第1章 1.1 関数

$\boxed{問1.}$ (1) $\sqrt{}$ の中は非負であるから, $x-x^2=x(1-x)\geqq 0$.

定義域は $0\leq x\leq 1$. このとき, $x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ から

$0\leq x-x^2\leq\frac{1}{4}$. 値域は $0\leq y\leq\frac{1}{2}$.

(2) $y=\frac{1}{x}$ は $x=0$ 以外で定義できるので, 定義域は

$-\infty<x<0$, $0<x<\infty$ である. $x=\frac{1}{y}$ とみると, $y=0$ 以外

では x の値がある. 値域は $-\infty<y<0$, $0<y<\infty$.

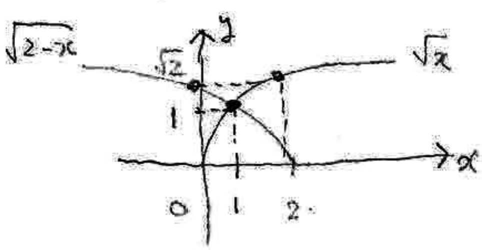
(3) $\sqrt{}$ の中は非負であるから, $x\geqq 0$, $2-x\geqq 0$ である

また分母は 0 とならない. $\sqrt{x}-\sqrt{2-x}=0$ を解く. $\sqrt{x}=\sqrt{2-x}$

$x=2-x$ のとき $x=1$, $0\leq x<1$, $1<x\leq 2$.

$z=\sqrt{x}-\sqrt{2-x}$ とすると, $z^2=(\sqrt{x}-\sqrt{2-x})=x-2\sqrt{x}\sqrt{2-x}+(2-x)$

$=2-2\sqrt{x}\sqrt{2-x}$ より $2-z^2=2\sqrt{x}\sqrt{2-x}=2\sqrt{x(2-x)}$.



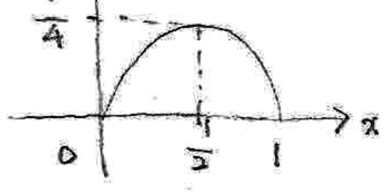
$x(2-x)\leq 1$. となり,

$0\leq 2-z^2\leq 2$ より

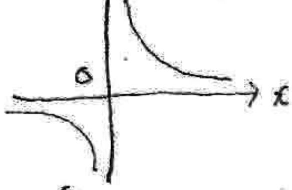
$0\leq z^2\leq 2$.

$0\leq x<1$ のとき, $-\sqrt{2}\leq z<0$ $1<x\leq 2$ のとき $0<z\leq\sqrt{2}$. 値域は

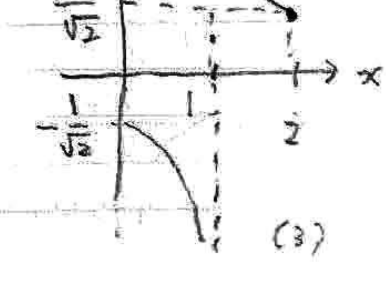
$0\leq x<1$ のとき $-\infty<y\leq-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $1<x\leq 2$ のとき $\frac{1}{\sqrt{2}}\leq y<\infty$.



(1)



(2)



(3)

$\boxed{問 2.}$ ∵奇関数は $f(-x)=-f(x)$ より，グラフは原点を通る。　また，奇関数かつ偶関数になるのは $f(x)=f(-x)=-f(-x)$ より $f(-x)=0$。$f(x)$ は恒等的に 0 である。

(1) $f(x)=x+1$ のとき，$f(0)=1\neq 0$ より，原点を通らないので，

奇関数ではない。また偶関数と仮定すると

$f(x)=x+1$；$f(-x)=-x+1$ となり $f(x)=f(-x)$ と

なるのは $2x=2$ より $x=1$ のみである．$f(x)$ は偶関数でもない。

(2) $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$。$f(-x)=\dfrac{-x}{4-x^2}$ より $f(x)=-f(-x)$ となり

$f(x)$ は奇関数である．

(3) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}$．$f(-x)=\sqrt{1-x+x^2}+\sqrt{1+x+x^2}=f(x)$

より，$f(x)$ は偶関数である。

1.2 復習 1：指数・対数関数

$\boxed{問 1.}$ (1) $\sqrt[3]{49}\times\sqrt[6]{49}=\sqrt[3]{7^2}\times\sqrt[6]{7^2}=7^{\frac{2}{3}}\times 7^{\frac{2}{6}}=7^{\frac{2}{3}+\frac{2}{6}}=7$

(2) $3^5\times 9^{-3}\times\sqrt[3]{27}=3^5\times(3^2)^{-3}\times\sqrt[3]{3^3}=3^5\times 3^{-6}\times 3=1$

(3) $\dfrac{(2^5\times 3^{10})^5}{4^{12}\times 9^{25}}=\dfrac{2^{25}\times 3^{50}}{(2^2)^{12}\times(3^2)^{25}}=2^{25-24}\times 3^{50-50}=2$

(4) $\log_3\dfrac{1}{81}=-\log_3 81=-\log_3 3^4=-4\log_3 3=-4$

(5) $\log_9\sqrt[4]{27}=\log_9\sqrt[4]{3^3}=\log_9 3^{\frac{3}{4}}=\dfrac{3}{4}\log_9 3=\dfrac{3}{4}\,\dfrac{\log_3 3}{\log_3 9}$

$=\dfrac{3}{4}\,\dfrac{1}{\log_3 3^2}=\dfrac{3}{4}\,\dfrac{1}{2\log_3 3}=\dfrac{3}{8}$

(6) $\log_2 3\times\log_3 8=\log_2 3\times\log_3 2^3=3\log_2 3\times\log_3 2$

$=3\log_2 3\times\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}=3.$

問2　$\because a=\log_b c$ なる $c=b^a$ より $c=b^{\log_b c}$ となる.

$$a^{\log_a \frac{m}{n}}=\frac{m}{n}=\frac{a^{\log_a m}}{a^{\log_a n}}=a^{\log_a m-\log_a n}.$$

指数部分を見ると　$\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n.$

ここで定理 1.2.1 (ii)を用いた.

問3　$$a^{\log_a m^r}=m^r=(m)^r=(a^{\log_a m})^r=a^{r\log_a m}.$$

指数部分を見ると. $\log_a m^r=r\log_a m.$

ここで.定理1.2.1 (iii)を用いた.

問4　(1) $$(\cosh x)^2-(\sinh x)^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$$

$$=1.$$

(2) $$\cosh x_1\cosh x_2+\sinh x_1\sinh x_2=\frac{e^{x_1}+e^{-x_1}}{2}\cdot\frac{e^{x_2}+e^{-x_2}}{2}$$

$$+\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2}\cdot\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2}=\frac{1}{4}\Big(e^{x_1+x_2}+e^{x_1-x_2}+e^{x_2-x_1}+e^{-(x_1+x_2)}$$

$$+e^{x_1+x_2}-e^{x_1-x_2}-e^{x_2-x_1}+e^{-(x_1+x_2)}\Big)=\frac{1}{2}\left(e^{x_1+x_2}+e^{-(x_1+x_2)}\right)=\cosh(x_1+x_2).$$

(3) $$\sinh x_1\cosh x_2+\cosh x_1\sinh x_2=\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{2}\cdot\frac{e^{x_2}+e^{-x_2}}{2}+\frac{e^{x_1}+e^{-x_1}}{2}\cdot\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\Big(e^{x_1+x_2}-e^{x_2-x_1}+e^{x_1-x_2}-e^{-(x_1+x_2)}+e^{x_1+x_2}+e^{x_2-x_1}-e^{x_1-x_2}-e^{-(x_1+x_2)}\Big)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{x_1+x_2}-e^{-(x_1+x_2)}\right)=\sinh(x_1+x_2)$$

(4) $$\tanh(x_1+x_2)=\frac{\sinh(x_1+x_2)}{\cosh(x_1+x_2)}=\frac{\sinh x_1\cosh x_2+\cosh x_1\sinh x_2}{\cosh x_1\cosh x_2+\sinh x_1\sinh x_2}$$

$$=\frac{\dfrac{\sinh x_1}{\cosh x_1}+\dfrac{\sinh x_2}{\cosh x_2}}{1+\dfrac{\sinh x_1\sinh x_2}{\cosh x_1\cosh x_2}}=\frac{\tanh x_1+\tanh x_2}{1+\tanh x_1\tanh x_2}$$

問5 (1) $f(x)=\cosh x$ とすると $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}$ より $f(x)=f(-x)$.

$\cosh x$ は偶関数。

(2) $f(x)=\sinh x$ とすると $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-f(x)$.

$\sinh x$ は奇関数.

注 次のことが成り立つ.

