x(8x-1)\ dx\right)\\
&=\frac{2}{9}\left\{e^x(4x^2-x)-\left(e^x(8x-1)-8\int e^x\ dx\right)\right\}\\
&=\frac{2}{9}\left\{e^x(4x^2-x)-e^x(8x-1)+8e^x\right\}\\
&=\frac{2}{9}e^x(4x^2-9x+9)=\frac{8}{9}\left(x^2-2x+2\right)e^x
\end{aligned}$$

となり，さらに，

$$\begin{aligned}
&\int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}\ dx\\
&=\int \frac{e^{-x}(8x^2-2x)}{9e^{7x}}\ dx\\
&=\frac{2}{9}\int e^{-8x}(4x^2-x)\ dx\\
&=\frac{2}{9}\left\{-\frac{1}{8}e^{-8x}(4x^2-x)+\frac{1}{8}\int e^{-8x}(8x-1)\ dx\right\}\\
&=\frac{2}{9}\left\{-\frac{1}{8}e^{-8x}(4x^2-x)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{8}e^{-8x}(8x-1)+\int e^{-8x}\ dx\right)\right\}\\
&=\frac{2}{9}\left\{-\frac{1}{8}e^{-8x}(4x^2-x)-\frac{1}{64}e^{-8x}(8x-1)-\frac{1}{64}e^{-8x}\right\}\\
&=-\frac{1}{9}x^2e^{-8x}
\end{aligned}$$

を得る．以上より，特殊解 $\tilde{y}$ は，

$$\begin{aligned}
\tilde{y}&=-y_1\int \frac{y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}\ dx+y_2\int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}\ dx\\
&=-\left(\frac{8}{9}x^2-2x+2\right)e^xe^{-x}-\frac{1}{9}x^2e^{-8x}e^{8x}\\
&=-x^2+2x-2
\end{aligned}\tag{S.30}$$

であるので，(S.29) と (S.30) より，求める一般解は，

$$y=-x^2+2x-2+C_1e^{-x}+C_2e^{8x}$$

となる．

(2) 斉次方程式

$$y''+3y'=0\tag{S.31}$$

の特性方程式

$$\lambda^2+3\lambda=0$$

を解くと，$\lambda=-3,0$ となるので，(S.31) の一般解は，

$$y=C_1e^{-3x}+C_2\tag{S.32}$$

となる．いま，$y_1=e^{-3x}$, $y_2=1$ とおくと，$y'=-3e^{-3x}$, $y_2'=0$ なので，

$$\begin{aligned}
W(y_1,y_2)&=\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}e^{-3x}&1\\-3e^{-3x}&0\end{vmatrix}=3e^{-3x}\neq 0
\end{aligned}$$

である．そこで，$R(x)=6x$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\int \frac{y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}\ dx&=\int \frac{6x}{3e^{-3x}}\ dx\\
&=2\int xe^{3x}\ dx\\
&=2\left(\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}\ dx\right)\\
&=\frac{2}{3}xe^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}
\end{aligned}$$

となり，さらに，

$$\int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}\ dx=\int \frac{6xe^{-3x}}{3e^{-3x}}\ dx=2\int x\ dx=x^2$$

を得る．以上より，特殊解 $\tilde{y}$ は，

$$\begin{aligned}
\tilde{y}&=-y_1\int \frac{y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}\ dx+y_2\int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}\ dx\\
&=-\left(\frac{2}{3}xe^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}\right)e^{-3x}+x^2\cdot 1\\
&=x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}
\end{aligned}\tag{S.33}$$

であるので，(S.32) と (S.33) より，求める一般解は，

$$y=x^2-\frac{2}{3}x+C_1e^{-3x}+C_2$$

となる（ただし，$\dfrac{2}{9}+C_2$ を改めて C_2 とおいた）．

(3) 斉次方程式

$$y''+4y'+3y=0\tag{S.34}$$

の特性方程式

$$\lambda^2+4\lambda+3=0$$

を解くと，$\lambda=-3,-1$ となるので，(S.34) の一般解は，

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}\tag{S.35}$$

となる．いま，$y_1=e^{-3x}$, $y_2=e^{-x}$ とおくと，$y'=-3e^{-3x}$, $y_2'=-e^{-x}$ なので，

$$\begin{aligned}
W(y_1,y_2)&=\begin{vmatrix}y_1&y_2\\y_1'&y_2'\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}e^{-3x}&e^{-x}\\-3e^{-3x}&-e^{-x}\end{vmatrix}\\
&=-e^{-4x}+3e^{-4x}=2e^{-4x}\neq 0
\end{aligned}$$

である．そこで，$R(x)=3e^{2x}$ とおくと，

$$\int \frac{y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx=\int \frac{e^{-x}\cdot(3e^{2x})}{2e^{-4x}}\,dx$$
$$=\frac{3}{2}\int e^{5x}\,dx=\frac{3}{10}e^{5x}$$