奇関数＋奇関数＝奇関数, 偶関数＋偶関数＝偶関数

0でない関数について

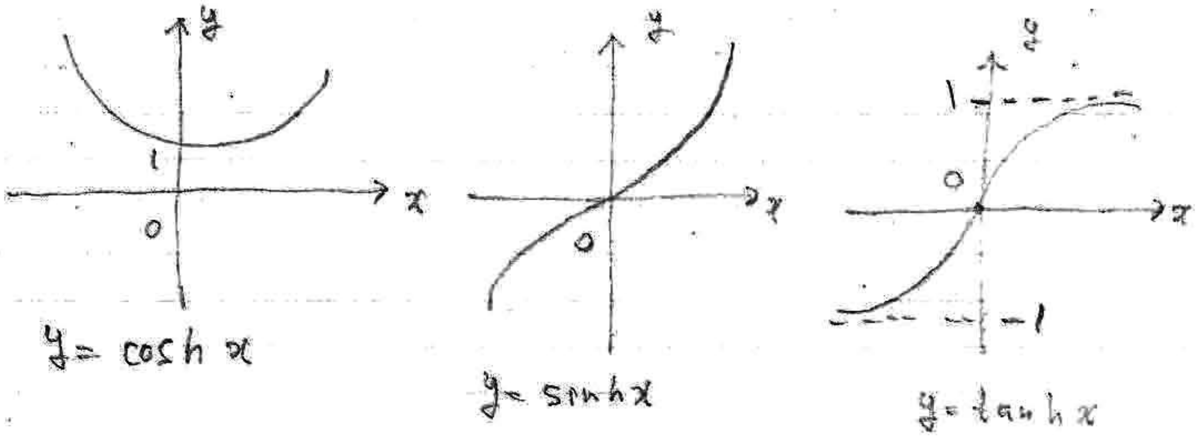
$\dfrac{1}{奇関数}$＝奇関数, $\dfrac{1}{偶関数}$＝偶関数.

偶関数×偶関数＝偶関数, 奇関数×奇関数＝奇関数

偶関数×奇関数＝奇関数

以上の結果を各自確かめてほしい.

(3) $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ より, $\sinh x$ は奇関数, $\cosh x$ は偶関数より, $\tanh x$ は奇関数である



$y=\cosh x$　　$y=\sinh x$　　$y=\tanh x$

1.3 復習2：三角関数

$\boxed{問1}$ (1) $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, (2) $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, (3) $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(4) $\cos(-\frac{2}{3}\pi)=\cos\frac{2}{3}\pi=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\pi\cos(-\frac{\pi}{3})$

$-\sin\pi\sin(-\frac{\pi}{3})=-\cos(-\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

(5) $\sin(-\frac{2}{3}\pi)=-\sin\frac{2}{3}\pi=-\sin(\pi-\frac{\pi}{3})=-\sin\pi\cos(-\frac{\pi}{3})$

$-\cos\pi\sin(-\frac{\pi}{3})=\sin(-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(6) $\tan(-\frac{2}{3}\pi)=\dfrac{\sin(-\frac{2}{3}\pi)}{\cos(-\frac{2}{3}\pi)}=\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

(7) $\cos 0=1$, (8) $\sin 0=0$, (9) $\tan 0=0$.

(10) $\cos\pi=-1$, (11) $\sin\pi=0$, (12) $\tan\pi=0$

(13) $\cos(-\frac{7}{4}\pi)=\cos\frac{7}{4}\pi=\cos(2\pi-\frac{\pi}{4})=\cos 2\pi\cos(-\frac{\pi}{4})$

$-\sin 2\pi\sin(-\frac{\pi}{4})=\cos(-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(14) $\sin(-\frac{7\pi}{4})=-\sin\frac{7}{4}\pi=-\sin(2\pi-\frac{\pi}{4})=-(\sin 2\pi\cos(-\frac{\pi}{4})$

$+\cos 2\pi\times\sin(-\frac{\pi}{4}))=-\sin(-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(15) $\tan(-\frac{7}{4}\pi)=\dfrac{\sin(-\frac{7}{4}\pi)}{\cos(-\frac{7}{4}\pi)}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1$.

$\boxed{問2}$ (1) $\cos\theta=\cos(-\theta)$ より 偶関数、定義域は $-\infty<\theta<\infty$,
値域は $-1\leq\cos\theta\leq 1$.

(2) $-\sin\theta=\sin(-\theta)$ より 奇関数、定義域は $-\infty<\theta<\infty$,
値域は $-1\leq\sin\theta\leq 1$

(3) $\tan(-\theta)=\dfrac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$ より

奇関数、$\cos\theta=0$ のとき $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

定義域は、$\theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ を除いたすべての実数である。また、

値域は、$-\infty < \tan\theta < \infty$ である。

$\boxed{\text{問3}}$ (1) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

より、$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

(2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ より、

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

(3) $\cos(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$

$+ \cos x_1 \cos(-x_2) + \sin x_1 \sin(-x_1) = \cos x_1 \cos x_2$

$- \sin x_1 \sin x_2 + \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 = 2\cos x_1 \cos x_2$.

(4) (3) と同様に

$\cos(x_1 + x_2) - \cos(x_1 - x_2) = -2\sin x_1 \sin x_2$.

(5) $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{\cos 2x}{1} = \cos 2x$.

(4) $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \dfrac{\sin 2x}{1} = \sin 2x$.

第2章　2.1 合成関数

問1　$f(x)=\sin x$，$g(x)=x^4$，$h(x)=\sqrt{x}$

(1) $p(x)=f(g(x))=\sin g(x)=\sin x^4$

(2) $g(x)=g(h(x))=(\sqrt{x})^4=x^2$　$(x\geqq 0)$

(3) $p(h(x))=\sin(h(x))^4=\sin x^2$　$(x\geqq 0)$

(4) $f(g(x))=\sin x^2=p(h(x))$．より　$(f\circ g)\circ h(x)=f\circ(g\circ h)(x)$

問2　$f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$　$(x\neq 1)$，　$g(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$　$(x\neq 3)$

(1) $-\infty<x<1$（又は $x<1$），　$1<x<\infty$　（又は $1<x$）

(2) $-\infty<x<3$，　$3<x<\infty$

(3) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}=3$ を考える．　$2x+3=3x-3$．　$x=6$．

$f(x)$の定義域として．$-\infty<x<1$，　$1<x<6$，　$6<x<\infty$．

(4) $$g(f(x))=\frac{f(x)+2}{f(x)-3}=\frac{\dfrac{2x+3}{x-1}+2}{\dfrac{2x+3}{x-1}-3}=\frac{2x+3+2x-2}{2x+3-3x+3}=\frac{4x+1}{6-x}$$

問3　$f(x)=\frac{1}{2}x\log x=x\log x^{\frac{1}{2}}=x\log\sqrt{x}=\log(\sqrt{x})^x$．そして，

$a=e^{\log a}$　より $(\sqrt{x})^x=g(f(x))$．

2.2 逆関数

問1　$f(x)=3x-2=y$ のとき $3x=y+2$．　$x=\dfrac{y+2}{3}$ より　$f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{3}$．

問2　$f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}=y$，$x\neq 1$ のとき，$x+3=y(x-1)$．$x(1-y)=-y-3$

$x=\dfrac{-y-3}{1-y}=\dfrac{y+3}{y-1}$ より　$f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$　$(x\neq 1)$．

$\boxed{問3}$ $f(x) = x^2 - 2x = y \ (1 \leq x)$. $x^2 - 2x - y = 0$ より，解の公式から

$x = 1 \pm \sqrt{1+y}$. $x \geqq 1$ より $x = 1 + \sqrt{1+y}$ となり $(y \geqq -1)$，$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$.

$(x \geqq -1)$.

$\boxed{問4}$ $f(x) = x^2 - 2x \ (x \leq 1)$，問3と同様に $x = 1 \pm \sqrt{1+y}$ となる.

$x \leq 1$ より $x = 1 - \sqrt{1+y}$. $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}$ $(x \geqq -1)$.

$\boxed{問5}$ $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = y \ (0 \leq x)$. $e^x = X$ とおくと $X \geqq 1$.

$y = \dfrac{X + \frac{1}{X}}{2}$ より $X + \dfrac{1}{X} - 2y = 0$. $X^2 - 2yX + 1 = 0$.

解の公式より $X = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. $y \geqq 0$，$y \leqq -1$，$y \geqq 1$

より $y \geqq 1$. $X = e^x$ より $(0 \leq x)$，$X = y + \sqrt{y^2 - 1}$ となる. $x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$ より

$f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$. $(x \geqq 1)$.

$\boxed{問6}$ $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$. $e^x = X$ とすると $X > 0$,

$y = \dfrac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}}$. $(X + \frac{1}{X})y = X - \frac{1}{X}$ より $(y-1)X^2 + y + 1 = 0$

$X^2 = \dfrac{y+1}{1-y} \geqq 0$ $\quad 1 - y > 0$ のとき $y + 1 \geqq 0$. $-1 \leqq y < 1$.

$1 - y < 0$ のとき $y + 1 \leq 0$. 不適.

$X = \sqrt{\dfrac{y+1}{1-y}} = e^x$ より $x = \log\sqrt{\dfrac{y+1}{1-y}}$，$-1 < y < 1$

$\therefore$ $f^{-1}(x) = \log\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ $(-1 < x < 1)$.

⑪ 2.3 逆三角関数

$\boxed{問1}$ $\sin^{-1}\frac{1}{2}=\theta$ とすると $\sin\theta=\frac{1}{2}$, より $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{6}$. $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{2}=\theta$ とすると $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ より $\theta=\frac{\pi}{6}$ となり

$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

$\boxed{問2}$

$\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\theta$ とすると $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ より $\theta=2n\pi+\frac{5}{6}\pi$ $(n=0, \pm1, \pm2\cdots)$

$\mathrm{Cos}^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\theta$ とすると $0\leq\theta\leq\pi$ より $\theta=\frac{5}{6}\pi$ となり

$\mathrm{Cos}^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{5}{6}\pi$.

$\boxed{問3}$ $\tan^{-1}\sqrt{3}=\theta$ とすると $\tan\theta=\sqrt{3}$ より $\theta=n\pi+\frac{\pi}{3}$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

$\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3}=\theta$ とすると $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ より $\theta=\frac{\pi}{3}$ となり

$\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$.

$\boxed{問4}$ (1) $\mathrm{Cos}^{-1}1=\theta$ とすると $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$.

$\cos(\mathrm{Cos}^{-1}1)=\cos(\mathrm{Cos}^{-1}1)=1$.

(2) $\sin\frac{7}{6}\pi=-\frac{1}{2}$ $\quad\mathrm{Sin}^{-1}(\sin\frac{7}{6}\pi)=\mathrm{Sin}^{-1}(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{6}$

(3) $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{2}{3}=\theta$ とすると $0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$. $\sin\theta=\frac{2}{3}$, $\cos\theta>0$.

$\cos(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{2}{3})=\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

($\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より)

(4) (3) より $\sin\theta=\frac{2}{3}$ $\quad\cos(2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{2}{3})=\cos 2\theta$

$=1-2\sin^2\theta=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$.

(5) $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{4}=\theta$ とすると $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, $\sin\theta=\frac{1}{4}$, $\cos\theta\geq 0$

$\sin(2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{4})=\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}.$

$\boxed{\text{問 5}}$ $\mathrm{Sin}^{-1}x=\mathrm{Cos}^{-1}\frac{2}{3}$, 主値より $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ である。また

$0\leq\mathrm{Cos}^{-1}\frac{2}{3}\leq\frac{\pi}{2}$. $\theta=\mathrm{Sin}^{-1}x=\mathrm{Cos}^{-1}\frac{2}{3}\geq 0$. $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ となる。

$\sin\theta=x$, $\cos\theta=\frac{2}{3}$ より $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta=x^2+\frac{4}{9}$.

$x^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. $x\geq 0$ より $x=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\boxed{\text{問 6}}$ (1) $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}=x$, $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3}=y$ とおくと $0\leq x, y\leq\frac{\pi}{2}$, そして

$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{5}{5}=1$

$\tan x=\frac{1}{2}$, $\tan y=\frac{1}{3}$ となる。

25−9=16

$0\leq x+y\leq\pi$ より $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3}=x+y=\frac{\pi}{4}$.

(2) $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{3}{5}=x$, $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{4}{5}=y$ とおくと $0\leq x, y\leq\frac{\pi}{2}$, そして

$\sin x=\frac{3}{5}$, $\sin y=\frac{4}{5}$. $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\frac{4}{5}$, $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\frac{3}{5}$

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=1$.

$0\leq x+y\leq\pi$ より $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{3}{5}+\mathrm{Sin}^{-1}\frac{4}{5}=x+y=\frac{\pi}{2}$.

第3章 3.1 関数の極限

問1 (1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-4x-4}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x+2)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x+2}{2x+1}=\frac{8}{5}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{4}{x}}{1+\frac{3}{x}}=2$ ここで $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ を用いた。

(4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=2.$

(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

(6) 有理化する

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+6x+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+6x+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+6x+4}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+4-x^2}{\sqrt{x^2+6x+4}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{\sqrt{x^2+6x+4}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{4}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{6}{2}=3.$$

問2 (1) $3x=y$ とおく $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\frac{y}{3}}=3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=3$

(2) $y=\frac{x}{2}$ とおく。

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2\cdot\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=2\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{4y^2}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1.$

$y=4x$ とおくと

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{4}{y}}=\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^4=e^4.$

(5) $y=-x$ とおくと

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{y}}=\left\{\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right\}^{-1}=e^{-1}.$

◎ 3.2 関数の連続性

問1 $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4}\neq f(3)$

$\displaystyle\lim_{x\to 3}f(x)\neq f(3)$ より, $x=3$ で不連続.

問2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. より $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=1=f(0)$. $x=0$ で連続.

問3 (1) $y=x^3-4x^2+3$ について, x^3, $-4x^2$, 3 は定理 3.2.2

(i), (iii) を用いて連続である. (ii) を用いて y も連続となる.

(2) $x^2+1>0$ より定理 3.2.2 (iv) と (1) の議論より y は.

連続である.

(3) $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ は $x\neq 1$ のとき (2) と同様に連続であるので

示すには $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=2$

より y は $x=1$ でも連続である.

問4 教科書の解答を参照.

第4章　4.1 微分係数

$\boxed{問1}$ 定理 4.1.3 (i) の証明.

$$(c f(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{c f(x+h) - c f(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c f'(x).$$

ここで定理3.1.2 (i) を用いた.

定理 4.1.3 (ii) の証明

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x).$$

ここで定理3.1.2 (ii) を用いた.

$\boxed{問2}$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$\boxed{問3}$

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

定理 4.1.3 (iv) を用いた.

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\tan x} = \frac{d}{dx} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$\boxed{問4}$ 教科書の解答を参照.

$\boxed{\text{問5}}$ $\dfrac{d \log_a x}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\log x}{\log a} = \dfrac{1}{\log a}\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{\log a}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\log a}$.

◎ 4.2 合成関数の微分

$\boxed{\text{問1}}$ (1) $f(u)=u^4$, $g(x)=3+x^2$ とすると $(3+x^2)^4=f(g(x))$ となる.

$$\frac{d}{dx}(3+x^2)^4 = \frac{d\,f(g(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du}\times\frac{dg(x)}{dx} = 4u^3\times 2x$$
$$= 8x(3+x^2)^3.$$

(2) $f(u)=\log u$, $g(x)=\cos x$ とすると $\log\cos x = f(g(x))$ となる

$$\frac{d}{dx}\log\cos x = \frac{d\,f(g(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du}\times\frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{u}\cdot(-\sin x)$$
$$= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

(3) $f(u)=e^u$, $g(x)=2\sin x$ とすると $e^{2\sin x}=f(g(x))$ となる.

$$\frac{d}{dx}e^{2\sin x} = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du}\times\frac{dg(x)}{dx} = e^u\cdot 2\cos x = 2\cos x\, e^{2\sin x}.$$

(4) $f(u)=\tan u$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ とすると $\tan\dfrac{1}{x}=f(g(x))$ となる

$$\frac{d}{dx}\tan\frac{1}{x} = \frac{d\,f(g(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du}\times\frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}.$$

(5) $f(u)=u^5$, $g(x)=\cos x$ とすると $\cos^5 x = f(g(x))$ となる.

$$\frac{d}{dx}\cos^5 x = \frac{d\,f(g(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du}\times\frac{dg(x)}{dx} = 5u^4(-\sin x) = -5\sin x\cos^4 x.$$

(6) $f(u)=u^3$, $g(x)=\sin x$ とすると $\sin^3 x = f(g(x))$ となる

$$\frac{d}{dx}\sin^3 x = \frac{d\,f(g(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du}\times\frac{dg(x)}{dx} = 3u^2\cos x = 3\sin^2 x\cos x.$$

$$(x\sin^3 x)' = x'\sin^3 x + x(\sin^3 x)' = \sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x$$
$$= (\sin x + 3\cos x)\sin^2 x.$$

(7) (5)と同様にして $(\cos^3 x)' = -3\sin x\cos^2 x$ より

$$\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos^3 x - \sin x(\cos^3 x)'}{(\cos^3 x)^2}$$

$$= \frac{\cos^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x}{(\cos^3 x)^2} = \frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

(8) $(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{-e^x}{e^{2x}} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}$

注 $\frac{dF(u)}{du} = f(u)$ とする. a, b を定数とするとき,

$$\frac{dF(ax+b)}{dx} = af(ax+b)$$

が成り立つ.

(∵) $g(x) = ax+b$ とすると $F(ax+b) = F(g(x))$

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = \frac{d}{dx}F(g(x)) = \frac{d}{du}F(u) \times \frac{d}{dx}g(x)$$

$$= f(u)\cdot a = af(ax+b).$$

$(\sin 3x)' = 3\cos 3x$ より

$$(e^{-x}\sin 3x)' = (e^{-x})'\sin 3x + e^{-x}(\sin 3x)'$$

$$= -e^{-x}\sin 3x + e^{-x}\,3\cdot\cos 3x = e^{-x}(3\cos 3x - \sin 3x)$$

(9) $F(u) = e^u$, $a=2$, $b=0$ として, 注を用いると

$\frac{d}{dx}e^{2x} = 2e^{2x}$. $f(u) = \log u$, $g(x) = \frac{1+e^{2x}}{1+e^x}$

$$g'(x) = \frac{(1+e^{2x})'(1+e^x) - (1+e^{2x})(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^{2x}(1+e^x) - e^x(1+e^{2x})}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{2e^{2x}+e^{3x}-e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(2e^x+e^{2x}-1)}{(1+e^x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\log\frac{1+e^{2x}}{1+e^x} = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{d}{du}f(u) \times \frac{d}{dx}g(x) =$$

$$=\frac{1}{u}\times\frac{e^x(2e^x+e^{2x}-1)}{(1+e^x)^2}=\frac{1+e^x}{1+e^{2x}}\ \frac{e^x(2e^x+e^{2x}-1)}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x(e^{2x}+2e^x-1)}{(1+e^{2x})(1+e^x)}$$

$\boxed{\text{問2}}$

(1) 定理 4.1.4 (ii) $\frac{d}{dx}x^{\frac{5}{4}}=\frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1}=\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$.

(2) $\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(3) $\frac{d}{dx}\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{x}=\frac{d}{dx}(x^{-1}+x^{-\frac{2}{3}})=-x^{-2}-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{3x^{\frac{5}{3}}}$.

又は 定理 4.1.3 (iv) より

$$\frac{d}{dx}\frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{x}=\frac{\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot x-(1+x^{\frac{1}{3}})}{x^2}=\frac{x^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+1}{3x^2}=\frac{+1+2x^{\frac{1}{3}}}{3x^2}$$

(4) 例題 4.2.2 (2) より.

$\frac{d}{dx}3^x=\log 3\times 3^x$.