となり，さらに，

$$\int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx=\int \frac{e^{-3x}\cdot(3e^{2x})}{2e^{-4x}}\,dx$$
$$=\frac{3}{2}\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{2}e^{3x}$$

を得る．以上より，特殊解 $\tilde{y}$ は，

$$\begin{aligned}\tilde{y}&=-y_1\int \frac{y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx+y_2\int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx\\&=-\frac{3}{10}e^{5x}\cdot e^{-3x}+\frac{1}{2}e^{3x}\cdot e^{-x}\\&=\frac{1}{5}e^{2x}\end{aligned}\tag{S.36}$$

であるので，(S.35) と (S.36) より，求める一般解は，

$$y=\frac{1}{5}e^{2x}+C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}$$

となる．

(4) 斉次方程式

$$y''-y'-2y=0\tag{S.37}$$

の特性方程式

$$\lambda^2-\lambda-2=0$$

を解くと，$\lambda=-1,2$ となるので，(S.37) の一般解は，

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}\tag{S.38}$$

となる．いま，$y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{2x}$ とおくと，$y'=-e^{-x}$, $y_2'=2e^{2x}$ なので，

$$\begin{aligned}W(y_1,y_2)&=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}e^{-x} & e^{2x}\\ -e^{-x} & 2e^{2x}\end{vmatrix}\\&=2e^{x}+e^{x}=3e^{x}\neq 0\end{aligned}$$

である．そこで，$R(x)=6e^{2x}$ とおくと，

$$\int \frac{y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx=\int \frac{e^{2x}\cdot(6e^{2x})}{3e^{x}}\,dx$$
$$=2\int e^{3x}\,dx=\frac{2}{3}e^{3x}$$

となり，さらに，

$$\int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx=\int \frac{e^{-x}\cdot(6e^{2x})}{3e^{x}}\,dx$$
$$=2\int\,dx=2x$$

を得る．以上より，特殊解 $\tilde{y}$ は，

$$\begin{aligned}\tilde{y}&=-y_1\int \frac{y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx+y_2\int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx\\&=-\frac{2}{3}e^{3x}\cdot e^{-x}+(2x)e^{2x}\\&=\left(2x-\frac{2}{3}\right)e^{2x}\end{aligned}\tag{S.39}$$

であるので，(S.38) と (S.39) より，求める一般解は，

$$y=2xe^{2x}+C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$$

となる（ただし，$-\frac{2}{3}+C_2$ を改めて C_2 とおいた）．

(5) 斉次方程式

$$y''+4y=0\tag{S.40}$$

の特性方程式

$$\lambda^2+4=0$$

を解くと，$\lambda=\pm 2i$ となるので，(S.40) の一般解は，

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\tag{S.41}$$

となる．いま，$y_1=\cos 2x$, $y_2=\sin 2x$ とおくと，$y'=-2\sin 2x$, $y_2'=2\cos 2x$ なので，

$$\begin{aligned}W(y_1,y_2)&=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}\\&=2(\cos^2 2x+\sin^2 2x)=2\neq 0\end{aligned}$$

である．そこで，$R(x)=\cos x$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int \frac{y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx&=\int \frac{\sin 2x\cos x}{2}\,dx\\&=\frac{1}{4}\int(\sin 3x+\sin x)\,dx\\&=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x-\cos x\right)\\&=-\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{1}{4}\cos x\end{aligned}$$

となり，さらに，

$$\begin{aligned}\int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx&=\int \frac{\cos 2x\cos x}{2}\,dx\\&=\frac{1}{4}\int(\cos 3x+\cos x)\,dx\\&=\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin x\end{aligned}$$

を得る．以上より，特殊解 $\tilde{y}$ は，

$$\tilde{y} = -y_1 \int \frac{y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)}\ dx + y_2 \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)}\ dx$$
$$= -\left(-\frac{1}{12}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos x\right)\cos 2x$$
$$+ \left(\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin x\right)\sin 2x$$
$$= \frac{1}{12}(\cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x)$$
$$+ \frac{1}{4}(\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x)$$
$$= \frac{1}{12}\cos(3x - 2x) + \frac{1}{4}\cos(x - 2x)$$
$$= \frac{1}{3}\cos x \tag{S.42}$$

であるので，(S.41) と (S.42) より，求める一般解は，

$$y = \frac{1}{3}\cos x + C_1 \cos 2x + C_3 \sin 2x$$

となる．

(6) 斉次方程式

$$y'' - y' - 2y = 0 \tag{S.43}$$

の特性方程式

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

を解くと，$\lambda = -1, 2$ となるので，(S.43) の一般解は，

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \tag{S.44}$$

となる．いま，$y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{2x}$ とおくと，$y' = -e^{-x}$, $y_2' = 2e^{2x}$ なので，

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}$$
$$= 2e^x + e^x = 3e^x \neq 0$$

である．そこで，$R(x) = 20\sin 2x$ とおくと，

$$\int \frac{y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)}\ dx = \int \frac{e^{2x}(20\sin 2x)}{3e^x}\ dx$$
$$= \frac{20}{3}\int e^x \sin 2x\ dx \tag{S.45}$$

となる．ここで，

$$I = \int e^x \sin 2x\ dx$$
$$= -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x\ dx$$
$$= -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^x \sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \sin 2x\ dx\right)$$
$$= -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}e^x \sin 2x - \frac{1}{4}I$$

より，

$$\frac{5}{4}I = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}e^x \sin 2x$$

となるので，

$$I = -\frac{2}{5}e^x \cos 2x + \frac{1}{5}e^x \sin 2x$$

を得る．したがって，(S.45) より，

$$\int \frac{y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)}\ dx = \frac{20}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}e^x \cos 2x + \frac{1}{5}e^x \sin 2x\right)$$
$$= -\frac{8}{3}e^x \cos 2x + \frac{4}{3}e^x \sin 2x$$

を得る．また，同様に，

$$\int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)}\ dx = \int \frac{e^{-x}(20\sin 2x)}{3e^x}\ dx$$
$$= \frac{20}{3}\int e^{-2x}\sin 2x\ dx$$
$$= \frac{20}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot e^{-2x}(\cos 2x + \sin 2x)$$
$$= -\frac{5}{3}e^{-2x}\cos 2x - \frac{5}{3}e^{-2x}\sin 2x$$

となる．以上より，特殊解 $\tilde{y}$ は，

$$\tilde{y} = -y_1 \int \frac{y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)}\ dx + y_2 \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)}\ dx$$
$$= -\left(-\frac{8}{3}e^x \cos 2x + \frac{4}{3}e^x \sin 2x\right)e^{-x}$$
$$+ \left(-\frac{5}{3}e^{-2x}\cos 2x - \frac{5}{3}e^{-2x}\sin 2x\right)e^{2x}$$
$$= \cos 2x - 3\sin 2x \tag{S.46}$$

であるので，(S.44) と (S.46) より，求める一般解

$$y = \cos 2x - 3\sin 2x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

を得る．

(7) 斉次方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 0 \tag{S.47}$$

の特性方程式

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

を解くと，$\lambda = \pm 2i$ となるので，(S.47) の一般解は，

$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \tag{S.48}$$

となる．いま，$x_1 = \cos 2t$, $x_2 = \sin 2t$ とおくと，$x' = -2\sin 2t$, $x_2' = 2\cos 2t$ なので，

$$W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix}$$
$$= 2(\cos^2 2t + \sin^2 2t) = 2 \neq 0$$

である．そこで，$R(t)=\sin 2t$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int \frac{x_2R(t)}{W(x_1,x_2)}\ dt &= \int \frac{\sin^2 2t}{2}\ dx\\ &= \frac{1}{4}\int(1-\cos 4t)\ dt\\ &= \frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\end{aligned}$$

となり，さらに，

$$\begin{aligned}\int \frac{x_1R(t)}{W(x_1,x_2)}\ dt &= \int \frac{\cos 2t\sin 2t}{2}\ dt\\ &= \frac{1}{4}\int \sin 4t\ dt\\ &= -\frac{1}{16}\cos 4t\end{aligned}$$

を得る．以上より，特殊解 $\tilde{x}$ は，

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= -x_1\int \frac{x_2R(t)}{W(x_1,x_2)}\ dt + x_2\int \frac{x_1R(t)}{W(x_1,x_2)}\ dt\\ &= -\left(\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}\sin 4t\right)\cos 2t - \frac{1}{16}\cos 4t\sin 2t\\ &= -\frac{t}{4}\cos 2t + \frac{1}{16}(\sin 4t\cos 2t - \cos 4t\sin 2t)\\ &= -\frac{t}{4}\cos 2t + \frac{1}{16}\sin(4t-2t)\\ &= -\frac{t}{4}\cos 2t + \frac{1}{16}\sin 2t \qquad \text{(S.49)}\end{aligned}$$

であるので，(S.48) と (S.49) より，求める一般解は，

$$y = -\frac{t}{4}\cos 2t + C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$$

となる．（ただし，$\dfrac{1}{16}+C_2$ を改めて C_2 とおいた．）

4-5

(1)

$$x^2y'' - xy' + y = \log x \qquad \text{(S.50)}$$

について，$x=e^t$ とおく．この両辺を x について微分すると，$1=e^t\dfrac{dt}{dx}$，つまり，$\dfrac{dt}{dx}=e^{-t}$ となるので，合成関数の微分より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

となる．これらを (S.50) に代入すると

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right) - e^t\cdot\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) + y = t$$

となり，

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = t \qquad \text{(S.51)}$$

を得る．いま，(S.51) の一般解を求める．斉次方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{(S.52)}$$