(5) $$\frac{d}{dx}\frac{3x}{1+2^x}=\frac{(3^x)'(1+2^x)-3^x(1+2^x)'}{(1+2^x)^2}=\frac{(1+2^x)\log 3\times 3^x-3^x\log 2\times 2^x}{(1+2^x)^2}$$

$$=\frac{6^x(\log 3-\log 2)+\log 3\times 3^x}{(1+2^x)^2}$$

(6) $f(u)=\sqrt{u}$, $g(x)=1+x^2$ とすると $\sqrt{1+x^2}=f(g(x))$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2}=\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{d}{du}f(u)\times\frac{d}{dx}g(x)=\frac{1}{2\sqrt{u}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ここで, $f(u)=\log u$, $g(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ とおくと

$\log(x+\sqrt{1+x^2})=f(g(x))$

$$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{1+x^2})=\frac{d}{du}f(u)\times\frac{d}{dx}g(x)=\frac{1}{u}\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(7) $f(u)=u^2$, $g(x)=x^x$ とすると $x^{2x}=f(g(x))$. 例題4.2.2(1)

より $\frac{d}{dx}x^x=(\log x+1)x^x$.

$$\frac{d}{dx}x^{2x} = \frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{du}f(u) \times \frac{d}{dx}g(x) = 2u \times (\log x + 1)x^x$$

$$= 2x^{2x}(\log x + 1)$$

(8) $y = x^{\sin x}$ とすると $\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \times \log x$.

両辺を x で微分すると、

$$\frac{d}{dx}\log y = \frac{1}{y} \times y' = \cos x \log x + \frac{1}{x}\sin x$$

$$(x^{\sin x})' = y' = y(\cos x \cdot \log x + \frac{1}{x} \cdot \sin x)$$

(9) $y = x^{\log x}$ とすると、 $\log y = (\log x)^2$.

両辺を x で微分すると、

$$(\log y)' = \frac{1}{y}y' = ((\log x)^2)' = 2 \times \frac{1}{x}\log x$$

$$y' = (x^{\log x})' = y\frac{2}{x}\log x = \frac{2}{x}x^{\log x} \cdot \log x.$$

$\boxed{問3}$ $u = f(x)$ とすると $\log|f(x)| = \log|u|$. 合成関数の微分より

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \frac{d}{du}\log|u| \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

4.3 逆関数の微分

$\boxed{問1}$ 例題 2.3.1.(2) より $\cos^{-1}x + \sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

両辺を x で微分して定理 4.3.1 (i) を用いる。

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x + \frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \left(\frac{\pi}{2}\right)' = 0$$

より、 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{問2}$ (1) $f(u)=\mathrm{Sin}^{-1}u$, $g(x)=2x$ とすると $\mathrm{Sin}^{-1}(2x)=f(g(x))$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}2x=\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{d}{du}f(u)\frac{d}{dx}g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot 2=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

(2) $f(u)=\mathrm{Tan}^{-1}u$, $g(x)=\frac{x}{3}$ とすると $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{3}=f(g(x))$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{3}=\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{d}{du}f(u)\frac{d}{dx}g(x)=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}$$

$$=\frac{3}{x^2+9}$$

(3) $f(u)=\mathrm{Cos}^{-1}u$, $g(x)=e^x$ とすると $\mathrm{Cos}^{-1}e^x=f(g(x))$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}e^x=\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{d}{du}f(u)\frac{d}{dx}g(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot e^x$$

$$=\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$ 同様に $\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}e^x=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Cos}^{-1}e^x+\mathrm{Sin}^{-1}e^x)=0.$$

4.4 媒介変数表示の微分

$\boxed{問1}$ $x=t^2+2$, $y=t^3+3t$

(1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+3}{2t}=\frac{3(t^2+1)}{2t}$$

(2) $t=-1$ のとき $\frac{dy}{dx}=\frac{3(1+1)}{-2}=-3$. 点Aの$x$と$y$座標は $x(-1)=3$, $y(-1)=-4$.

接線の式は $y-y(-1)=-3(x-x(-1))$.

$y=-3x+5$.

$\boxed{問2}$ $x=\cos^3t$, $y=\sin^3t$. とする.

(1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos t\sin^2t}{-3\sin t\cos^2t}=-\frac{\sin t}{\cos t}=-\tan t$$

(2) $t=\frac{\pi}{4}$ のとき点Aより, そのx, y座標は $x(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $y(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

接線の式は $y-y(\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}(x-x(\frac{\pi}{4}))$

$y-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-(x-\frac{1}{2\sqrt{2}})$, $y=-x+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

第5章 5.1 n次導関数

$\boxed{\text{問1}}$ 定理5.1.1 (i)の証明．数学的帰納法で示す．

$n=1$ のとき $(x^a)' = a x^{a-1}$ （例題 4.2.1 (3)より）

より公式が成り立つ

$n=k$ のとき正しいとする．

$$(x^a)^{(k)} = a(a-1)\cdots(a-k+1)x^{a-k} \cdots$$

$n=k+1$ のとき

$$(x^a)^{(k+1)} = \{(x^a)^{(k)}\}' = a(a-1)\cdots(a-k+1)(x^{a-k})'$$

$$= a(a-1)\cdots(a-k+1)(a-k)x^{a-k-1}$$

より公式は成立するので，すべての n で成立する．

(ii) $n=1$ のとき $(\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

より公式が成り立つ．

$n=k$ のとき正しいとする．

$$(\cos x)^{(k)} = \cos\left(x+\frac{\pi k}{2}\right)$$

$n=k+1$ のとき

$$(\cos x)^{(k+1)} = \{(\cos x)^{(k)}\}' = \left(\cos\left(x+\frac{\pi k}{2}\right)\right)'$$

$$= -\sin\left(x+\frac{\pi k}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi(k+1)}{2}\right)$$

より公式は成り立つので，すべての n で成立する

(iii) (ii)を参考にして欲しい

(iv) $n=1$ のとき

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

より公式が成り立つ．

$n=k$ のとき正しいとする．

$$(\log|x|)^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!\,x^{-k}$$

$n=k+1$ のとき

$(\log|x|)^{(k+1)}=\{(\log|x|)^{(k)}\}'=\{(-1)^{k-1}(k-1)!\,x^{-k}\}'$

$=(-1)^{k-1}(k-1)!(-k)x^{-k-1}=(-1)^{k}k!\,x^{-(k+1)}$

より公式は成立するので，すべての n で成立する。

(v) $(e^x)'=e^x$ より，自明である。

$\boxed{問2}$ $f(x)=e^{3x}$ とする。

(1) $f'(x)=3e^{3x}$，$f''(x)=9e^{3x}$，$f^{(3)}(x)=27e^{3x}$，$f^{(4)}(x)=81e^{3x}$

(2) $f^{(n)}(x)=3^n e^{3x}$.

$\boxed{問3}$ $f(x)=\log(1-x)$，　$g(u)=\log u$，$h(x)=1-x$ とすると

$\log(1-x)=g(h(x))$，$\dfrac{d}{dx}\log(1-x)=\dfrac{d}{dx}g(h(x))=\dfrac{d}{du}g(u)\dfrac{d}{dx}h(x)$

$=\dfrac{1}{u}\cdot(-1)=-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1}{x-1}=(x-1)^{-1}$

$f''(x)=-(x-1)^{-2}$，$f^{(3)}(x)=2(x-1)^{-3}$，$f^{(4)}(x)=-6(x-1)^{-4}$

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!\,(x-1)^{-n}=-(n-1)!\,(1-x)^{-n}$.

5.2 媒介変数表示の高次導関数.

$\boxed{問1}$ $x=t+\cos t$，$y=t+\sin t$ とする.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1+\cos t}{1-\sin t}$.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\frac{1+\cos t}{1-\sin t}}{\frac{d}{dt}(t+\cos t)}=\dfrac{\frac{-\sin t(1-\sin t)+(1+\cos t)\cos t}{(1-\sin t)^2}}{1-\sin t}=\dfrac{-\sin t+\cos t+1}{(1-\sin t)^3}$

$\boxed{問2}$ $x=\cos 2t$，$y=\sin 3t$ とする.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3\cos 3t}{-2\sin 2t}$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\frac{3\cos 3t}{-2\sin 2t}}{\frac{d}{dt}\cos 2t}=\dfrac{-\frac{3}{2}\frac{-3\sin 3t\sin 2t-2\cos 3t\cos 2t}{\sin^2 2t}}{-2\sin 2t}$

$$= -\frac{3(3\sin 3t \sin 2t + 2\cos 3t \cos 2t)}{4\sin^2 2t}.$$

第6章 6.1 微分と速度

$\boxed{問1}$ $x(t) = t^2 - 4t$ [m] とする。

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 2t - 4$　　$2t-4$ [m/s]

(2) $t=5$ のとき　6 [m/s]

(3) $6>0$ より 正の向きに運動しているので，(a)が正しい。

$\boxed{問2}$ $x(t) = t\sin 3t$ [m] とする

(1) $\dfrac{dx}{dt} = \sin 3t + 3t\cos 3t$,　$\sin 3t + 3t\cos 3t$ [m/s]

(2) $t=\pi$ のとき　$\sin 3\pi + 3\pi\cos 3\pi = -3\pi$ [m/s]

(3) $-3\pi < 0$ より 負の向きに運動しているので，(b)が正しい。

⑪ 6.2 微分と加速度

$\boxed{問1}$ $v(t) = 2t^3 - 4t^2$ [m/s]

(1) $a(t) = \dfrac{d}{dt}v = 6t^2 - 8t$　　$6t^2 - 8t$ [m/s²]

(2) $t=1$ のとき　$a(1) = -2$　　-2 [m/s²]