の特性方程式

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

を解くと，$\lambda=1$ （重解）となるので (S.52) の一般解は，

$$y = C_1e^t + C_2te^t \qquad \text{(S.53)}$$

となる．いま，$y_1=e^t$, $y_2=te^t$ とおくとき，$\dfrac{dy_1}{dt}=e^t$，$\dfrac{dy_2}{dt}=e^t+te^t=(t+1)e^t$ となるので，

$$\begin{aligned}W(y_1,y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ \dfrac{dy_1}{dt} & \dfrac{dy_2}{dt}\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} e^t & te^t\\ e^t & (t+1)e^t\end{vmatrix} = (t+1)e^{2t} - te^{2t} = e^{2t} \neq 0\end{aligned}$$

である．そこで，$R(t)=t$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int \frac{y_2R(t)}{W(y_1,y_2)}\ dt &= \int \frac{(te^t)\cdot t}{e^{2t}}\ dt\\ &= \int t^2e^{-t}\ dt\\ &= -t^2e^{-t} + 2\int te^{-t}\ dt\\ &= -t^2e^{-t} + 2\left(-te^{-t}+\int e^{-t}\ dt\right)\\ &= -t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}\\ &= -e^{-t}(t^2+2t+2)\end{aligned}$$

を得る．一方で，

$$\begin{aligned}\int \frac{y_1R(t)}{W(y_1,y_2)}\ dt &= \int \frac{te^t}{e^{2t}}\ dt\\ &= \int te^{-t}\ dt\\ &= -te^{-t} + \int e^{-t}\ dt\\ &= -te^{-t} - e^{-t}\\ &= -e^{-t}(t+1)\end{aligned}$$

も得る．以上より，特殊解 $\tilde{y}$ は，

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= -y_1\int \frac{y_2R(t)}{W(y_1,y_2)}\ dt + y_2\int \frac{y_1R(t)}{W(y_1,y_2)}\ dt\\ &= e^t\cdot e^{-t}(t^2+2t+2) - te^t\cdot e^{-t}(t+1)\\ &= t+2 \qquad \text{(S.54)}\end{aligned}$$

であるので，(S.53) と (S.54) より，(S.51) の一般解

$$y = t + 2 + C_1e^t + C_2te^t$$

を得る．いま，$x=e^t$ より，

$$y = \log x + 2 + C_1x + C_2x\log x$$

となる．したがって，(S.50) の一般解は

$$y = \log x + 2 + C_1 x + C_2 x \log x$$

である．

(2)

$$x^2 y'' + 2xy' = \frac{x^2+1}{x} \tag{S.55}$$

について，$x = e^t$ とおく．この両辺を x について微分すると，$1 = e^t \dfrac{dt}{dx}$，つまり，$\dfrac{dt}{dx} = e^{-t}$ となるので，合成関数の微分より，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

となる．これらを (S.55) に代入すると

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 2e^t\cdot\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{e^{2t}+1}{e^t}$$

となり，これを整理すると，

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = e^t + e^{-t} \tag{S.56}$$

となる．いま，(S.56) の一般解を求める．斉次方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 0 \tag{S.57}$$

の特性方程式

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

を解くと，$\lambda = -1, 0$ となるので (S.57) の一般解

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 \tag{S.58}$$

を得る．いま，$y_1 = e^{-t}$, $y_2 = 1$ とおくとき，$\dfrac{dy_1}{dt} = -e^{-t}$, $\dfrac{dy_2}{dt} = 0$ となるので，

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dfrac{dy_1}{dt} & \dfrac{dy_2}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t} & 1 \\ -e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = e^{-t} \neq 0$$

である．そこで，$R(t) = e^t + e^{-t}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int \frac{y_2 R(t)}{W(y_1,y_2)}\,dt &= \int \frac{e^t + e^{-t}}{e^{-t}}\,dt \\ &= \int (e^{2t}+1)\,dt \\ &= \frac{1}{2}e^{2t} + t\end{aligned}$$

となり，さらに，

$$\begin{aligned}\int \frac{y_1 R(t)}{W(y_1,y_2)}\,dt &= \int \frac{e^{-t}(e^t + e^{-t})}{e^{-t}}\,dt \\ &= \int (e^t + e^{-t})\,dt = e^t - e^{-t}\end{aligned}$$

を得る．以上より，特殊解 $\tilde{y}$ は，

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= -y_1\int \frac{y_2 R(t)}{W(y_1,y_2)}\,dt + y_2\int \frac{y_1 R(t)}{W(y_1,y_2)}\,dt \\ &= -\left(\frac{1}{2}e^{2t} + t\right)e^{-t} + (e^t - e^{-t}) \\ &= \frac{1}{2}e^t - (1+t)e^{-t}\end{aligned} \tag{S.59}$$

であるので，(S.58) と (S.59) より，(S.56) の一般解

$$y = \frac{1}{2}e^t - te^{-t} + C_1 e^{-t} + C_2$$

を得る（ただし，$-1 + C_1$ を改めて C_1 とおいた）．いま，$x = e^t$ より，

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{\log x}{x} + \frac{C_1}{x} + C_2$$