(3) $v(1) = -2$，負の向きに運動し速さを増加している

ので (c)が正しい。

$\boxed{問2}$ $x(t) = t\,e^{-t}$ [m] とする

(1) $v(t) = \dfrac{d}{dt}x = e^{-t} - te^{-t}$　　$(1-t)e^{-t}$ [m/s]

(2) $a(t) = \dfrac{d}{dt}v(t) = -e^{-t} - (1-t)e^{-t} = (t-2)e^{-t}$ [m/s²]

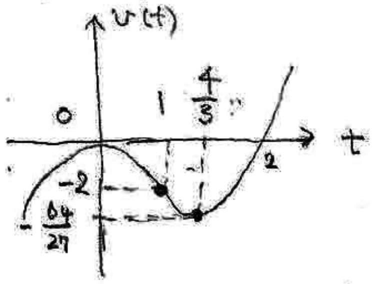
(3) $t=3$，$v(3) = -2e^{-3}$ [m/s]，$a(3) = e^{-3}$ [m/s²]

(4) $v(3) < 0$，$a(3) > 0$

物体は負の方向に運動しているが 速度は減少している

ので (d)が正しい。

$\boxed{注}$ 問1で $v(t)$のグラフは $v(t)=2t^2(t-2)$。



$t=1$では $v(t)$の勾配は負より

速度は大きくなっている。

第7章 7.1 ロルの定理と平均値の定理

問1 $x-1=h$ とすると，$\log(h+1)<h$ を示せばよい．$\log 1=0$ より

$$\frac{\log(1+h)-\log 1}{h}=\frac{1}{c}<1。$$ このとき，$1<c<1+h=x$．

$1<x$ のとき 不等式 $\log x<x-1$ が示された。

問2 $$\frac{\tan x-\tan 0}{x}=\frac{1}{\cos^2 c},$$ ただし，$0<c<x$．

$0<x<\frac{\pi}{2}$ より $0<\cos^2 c<1$．$\frac{\tan x}{x}>1$．

より，不等式 $\tan x>x$ が示された．

第8章 8.1 0/0 型の不定形

問1 (1) $\tan 0=\log 1=0$ より $0/0$ 型の不定形である

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\log(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)'}{(\log(x+1))'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{x+1}}=1.$$

(2) $1-\cos 0=e^0-1=0$ より $0/0$ 型の不定形である．

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(e^x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x}=\frac{0}{e^0}=\frac{0}{1}=0$$

(3) 分母，分子 に $\overbrace{x=1}^{を代入すると}$ $0/0$ 型の不定形である，

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\log x)'}{\{(x-1)^2\}'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)}.$$

$1-\frac{1}{x}$ と $2(x-1)$ に $x=1$ を代入すると，$0/0$ 型の不定形となる

ロピタルの定理を用いて，

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\{1-\frac{1}{x}\}'}{2\{(x-1)\}'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\log x}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}.$$

(4) 分母・分子に $x=0$ を代入すると $0/0$ 型の不定形となる

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-x\cos x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}$$

分母・分子に $x=0$ を代入すると $0/0$ 型の不定形となる

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x+x\sin x)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x+x\cos x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{2+\frac{x\cos x}{\sin x}\right\}=2+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x=2+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x$$

$=2+1=3.$　　ここで、定理3.1.2 (iii), (iv), 命題3.1.3を用いた。

(5) $\sin^{-1}0=\sin 0=0$ より $0/0$ 型の不定形となる。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^{-1}x)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x}=1.$$

(6) $\tan\pi=\sin 2\pi=0$ より $0/0$ 型の不定形となる。

$$\therefore\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}.$$

ロピタルの定理を用いなくても解ける。もちろん

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{(\tan x)'}{(\sin 2x)'}=\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}.$$

● 8.2 ∞/∞ 型の不定形

$\boxed{問1}$ (1) $\sqrt{x}\log x=\dfrac{\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ として $x\to+0$ のとき $\dfrac{-\infty}{\infty}$ の不定形となる。

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}}=-\lim_{x\to+0}\sqrt{x}=0$$

(2) $\log\cos\frac{\pi}{2}=\log 0=-\infty,\ \tan\frac{\pi}{2}=\infty$ より ∞/∞ の不定形となる。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\log\cos x}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(\log\cos x)'}{(\tan x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin x\cos x$$

$=0$

(3) $\sin x \log x = \dfrac{\log x}{\frac{1}{\sin x}}$ として $x=0$ を代入すると $-\infty/\infty$ の不定形である

$$\lim_{x\to+0} \sin x \log x = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to+0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to+0} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

(4) $-\infty/\infty$ の不定形である

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(5) ∞/∞ の形である

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^3)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(6x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0.$$

(6) $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$ より (5) と同様にすると

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

第9章 9.1 テイラーの定理.

9.2 関数の近似値

$\boxed{\text{問1}}$ 定理5.1.1 (ii) より $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ を用いてもよい.

$f(x) = \cos x$ として

(1) $f'(x) = -\sin x,\quad f''(x) = -\cos x,\quad f^{(3)}(x) = \sin x,\quad f^{(4)}(x) = \cos x,\quad f^{(5)}(x) = -\sin x$

(2) $f'(0) = 0,\quad f''(0) = -1,\quad f^{(3)}(0) = 0,\quad f^{(4)}(0) = 1.$

(3) $f(b) = f(0) + f'(0)b + \frac{1}{2}f''(0)b^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)b^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)b^4 + R_5$

$= 1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{24} + R_5.\qquad R_5 = \frac{1}{5!}f^{(5)}(c)b^5 = \frac{-\sin c}{120}b^5.$

(4) $b=0.3$ のとき $b^5 = \left(\frac{3}{10}\right)^5 = \frac{243}{10^5}$ 　　$-\sin c > -1$.

$$R_5 = \frac{-\sin c}{120} \times \frac{243}{10^5} > \frac{-1}{10^6} \cdot \frac{81}{4} = -0.0000\dot{2}02\dot{5}$$

(5) $f(0.3) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{3}{10}\right)^4 + R_5 = 0.9553\cdots$

$\boxed{問2}$ $f(x) = \log x$ とする。

(1) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$.

(2) $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, $f^{(3)}(1) = 2$,

$f(1)=0$,

(3) $R_4 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \cdot (b-1)^4$ 　　$(1 < c < b)$

$$f(b) = (b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{2}{3!}(b-1)^3 + R_4$$
$$= (b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 + R_4, \qquad R_4 = \frac{1}{4!}\left(-\frac{6}{c^4}\right)(b-1)^4$$
$$= -\frac{1}{4c^4}(b-1)^4.$$

(4) $R_4 = -\frac{1}{4c^4}(0.3)^4 > -\frac{81}{40000} = -0.002025$

(5) $\log 1.3 = 0.3 - \frac{1}{2}(0.3)^2 + \frac{1}{3}(0.3)^3 - \frac{1}{4c^4}(0.3)^4 = 0.26\cdots$

9.3 関数の極限.

$\boxed{問1}$ $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ とおく。$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$f'(x)=0$ は $1-x^2=0$ をみたす x である。$x=\pm 1$ が極値の候補である。

$$f''(x) = \left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$$
$$= \frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$f''(1) = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} < 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$ より $x=1$ で極大. 極大値は $\frac{1}{2}$.

$f''(-1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$ より $x=-1$ で極小, 極小値は $-\frac{1}{2}$.

$\boxed{問2}$ $f(x) = ax^3 - 6x + b$, $f'(x) = 3ax^2 - 6 = 0$, $x^2 = \frac{2}{a}$ より $a>0$

で $x = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}$ が極値の候補である. $f''(x) = 6ax$ より $f''\left(\pm\sqrt{\frac{2}{a}}\right) = \pm 6a\sqrt{\frac{2}{a}}$

$f''\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\right) > 0$, $f''\left(-\sqrt{\frac{2}{a}}\right) < 0$ より $\sqrt{\frac{2}{a}}$ で極小, $-\sqrt{\frac{2}{a}}$ で極大である.

$x = \sqrt{\frac{2}{a}}$ を代入すると $a \cdot \frac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{a}} - 6\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} + 3 = 1$．$\frac{-4\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = -2$ より $a = 8$．

第10章 10.1 原始関数と不定積分

$\boxed{問1}$ (1) $\int 2\cos x\,dx = 2\int \cos x\,dx = 2\sin x + C$

(2) 定理 10.1.3 (viii) で $a=3$ とすれば,

$$\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\log 3} + C$$

(3) 定理 10.1.3 (v) より

$$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = 2\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx$

$$= 2\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\frac{2}{\tan x} - 2x + C$$

(5) $\displaystyle\int \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C$

(6) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int \left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \log|x| + C$

$\boxed{問2}$ (1) $2x=u$ として,合成関数の微分を用いると

$$\frac{d\cos 2x}{dx} = \frac{d\cos u}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{d\cos u}{du} = -2\sin u = -2\sin 2x.$$

(2) $\displaystyle -\frac{1}{2}\frac{d\cos 2x}{dx} = \sin 2x$ より $(a) = -\frac{1}{2}\cos 2x.$

(3) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$

$\boxed{問3}$ (1) $-x^2=u$ として,合成関数の微分を用いると

$$\frac{de^{-x^2}}{dx} = \frac{de^u}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{de^u}{du} = -2xe^u = -2xe^{-x^2}.$$

(2) $\displaystyle -\frac{1}{2}\frac{de^{-x^2}}{dx} = xe^{-x^2}$ より $(a) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$

(3) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$

問4 $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ である。 $ax+b=u$ とすると

$$\frac{d}{dx}F(ax+b)=\frac{d}{dx}F(u)=\frac{du}{dx}\frac{d}{du}F(u)=af(u)=af(ax+b)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{a}F(ax+b)\right\}=f(ax+b) \text{ より } \int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