となる．よって，(S.55) の一般解は

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{\log x}{x} + \frac{C_1}{x} + C_2$$

である．

4-6

(1) $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ とおく．このとき，$y'' + y' - 2y = 3e^t$ の両辺をラプラス変換すると

$$\mathcal{L}[y'' + y' - 2y](s) = \mathcal{L}[3e^t](s)$$

より，

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \frac{3}{s-1}$$

となり，整理すると，

$$(s+2)(s-1)Y(s) = \frac{3}{s-1} + (s+1)y(0) + y'(0)$$

となる．いま，初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ より，

$$(s-1)(s+2)Y(s) = \frac{3}{s-1} + s + 2$$

となるので，

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2(s+2)} \tag{S.60}$$

を得る．ここで，

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{3}{(s-1)^2(s+2)} \\ &= \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{(s-1)^2} + \frac{d_1}{s+2}\end{aligned} \tag{S.61}$$

とおくと，

$$c_1 = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 1}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\{(s-1)^2G(s)\}$$

$$= 3\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left\{(s+2)^{-1}\right\}$$

$$= (-3)\cdot\lim_{s\to 1}(s+2)^{-2} = -\frac{1}{3},$$

$$c_2 = \frac{1}{(2-2)!}\lim_{s\to 1}\frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}}\left\{(s-1)^2G(s)\right\}$$

$$= \lim_{s\to 1}\frac{3}{s+2} = 1,$$

$$d_1 = \lim_{s\to -2}(s+2)G(s) = \lim_{s\to -2}\frac{3}{(s-1)^2} = \frac{1}{3}$$

となる．よって，(S.60) と (S.61) より，

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + G(s) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+2}$$

を得る．この両辺にラプラス逆変換を施すことにより，

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y](t) = \frac{2}{3}e^t + te^t + \frac{1}{3}e^{-2t}$$

となる．

(2) $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ とおく．このとき，$y'' + 4y = \cos x$ の両辺をラプラス変換すると，

$$\mathcal{L}[y'' + 4y](s) = \mathcal{L}[\cos x](s)$$

より，

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

となるので，整理すると，

$$(s^2+4)Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + sy(0) + y'(0)$$

を得る．いま，初期条件 $y(0) = \frac{1}{3}$, $y'(0) = 2$ より，

$$(s^2+4)Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{s}{3} + 2$$

となるので，

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{1}{3}\cdot\frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{s}{s^2+4} \\ &\qquad + \frac{2}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+4} \end{aligned}$$

となる．この両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y](t) = \frac{1}{3}\cos x + \sin 2x$$

となる．

4-7

$X(s) = \mathcal{L}[x](s)$, $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ とおく．
このとき，微分方程式 $x'(t) + 2x(t) + y(t) = 2$ の両辺をラプラス変換し整理すると，

$$\mathcal{L}[x'(t) + 2x(t) + y(t)](s) = \mathcal{L}[2](s)$$

となり，

$$sX(s) - x(0) + 2X(s) + Y(s) = \frac{2}{s}$$

となるので，

$$(s+2)X(s) + Y(s) = \frac{2}{s} + x(0) \qquad \text{(S.62)}$$

を得る．同様に，$y'(t) + x(t) + 2y(t) = 1$ の両辺をラプラス変換し整理すると，

$$\mathcal{L}[y'(t) + x(t) + 2y(t)](s) = \mathcal{L}[1](s)$$

となり，

$$sY(s) - y(0) + X(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s}$$

となるので，

$$(s+2)Y(s) + X(s) = \frac{1}{s} + y(0) \qquad \text{(S.63)}$$

となる．いま，初期条件 $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ と (S.62), (S.63) より，

$$\begin{cases} (s+2)X(s) + Y(s) = \dfrac{2}{s} + 2 \\ X(s) + (s+2)Y(s) = \dfrac{1}{s} \end{cases}$$

を得る．この連立方程式を解いて $X(s)$ を求めると，

$$X(s) = \frac{2s^2+6s+3}{s(s+1)(s+3)}$$

となる．これを部分分数分解して整理すると，

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3}$$

となるので，この両辺にラプラス逆変換を施すことで，

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

を得る．また，

$$x'(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t}$$

となるので，これらを $x'(t)+2x(t)+y(t) = 2$ に代入すると，

$$-\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} + 2\left(1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right) + y(t) = 2$$

より

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-3t} - e^{-t}\right)$$

を得る．以上より，求める解は，

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{1}{2}e^{-3t} \\ y(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-3t} - e^{-t}\right) \end{cases}$$

である．

4-8

(1) $F(s) = \mathcal{L}[y](s)$ とおく．いま，

$$y(t) - t = \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\ d\tau$$

の両辺をラプラス変換すると（上式右辺はたたみ込みであることを考慮すると），

$$Y(s) - \frac{1}{s^2} = Y(s) \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

より，

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3!}{s^4}$$

となるので，この両辺にラプラス逆変換を施して，

$$y(t) = \frac{t^3}{6} + t$$

を得る．

(2) $F(s) = \mathcal{L}[y](s)$ とおく．いま，

$$\int_0^t e^{2(t-\tau)} y(\tau)\ d\tau = \sin t$$

の両辺をラプラス変換すると（上式左辺はたたみ込みであることを考慮すると），

$$Y(s) \cdot \frac{1}{s-2} = \frac{1}{s^2+1}$$

より，

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} - 2 \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

となる．よって，この両辺にラプラス逆変換を施すことにより，

$$y(t) = \cos t - 2\sin t$$

を得る．

5-1 $u_1(x,y)$ と $u_2(x,y)$ は与えられた偏微分方程式の解なので，

$$a_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+b_2\frac{\partial u_1}{\partial y}+b_3u_1=0$$
$$a_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u_2}{\partial x}+b_2\frac{\partial u_2}{\partial y}+b_3u_2=0$$

が成立している．したがって，$u(x,y)=c_1u_1(x,y)+c_2u_2(x,y)$ とおくと，偏微分の線形性により

$$\begin{aligned}&a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+b_3u\\&=c_1\left(a_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+b_2\frac{\partial u_1}{\partial y}+b_3u_1\right)\\&\quad+c_2\left(a_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u_2}{\partial x}+b_2\frac{\partial u_2}{\partial y}+b_3u_2\right)=0\end{aligned}$$

が成立し，$u(x,y)$ も同じ偏微分方程式の解であることが確かめられる．

5-2 $E_c(x,t)$ の偏導関数を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_c}{\partial x}&=-\frac{x}{2ct}E_c(x,t),\\\frac{\partial^2 E_c}{\partial x^2}(x,t)&=\left(-\frac{1}{2ct}+\frac{x^2}{4c^2t^2}\right)E_c(x,t),\\\frac{\partial E_c}{\partial t}(x,t)&=\left(-\frac{1}{2t}+\frac{x^2}{4ct^2}\right)E_c(x,t)\end{aligned}$$

となるため，

$$\frac{\partial E_c}{\partial t}(x,t)-c\frac{\partial^2 E_c}{\partial x^2}(x,t)=0$$

が成立し，$E_c(x,t)$ が熱方程式を満たすことが確かめられる．また，$x=0$ のとき

$$\lim_{t\to+0}E_c(0,t)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}=\infty$$

となり，$x\neq0$ のときは $s=\dfrac{x^2}{4ct}$ とおくことで

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+0}E_c(x,t)&=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\sqrt{4\pi ct}}e^{-\frac{x^2}{4ct}}\\&=\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}|x|}\sqrt{s}e^{-s}=0\end{aligned}$$

となるため，$\lim\limits_{t\to+0}E_c(x,t)=\delta(x)$ が確かめられる．

5-3 まず，初期値 $\varphi(x)$ のフーリエ係数を計算すると

$$\begin{aligned}\varphi_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\varphi(x)\sin nx\,dx\\&=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx\right)\\&=\frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{(\pi-x)\cos nx}{n}-\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}\\&=\frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\end{aligned}$$

となるため，熱方程式の初期値・境界値問題の解の公式 (Point 5.3) により，

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_ne^{-n^2t}\sin nx\\&=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2t}}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx\\&=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}e^{-(2n-1)^2t}\sin(2n-1)x\end{aligned}$$

が求める解である．

5-4 与えられた初期値 $\psi(x)$ に対し，

$$\varphi(x)=\pi\psi\left(\frac{x}{\pi}\right)=\begin{cases}x&\left(0\le x<\dfrac{\pi}{2}\text{のとき}\right)\\\pi-x&\left(\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\text{のとき}\right)\end{cases}$$

とおく．これは ***5-3*** の初期値と一致するため，***5-3*** で得られた解 $u(x,t)$ を用いれば，求める解は

$$\begin{aligned}v(x,t)&=\frac{1}{\pi}u(\pi x,\pi^2t)\\&=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}e^{-(2n-1)^2\pi^2t}\sin(2n-1)\pi x\end{aligned}$$

である．

5-5 熱方程式の初期値問題の解の公式 (Point 5.4) により，

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2+y}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy$$

が求める解である．ここで

$$-y^2+y-\frac{(x-y)^2}{4t}=-\left(1+\frac{1}{4t}\right)\left(y-\frac{2t+x}{4t+1}\right)^2-\frac{x^2-x-t}{4t+1}$$

なので，

$$z=\sqrt{1+\frac{1}{4t}}\left(y-\frac{2t+x}{4t+1}\right)$$

と置いて置換積分を行えば，求める解は

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2-x-t}{4t+1}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(1+\frac{1}{4t}\right)\left(y-\frac{2t+x}{4t+1}\right)^2}dy\\&=\frac{1}{\sqrt{(4t+1)\pi}}e^{-\frac{x^2-x-t}{4t+1}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz\\&=\frac{1}{\sqrt{4t+1}}e^{-\frac{x^2-x-t}{4t+1}}\end{aligned}$$