10.2 置換積分による不定積分の計算

問1 (1) 例題 10.2.1 (1) を参考にする 定理10.1.3 (ix) より

$u=\frac{x}{2}$ とおくと

$$\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{dx}{du}du=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}2\,du=\sin^{-1}u+C=\sin^{-1}\frac{x}{2}+C.$$

(2) $2+3x=u$ とおくと $x=\frac{u-2}{3}$ となる。

$$\int(2+3x)^{\frac{2}{3}}dx=\int u^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{du}du=\frac{1}{3}\int u^{\frac{2}{3}}du=\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{5}{3}}}{1+\frac{2}{3}}+C$$

$$=\frac{1}{5}(2+3x)^{\frac{5}{3}}+C$$

(3) $\log x=u$ とおくと $x=e^u$ となる

$$\int\frac{\log x}{x}dx=\int\frac{u}{e^u}\frac{dx}{du}du=\int\frac{u}{e^u}e^u du=\int u\,du$$

$$=\frac{u^2}{2}+C=\frac{1}{2}(\log x)^2+C.$$

(4) 定理10.1.3 (xiii) を用いる。 $f(x)=1-2\sin x$ とすると $f'(x)=-2\cos x$

$$\int\frac{\cos x}{1-2\sin x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-2\cos x}{1-2\sin x}dx=-\frac{1}{2}\log|1-2\sin x|+C$$

(5) $3\cos x=u$ とおくと $\cos x=\frac{u}{3}$ 両辺をuで微分し

x を u の関数と考えると。 $-\frac{dx}{du}\sin x=\frac{1}{3}$.

$\dfrac{dx}{du} = \dfrac{-1}{3\sin x}$ より．

$$\int e^{3\cos x} \sin x\, dx = \int e^{u} \sin x \frac{dx}{du} du = -\frac{1}{3}\int e^{u} du = -\frac{1}{3}e^{u} + C$$

$$= -\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C.$$

$u = \tan x$ とすると $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$．逆関数の微分より

$\dfrac{dx}{du} = \cos^2 x$ である．

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sqrt{u}}{\cos^2 x}\frac{dx}{du} du = \int \frac{\sqrt{u}}{\cos^2 x}\cos^2 x\, du = \int \sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

問2　(1)　$u = 1-x^2$ として，合成関数の微分より

$$\frac{d}{dx}\left(\log|1-x^2| + C\right) = \frac{d}{dx}\log|u| = \frac{du}{dx}\frac{d}{du}\log|u| = -2x\frac{1}{u} = \frac{-2x}{1-x^2}$$

$\neq \dfrac{x+5}{1-x^2}$ より．$\log|1-x^2| + C$ は $\dfrac{x+5}{1-x^2}$ の不定積分ではない．

(2) $$\frac{x+5}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} = \frac{a+b+(b-a)x}{(1+x)(1-x)}$$

恒等式より　$a+b=5$，$b-a=1$ となるので，$a=2$, $b=3$．

$$\int \frac{x+5}{1-x^2} dx = 2\int \frac{1}{1+x} dx + 3\int \frac{1}{1-x} dx = 2\int \frac{(1+x)'}{1+x} dx$$

$$-3\int \frac{(1-x)'}{1-x} dx = 2\log|1+x| - 3\log|1-x| + C.$$

問3　(1)　$x^2-2x+10 = (x-1)^2 - 1 + 10 = (x-1)^2 + 9$

(a) $= 1$，　(b) $= 9$．

(2)　$x-1 = \sqrt{9}\,t = 3t$ とおくと　　$x = 3t+1$．

$$\int \frac{1}{x^2-2x+10} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+9} dx = \int \frac{1}{9t^2+9}\frac{dx}{dt} dt$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{t^2+1} 3\, dt = \frac{1}{3}\mathrm{Tan}^{-1} t + C = \frac{1}{3}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x-1}{3} + C$$

⑪ 10.3 三角関数と無理関数の不定積分

$\boxed{問1}$ $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{dx}{dt}\,dt$

公式 10.3.1を用いる。$t=\tan\frac{x}{2}$とすると

$$= \int \frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2}\,dt = \int \frac{2}{2(1+t)}\,dt = \int \frac{(1+t)'}{1+t}\,dt$$

$$= \log|1+t|+C = \log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$\boxed{問2}$ (1) 例題10.3.2を応用する。$\sqrt{x+1}=t$とすると

$$x=t^2-1 \qquad \frac{dx}{dt}=2t$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\,dx = \int \frac{t^2-1}{t+1}\,2t\,dt = \int 2t(t-1)\,dt$$

$$= \frac{2}{3}t^3-t^2+C = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)+C.$$

(2) 例題10.3.3を応用する。$t=\sqrt{x^2+2x+3}-x$とすると

$(t+x)^2 = t^2+2tx+x^2 = x^2+2x+3$ より $t^2+2tx=2x+3$.

$$x=\frac{t^2-3}{2-2t} \text{ より } \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\,\frac{2t(1-t)+(t^2-3)}{(1-t)^2}=\frac{-3+2t-t^2}{2(1-t)^2}$$

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx = \int \frac{\frac{t^2-3}{2-2t}-3}{t+\frac{t^2-3}{2-2t}}\,\frac{-3+2t-t^2}{2(1-t^2)^2}\,dt$$

$$= \int \frac{t^2-3-6+6t}{2t-2t^2+t^2-3}\,\frac{-3+2t-t^2}{2(1-t)^2}\,dt = \int \frac{t^2+6t-9}{2(1-t)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2+6t-9}{t^2-2t+1}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{8t-10}{t^2-2t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{4(2t-2)}{t^2-2t+1}-\frac{2}{t^2-2t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\int \left(1+4\frac{(2t-2)}{t^2-2t+1}-\right.$$

$$\frac{2}{(t-1)^2}\Big)dt = \frac{1}{2}t + 2\log|t^2-2t+1| + (t-1)^{-1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right) + 2\log\left|2x^2+4x+4-2\sqrt{x^2+2x+3}\,(x+1)\right|$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}-x-1} + C.$$

(3) 例題 10.3.4 を応用する

$2+x-x^2 = (2-x)(1+x)$ より $t = \sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}$ とおくと

$t^2(x+1) = 2-x$ より $x = \dfrac{2-t^2}{t^2+1}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{-6t}{(t^2+1)^2}$. また,

$\sqrt{2+x-x^2} = \sqrt{(2-x)(1+x)} = \sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}\,(x+1) = t\,(x+1)$ に注意して,

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}\,dx = \int \frac{-6}{\left(1+\frac{2-t^2}{t^2+1}\right)^2}\,\frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \int -\frac{2}{3}\,dt$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + C.$$

10.4 部分積分による不定積分の計算

問1 (1) $\int xe^x\,dx = xe^x - \int (x)'e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$

$$= xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

(2) $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int (x')\sin x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

(3) $\dfrac{d}{dx}\cos 3x = -3\sin 3x$ より $\int \sin 3x = -\dfrac{1}{3}\cos 3x + C.$

$$\int x\sin 3x\,dx = -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\int (x)'\cos 3x\,dx$$

$$= -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx = -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C$$

(4) $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$

$$= x^2e^x - 2\left\{xe^x - \int (x)'e^x\,dx\right\} = x^2e^x - 2\left\{xe^x - \int e^x\,dx\right\}$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

(5) $$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2}\int x^2 (\log x)' \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2}\int x \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C.$$

(6) $$\int \log x \, dx = \int 1x \log x \, dx = x \log x - \int x (\log x)' dx$$

$$= x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x + C.$$

$\boxed{問2}$ $I = \int e^x \sin x \, dx$ とする。

$$I = e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$= e^x \sin x - \left\{ e^x \cos x - \int e^x (\cos x)' dx \right\}$$

$$= e^x \sin x - \left\{ e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right\} = e^x(\sin x + \cos x) - I$$

$$I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$$

$\boxed{問3}$ (1) $\frac{d}{dx} \sin 3x = 3 \cos 3x$, $\frac{d}{dx} \cos 3x = -3 \sin 3x$ より

$$\sin 3x = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3} \cos 3x\right) \quad \cos 3x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3} \sin 3x\right)$$

(2) $$\frac{d}{dx} e^{2x} = \frac{d}{dx}(e^x \cdot e^x) = 2(e^x)' e^x = 2e^{2x}.$$

(3) $$I = \int e^{2x} \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \, e^{2x} + \frac{1}{3} \int \cos 3x \, (e^{2x})' dx$$

$$= -\frac{1}{3} \cos 3x \, e^{2x} + \frac{2}{3} \int \cos 3x \, e^{2x} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \cos 3x \, e^{2x} + \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{3} \overbrace{\sin 3x}^{e^{2x}} - \frac{1}{3} \int \sin 3x \cdot 2e^{2x} \, dx \right\}$$

$$= -\frac{1}{3} \cos 3x \, e^{2x} + \frac{2}{9} \overbrace{\sin 3x}^{e^{2x}} - \frac{4}{9} I$$

$$\left(1 + \frac{4}{9}\right) I = \frac{13}{9} I = -\frac{1}{3} \cos 3x \, e^{2x} + \frac{2}{9} \sin 3x \, e^{2x}$$

$$I = \frac{1}{13} (-3 \cos 3x + 2 \sin 3x) e^{2x} + C$$

問4 $\int \sin^{-1}x\,dx = \int 1\times\sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x - \int x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. $1-x^2=t$ とおいて置換積分してもよい。

$\int \sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$.