となる．

5-6 a は定数であり，$u(x,t)$ は熱方程式の解なので

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

となり，$u_a(x,t)$ も同じ熱方程式を満たすことが確かめられる．また，例題 5.3 により，

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$$

は熱方程式および初期条件 $u(x,0) = e^{-x^2}$ を満たす．そこで，$u_1(x,t) = 1 + u(x,t)$ とおけば，$u_1(x,t)$ も同じ熱方程式を満たし，初期条件 $u_1(x,0) = 1 + u(x,0) = 1 + e^{-x^2}$ も満たす．すなわち求める解は

$$u_1(x,t) = 1 + u(x,t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$$

である．

5-7 $v(x,t)$ の偏導関数を計算し，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{2}{u^3}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}(u_t - u_{xx})\right)u^2 - uu_x(u_t - u_{xx})\right\}
\end{aligned}$$

を導けばよい．各自計算して確かめよ．ただし，u_x, u_t, u_{xx} は，それぞれ添字の変数による偏導関数を表す．すなわち，

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t},\quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

である．

5-8 $u(x,t)$ を熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

の解とし，

$$v(x,t) = \frac{2}{u(x,t)}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

とおく．$v(x,t)$ が初期条件

$$v(x,0) = \frac{4x}{1+e^{x^2}}$$

を満たすように $u(x,t)$ の初期関数 $\varphi(x)$ を定め，そのときの $u(x,t)$ を求めればよい．各自計算して確かめよ．***5-9*** 合成関数の微分法則により

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x \pm ct) = \varphi''(x \pm ct)\cdot(\pm c)^2 = c^2\varphi''(x \pm ct), \\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x \pm ct) = \varphi''(x \pm ct)
\end{aligned}$$

となり，微分と積分の関係から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)dy &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi(x+ct)\cdot c - \psi(x-ct)\cdot(-c)\right) \\
&= c^2\left(\psi'(x+ct) - \psi'(x-ct)\right), \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)dy &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(x+ct) - \psi(x-ct)\right) \\
&= \psi'(x+ct) - \psi'(x-ct)
\end{aligned}$$

となるため，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

が確かめられる．

5-10 例題 5.1 により，初期値 $\psi(x) = \pi x - x^2$ のフーリエ係数は

$$\psi_n = \frac{4}{n^3\pi}\left\{1 - (-1)^n\right\}$$

となる．したがって，波動方程式の初期値・境界値問題の解の公式 (Point 5.5) により，

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\frac{\sin nt}{n}\sin nx \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4}\sin nt\sin nx \\
&= \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\sin(2n-1)t\sin(2n-1)x
\end{aligned}$$

が求める解である．

5-11 与えられた初期値 $\theta(x) = x - x^2$ に対し，

$$\psi(x) = \pi^2\theta\left(\frac{x}{\pi}\right) = \pi x - x^2$$

とおく．これは ***5-10*** の初期値と一致するため，***5-10*** で得られた解 $u(x,t)$ を用いれば，求める解は

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{\pi^3}u(\pi x, \pi t) \\
&= \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\sin(2n-1)\pi t\sin(2n-1)\pi x
\end{aligned}$$

である．

5-12 波動方程式の初期値問題の解の公式 (Point 5.7) により，

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\frac{1}{1+y^2}dy \\
&= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{arctan} y\Big]_{x-t}^{x+t} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctan}(x+t) - \mathrm{arctan}(x-t)\right)
\end{aligned}$$

が求める解である．ここで $\tan a = x+t$, $\tan b = x-t$ とおくと，

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b} = \frac{2t}{1+x^2-t^2}$$

なので，求める解は

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}\mathrm{arctan}\left(\frac{2t}{1+x^2-t^2}\right)$$

となる．

5-13 まず $\xi = x+t$, $\eta = x-t$ とおくと，

$$v(\xi,\eta) = v(x+t, x-t) = u(x,t) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$$

となるため，合成関数の偏微分の計算 (連鎖律) により

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}(\xi,\eta)\\
&=\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1}{2}u_x\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)-\frac{1}{2}u_t\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left\{u_{xx}\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)+u_{xt}\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right\}\\
&\quad-\frac{1}{2}\left\{u_{tx}\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)+u_{tt}\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right\}\\
&=-\frac{1}{2}(u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t))
\end{aligned}
$$

が得られる．ただし，u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tx}, u_{tt} は，それぞれ添字の変数による偏導関数を表す．例えば，u_x, u_{xt}, u_{tt} はそれぞれ

$$
u_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad u_{xt}=\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x},\quad u_{tt}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
$$

となる．ここで $u(x,t)$ は波動方程式を満たしているので

$$
u_{tt}-u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0
$$

となり，

$$
\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}=0
$$

が確かめられる．

5-14 まず，微分と積分の順序交換および合成関数の微分法則により

$$
\begin{aligned}
&E'(t)\\
&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2dx\\
&=\frac{1}{2}\int_0^L\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2dx\\
&=\int_0^L\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)dx+\int_0^L\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(x,t)dx
\end{aligned}
$$

が得られる．さらに右辺第 2 項に部分積分を適用すると，境界条件により

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(x,t)dx\\
&=\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_0^L-\int_0^L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx\\
&=-\int_0^L\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)dx
\end{aligned}
$$

となるため，

$$
E'(t)=\int_0^L\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)dx
$$

が得られる．ここで $u(x,t)$ は波動方程式を満たしているので

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0
$$

となり，$E'(t)=0$ が確かめられる．

5-15 例題 5.1 により，初期値 $\varphi(x)=\pi x-x^2$ のフーリエ係数は

$$
\varphi_n=\frac{4}{n^3\pi}\left\{1-(-1)^n\right\}
$$

となる．したがって，長方形領域上のラプラス方程式の境界値問題の解の公式 (Point 5.8) により，

$$
\begin{aligned}
u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin nx\frac{\sinh ny}{\sinh n}\\
&=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin nx\frac{\sinh ny}{\sinh n}\\
&=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\frac{\sinh(2n-1)y}{\sinh(2n-1)}
\end{aligned}
$$

が求める解である．

5-16 まず，境界条件を極座標表示すると，

$$
\varphi(\theta)=u(\cos\theta,\sin\theta)=\cos^3\theta-\sin^3\theta
$$

となる．三角関数の 3 倍角の公式により

$$
\varphi(\theta)=\frac{3}{4}(\cos\theta-\sin\theta)+\frac{1}{4}(\cos 3\theta+\sin 3\theta)
$$

となることから，$\varphi(x)$ のフーリエ係数は

$$
\varphi_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)d\theta=0,
$$

$$
\varphi_{n,1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\cos n\theta d\theta=\begin{cases}\dfrac{3}{4} & (n=1\text{ のとき})\\ \dfrac{1}{4} & (n=3\text{ のとき}),\\ 0 & n\neq 1,3\text{ のとき},\end{cases}
$$

$$
\varphi_{n,2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\sin n\theta d\theta=\begin{cases}-\dfrac{3}{4} & (n=1\text{ のとき})\\ \dfrac{1}{4} & (n=3\text{ のとき})\\ 0 & (n\neq 1,3\text{ のとき})\end{cases}
$$

となる．したがって，円盤領域上のラプラス方程式の境界値問題の解の公式 (Point 5.9) により，

$$
\begin{aligned}
U(r,\theta)&=\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left(\varphi_{n,1}\cos n\theta+\varphi_{n,2}\sin n\theta\right)\\
&=\frac{3}{4}r(\cos\theta-\sin\theta)+\frac{1}{4}r^3(\cos 3\theta+\sin 3\theta)
\end{aligned}
$$

が求める解である．

5-17 まず，$u(x,t)=\sin\{\xi(x-ct)\}$ の偏導関数を計算すると，合成関数の微分法則から

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=-\xi^2c^2\sin\{\xi(x-ct)\},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=-\xi^2\sin\{\xi(x-ct)\}
\end{aligned}
$$

となる．したがって，これらをクライン – ゴルドン方程式に代入すると

$$
(-\xi^2c^2+\xi^2+m^2)\sin\{\xi(x-ct)\}=0
$$

が得られる．いま，$\xi \neq 0$ なので

$$c^2 = 1 + \frac{m^2}{\xi^2}$$

となり，$c > 0$ であることから，分散関係

$$c = \sqrt{1 + \left(\frac{m}{\xi}\right)^2}$$

が得られる．

5-18 まず，u の偏導関数のラプラス変換を計算すると，ラプラス変換の性質により

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right](s) = s\mathcal{L}[u(x,t)](s) - u(x,0) = sU_s(x) - \varphi(x)$$

となる．また，x についての微分と t についての積分は交換可能なので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right](s) &= \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-st}dt \\ &= \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt = U_s''(x)\end{aligned}$$

となる．これらを熱方程式の両辺に代入することで，$U_s(x)$ に対する常微分方程式

$$sU_s(x) - \varphi(x) = cU_s''(x)$$

が得られる．これを整理すると

$$cU_s''(x) - sU_s(x) = -\varphi(x)$$

となる．

5-19 求める解を $u(x,t)$ とすると，***5-18*** から $u(x,t)$ のラプラス変換 $U_s(x)$ は常微分方程式

$$U_s''(x) - sU_s(x) = -\cos x$$

を満たす．これは非斉次の 2 階線形常微分方程式であるので，Point 4.8 により，

$$U_s(x) = C_1 e^{\sqrt{s}x} + C_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{1+s}\cos x$$

が一般解となる．いま $U_s(x)$ は有界であると仮定しているので，$C_1 = C_2 = 0$ でなければならない．したがって

$$U_s(x) = \frac{1}{1+s}\cos x$$

であるので，求める解は

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+s}\cos x\right](t) = e^{-t}\cos x$$

である．