第11章 11.1 定積分の定義

問1 (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \tan\frac{\pi}{6} - \tan 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$

(4) $\displaystyle\int_0^1 e^x(1+e^{-x})\,dx = \int_0^1 (e^x+1)\,dx = \left[e^x + x\right]_0^1 = e + 1 - e^0 = e$

(5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+x}{x}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+1\right)dx = \left[\log x + x\right]_1^2 = \log 2 + 2 - 1 = \log 2 + 1$

(6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1-1+2\sin^2 x}\,dx = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$

$\displaystyle = \sqrt{2}\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sqrt{2}\left(-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$

問2 (1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\sin 3x = 3\cos 3x$

(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right) = \cos 3x$ (a) $= \frac{1}{3}\sin 3x$,

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\left[\sin 3x\right]_0^{\pi} = 0$

問3 (1) $\displaystyle\frac{d\,e^{-x^2}}{dx} = -2x\,e^{-x^2}$

(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) = x\,e^{-x^2}$, (a) $= -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

11.2 置換積分による定積分の計算

問1 (1) $t = \frac{x}{2}$ とおくと，t の範囲 は

x	$0 \to 1$
t	$0 \to \frac{1}{2}$

$\displaystyle\frac{dx}{dt} = 2$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,2\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \left[\sin^{-1} t\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1}0 = \frac{\pi}{6}$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(3x+1)'}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\left[\log|3x+1|\right]_0^1 = \frac{1}{3}(\log 4 - \log 0)$

$= \frac{1}{3}\log 4 = \frac{2}{3}\log 2$

$t = 3x+1$ とおくと t の範囲は $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & 1 \to 4 \end{array}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$

$\int_0^1 \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\left[\log|t|\right]_1^4 = \frac{1}{3}\log 4.$

(3) $\pi x^2 = t$ とおくと, t の範囲は $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & 0 \to \pi \end{array}$. $\frac{dt}{dx} = 2\pi x$

または $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\pi x}$

$\therefore \int_0^1 x\sin\pi x^2\,dx = \int_0^\pi x \sin t \frac{1}{2\pi x}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt$

$= \frac{1}{2\pi}\left[-\cos t\right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{1}{\pi}$

(4) $x = 3\sin t$ とすると, t の範囲は $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 3 \\ \hline t & 0 \to \frac{\pi}{2} \end{array}$, $\frac{dx}{dt} = 3\cos t$

$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{9(1-\sin^2 t)} \cdot 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$

$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\,dt = \frac{9}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9}{4}\pi$

(5) $t = 2 - \cos x$ とおくと, $\begin{array}{c|c} x & 0 \to \pi \\ \hline t & 1 \to 3 \end{array}$ $\frac{dt}{dx} = \sin x$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sin x}$

$\int_0^\pi \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx = \int_1^3 \frac{\sin x}{t}\frac{1}{\sin x}\,dt = \int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \left[\log t\right]_1^3$

$= \log 3$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin x}{t}\frac{1}{-\sin x}\,dt = -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t\,dt$

$t = \cos x$ とおくと $\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\pi}{4} \\ \hline t & 1 \to \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$ $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ より $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sin x}$

$$= -\left[\log|t|\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \log\sqrt{2}.$$

$\boxed{問2}$ (1) $\dfrac{d}{dx}\log|x^2+3x+2| = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}$ より

$\log|x^2+3x+2|$ は原始関数でない。

(2) $\dfrac{x+4}{x^2+3x+2} = \dfrac{x+4}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2} = \dfrac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$

分子は $x+4 = (a+b)x+2a+b$. 恒等式より

$a+b=1,\ 2a+b=4.\quad a=3,\ b=-2.$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+4}{x^2+3x+2}\,dx = \int_0^1\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+2}\right)dx = \left[3\log|x+1| - 2\log|x+2|\right]_0^1$

$= 3\log 2 - 2\log 3 + 2\log 2 = 5\log 2 - 2\log 3.$

$\boxed{問3}$ (1) $\dfrac{d}{dx}\log|x^2+2x+5| = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+5} \neq \dfrac{6x+2}{x^2+2x+5}$

より $\log|x^2+2x+5|$ は不定積分ではない。

$$\frac{6x+2}{x^2+2x+5} = \frac{a(x^2+2x+5)'}{x^2+2x+5} + \frac{b}{x^2+2x+5}$$

$6x+2 = 2ax+2a+b$ 恒等式より $6=2a,\ 2=2a+b.$

$a=3,\ b=-4$ より

$$\int_{-1}^1 \frac{6x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \int_{-1}^1 \left\{3\frac{(x^2+2x+5)'}{x^2+2x+5} - \frac{4}{x^2+2x+5}\right\}dx$$

$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$ より $\dfrac{4}{x^2+2x+5} = \dfrac{4}{(x+1)^2+4} = \dfrac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$

$t = \dfrac{x+1}{2}$ と $\dfrac{dx}{dt} = 2$

$$\int_{-1}^1 \frac{6x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \int_{-1}^1\left(3\frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\right)dx$$

$$= 3\left[\log|x^2+2x+5|\right]_{-1}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$= 3\log 8 - 3\log 5 - 2\left[\mathrm{Tan}^{-1} t\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 3\log 8 - 3\log 5 - 2\left(\mathrm{Tan}^{-1} 1 - 2\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}\right)$

$= 3\log 8 - 3\log 4 - \frac{\pi}{2} = 3\log 2 - \frac{\pi}{2}.$

11.3 部分積分による定積分の計算

$\boxed{問1}$ (1) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \left[x\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx = -\left[-\cos x\right]_0^{\pi} =$

$= \cos\pi - \cos 0 = -2.$

(2) $\int_0^1 x^2 e^x\,dx = \left[x^2e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\,e^x\,dx = e - 2\left\{\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\right\}$

$= e - 2\left\{e - \left[e^x\right]_0^1\right\} = e - 2.$

(3) $\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx = I.$ $I = \left[e^x\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$

$= -e^{\pi} - 1 + \left[e^x\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx = -e^{\pi} - 1 - I$

$2I = -(1+e^{\pi})$ より $I = -\frac{1}{2}(1+e^{\pi})$

(4) $\int_1^e x^2\log x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e$

$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$

(5) $\int_1^e \log x\,dx = \int_1^e 1\times\log x\,dx = \left[x\log x\right]_1^e - \int_1^e 1\,dx = e - \left[x\right]_1^e$

$= 1.$

(6) $I = \int_0^{\pi} e^{-x}\cos 2x\,dx = \left[-e^{-x}\cos 2x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} e^{-x}\sin 2x\,dx$

$= -e^{-\pi} + 1 - 2\left\{\left[-e^{-x}\sin 2x\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} e^{-x}\cos 2x\,dx\right\}$

$I + 4I = 5I = 1 - e^{-\pi}$ より $I = \frac{1}{5}(1 - e^{-\pi}).$

$\boxed{問2}$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{Cos}^{-1}x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1\times\mathrm{Cos}^{-1}x\,dx = \left[x\,\mathrm{Cos}^{-1}x\right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$1-x^2 = t$ とおくと t の範囲は $\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{1}{2} \\ \hline t & 1 \to \frac{3}{4} \end{array}$, $\frac{dt}{dx} = -2x.$

$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2x}$ である. $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{Cos}^{-1}x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{2} + \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{x}{\sqrt{t}} \frac{-1}{2x}\,dt$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\left[2\sqrt{t}\right]_1^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{6} - \sqrt{\frac{3}{4}} + 1$

$= \frac{\pi - 3\sqrt{3} + 6}{6}$

$\boxed{問3}$ $\int_0^1 \mathrm{Tan}^{-1}x\,dx = \int_0^1 1\times\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx = \left[x\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$= \mathrm{Tan}^{-1}1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$。

第12章 12.1 被積分関数が発散する場合

$\boxed{問1}$ (1) $\frac{1}{(x-1)^2}$ は $x=1$ で発散する。 $x-1=t$ とすると $x=t+1$ より

$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x-1} + C$

$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_{1+\varepsilon}^2$

$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty$, 発散する。

(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ は $x=1$ で発散する $1-x=t$ とすると $x=1-t$

$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx = -\int \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\,dt = -\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{2}{3}} + C$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{2}{3}}\right]_0^{1-\varepsilon}$

$= -\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}} - 1\right) = \frac{3}{2}$ 収束する。

(3) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ は $x=0$ で発散する。

$\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1$

$= \frac{2}{3} - 2 + \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{2}{3}\varepsilon^{\frac{3}{2}} - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{4}{3}$ 収束する.

$\boxed{問2}$ $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ は $x=0$ で発散する

$$\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}\log x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}\log x - 4x^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[2x^{\frac{1}{2}}\log x - 4x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-4 + 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\log\varepsilon - 4\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) = -4 + 2\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\log\varepsilon$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\log\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log\varepsilon}{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{\varepsilon\to+0}(-2\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = 0$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx = -4$ 収束する。

$\boxed{問3}$ $\log x$ は $x=0$ で発散する。

$$\int \log x\,dx = \int 1\times\log x\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + C$$

部分積分より

$$\int(\log x)^2dx = (x\log x - x)\log x - \int(\log x - 1)dx$$

$$= (x\log x - x)\log x - x\log x + x + x = x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x$$

$$\int_0^1(\log x)^2dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1(\log x)^2dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(2 - \varepsilon(\log\varepsilon)^2 - 2\varepsilon\log\varepsilon + 2\varepsilon\right) = 2$$

なぜならば、

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon) = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\log\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{3}{2}}} = -2\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{\frac{1}{2}} = 0$$

より $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon(\log\varepsilon)^2 = 0$.

$\boxed{問4}$ $B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ のとき

$B(2,\frac{1}{4})=\int_0^1 x(1-x)^{-\frac{3}{4}}dx$, $1-x=t$ とすると $x=1-t$

$\int(1-x)^{-\frac{3}{4}}dx=-\int t^{-\frac{3}{4}}dt=-4t^{\frac{1}{4}}+C=-4(1-x)^{\frac{1}{4}}+C$

$\int x(1-x)^{-\frac{3}{4}}dx=x\{-4(1-x)^{\frac{1}{4}}\}-4\int(1-x)^{\frac{1}{4}}dx$

$=-4x(1-x)^{\frac{1}{4}}+\frac{16}{5}(1-x)^{\frac{5}{4}}$

$x(1-x)^{-\frac{3}{4}}$ は $x=1$ で発散する

$B(2,\frac{1}{4})=\int_0^1 x(1-x)^{-\frac{3}{4}}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}x(1-x)^{-\frac{3}{4}}dx$

$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-4x(1-x)^{\frac{1}{4}}+\frac{16}{5}(1-x)^{\frac{5}{4}}\right]_0^{1-\varepsilon}=\frac{16}{5}$

⑩ 12.2 積分範囲が無限に大きい場合

$\boxed{問1}$ (1)

$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx=\lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-3}dx=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^N$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}N^{-2}=\frac{1}{2}$ 収束する

(2) $\int_0^\infty e^{-x}dx=\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-x}dx=\lim_{N\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^N$

$=1-\lim_{N\to\infty}e^{-N}=1$ 収束する

(3) $\int_{-\infty}^0(1-x)^{-\frac{3}{2}}dx=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^0(1-x)^{-\frac{3}{2}}dx$

$=\lim_{N\to\infty}\left[2(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]_{-N}^0=2-2\lim_{N\to\infty}(1+N)^{-\frac{1}{2}}=2$

収束する。

(4) $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ より

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \lim_{N\to\infty}\Big[\log|x| - \log|x+1|\Big]_1^N$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\log\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^N = \lim_{N\to\infty}\log\left|\frac{N}{N+1}\right| + \log 2$$

$$= \lim_{N\to\infty}\log\left|\frac{1}{1+\frac{1}{N}}\right| + \log 2 = \log 2$$ 収束する。

(5) $e^x+1 = t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = e^x$ より $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{t-1}$

$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{t}\,\frac{1}{t-1}\,dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \log|t-1| - \log|t| \underbrace{=}_{+C} \log\left|\frac{t-1}{t}\right| \underbrace{=}_{+C} \log\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right| + C$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{1}{e^x+1}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\log\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|\right]_0^N$$

$$= \lim_{N\to\infty}\log\left(\frac{e^N}{e^N+1}\right) - \log\frac{1}{2} = \lim_{N\to\infty}\log\left(\frac{1}{1+e^{-N}}\right) + \log 2$$

$= \log 2$. 収束する。

(6) $\displaystyle\int x e^{-x}\,dx = -x e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x e^{-x} - e^{-x}$

$$\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N x e^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\Big[-x e^{-x} - e^{-x}\Big]_0^N$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(-N e^{-N} - e^{-N} + 1\right) = 1$$

$\displaystyle\lim_{N\to\infty} N e^{-N} = \lim_{N\to\infty}\frac{N}{e^N} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{e^N} = 0$ を用いた。

$\boxed{問2}$ $I=\int e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx$

$=-e^{-x}\cos x-\left\{-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx\right\}$

$2I=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x$ より

$\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$ となる。

$\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx=\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-x}\cos x\,dx$

$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left[e^{-x}(\sin x-\cos x)\right]_0^N=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}e^{-N}(\sin N-\cos N)$

$+\frac{1}{2}\quad=\frac{1}{2}$ 收束する

$\boxed{問3}$ $\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$

(1) $\Gamma(s+1)=\underbrace{\int_0^\infty x^s e^{-x}\,dx}_{\left(=\lim_{N\to\infty}\int_0^N x^s e^{-x}\,dx=\lim_{N\to\infty}\right.}\left[-x^s e^{-x}\right]_0^N+\int_0^\infty s\,x^{s-1}e^{-x}\,dx$

$=s\,\Gamma(s)$

$0<\lim_{N\to\infty}N^s e^{-N}=\lim_{N\to\infty}\frac{N^s}{e^N}<\lim_{N\to\infty}\frac{N^m}{e^N}=\cdots=\lim_{N\to\infty}\frac{m!}{e^N}=0$

s より大きい自然数 m について

を用いた.

(2) $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=1$

$\Gamma(5)=4\Gamma(4)=4\times 3\,\Gamma(3)=4\times 3\times 2\,\Gamma(2)=4!\,\Gamma(1)=24$

(4) $\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)=\cdots=n!\,\Gamma(1)=n!$

第13章　13.1 曲線の長さ

$\boxed{問1}$　$y = x\sqrt{x}$　$(0 \leq x \leq \frac{4}{3})$

(1) $y' = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

(2) $\int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$ より (a) $= 0$, (b) $= \frac{4}{3}$, (c) $= \sqrt{1+\frac{9}{4}x}$

(3) $1+\frac{9}{4}x = t$ とすると $\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{4}{3} \\ \hline t & 1 \to 4 \end{array}$　$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{9}$.

$$\int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \int_1^4 \sqrt{t}\cdot\frac{4}{9}\,dt = \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{27}(8-1) = \frac{56}{27}$$

$\boxed{問2}$　$y = \frac{1}{2}x^2$　$(0 \leq x \leq 1)$

(1) $y' = x$　$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ より (a) $= 0$, (b) $= 1$, (c) $= \sqrt{1+x^2}$

(2) $x = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$ とすると

$1+x^2 = 1 + \frac{1}{4}(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}) = \frac{1}{4}(t^2+2+\frac{1}{t^2}) = \frac{1}{4}(t+\frac{1}{t})^2$

(d) $= t + \frac{1}{t}$　　$x = 0$ のとき $t = 1$, (e) $= 1$

$x = 1$ のとき $t = 1+\sqrt{2}$. (f) $= 1+\sqrt{2}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})$.　(g) $= \frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})$

$\sqrt{1+x^2}\,\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}(t+\frac{1}{t})(1+\frac{1}{t^2}) = \frac{1}{4}(t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3})$

$= \frac{1}{4}(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3})$,　(h) $= \frac{1}{4}(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3})$

(3) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{4}(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3})\,dt$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2} + 2\log t - \frac{1}{2t^2}\right]_1^{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 + 2\log(1+\sqrt{2})\right.$

$\left. - \frac{1}{2(1+\sqrt{2})^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}{2}$.

$\boxed{\text{問3}}$ $x=3t^2,\ y=3t-t^3 \quad (0\leqq t\leqq 3)$

$\dfrac{dx}{dt}=6t,\ \dfrac{dy}{dt}=3-3t^2$

公式13,1,2より

$$\int_0^3 \sqrt{36t^2+9(1-t^2)^2}\,dt=3\int_0^3\sqrt{4t^2+1-2t^2+t^4}\,dt$$

$$=3\int_0^3\sqrt{(1+t^2)^2}\,dt=3\int_0^3(1+t^2)\,dt=3\left[t+\frac{t^3}{3}\right]_0^3$$

$$=3(3+9)=36.$$

13.2 回転体の体積

$\boxed{\text{問1}}$ $y=\sqrt{4-x^2}-1$

(1) 曲線Cとx軸の交点は$y=0$より $\sqrt{4-x^2}=1$

$4-x^2=1$ より $x=\pm\sqrt{3}$,

(2) 公式13.2.1より

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\pi\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)^2dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\pi\left(4-x^2+1-2\sqrt{4-x^2}\right)dx$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\pi\left(5-x^2-2\sqrt{4-x^2}\right)dx$$

$x=2\cos\theta$ とすると $\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$.

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\int\sqrt{4(1-\cos^2\theta)}\,(-2\sin\theta)\,d\theta$$

$$=-4\int\sin^2\theta\,d\theta=-4\int\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=-2\left(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right)+C$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=-4\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\pi\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)^2dx=\pi\left\{\left[5x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}-\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}\right\}$$

$$=\pi\left(6\sqrt{3}-\frac{8}{3}\pi\right)$$

問2 $\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$

$= \frac{\pi^2}{2}$.

問3 $x = t - \sin t$, $y = \sqrt{1-\cos t}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

(1) $y=0$ のとき $\cos t = 1$ より $t = 0, 2\pi$

そのとき $x = 0$ と $x = 2\pi$.

(2) $\pi \int_0^{2\pi} y^2 \, dx$

(a) $=0$, (b) $= 2\pi$, (c) $= \pi$

$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ (d) $= 1 - \cos t$

$x=0$ のとき $t=0$, $x = 2\pi$ のとき $t = 2\pi$

(e) $= 0$, (f) $= 2\pi$

$\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt$ より (g) $= \pi (1-\cos t)^2$

$\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = \pi \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$

$= \pi \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt$

$= \pi \left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}$

$= \pi \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 3\pi^2$.

第14章　14.1 速度から位置を求める計算

$\boxed{問1}$ $v(t) = 3\cos t$ [m/s]　$t=0$ のとき $x=-2$ [m]

$$x = \int_0^{3\pi} 3\cos t\,dt - 2 = 3\left[\ \sin t\ \right]_0^{3\pi} - 2 = 3(\sin 3t) - 2 = -2 \text{ [m]}$$

$\boxed{問2}$ $v(t) = te^t$ [m/s]　$t=0$ のとき $x=0$

$$x = \int_0^4 te^t\,dt = \left[te^t\right]_0^4 - \int_0^4 e^t\,dt = 4e^4 - \left[e^t\right]_0^4$$
$$= 4e^4 - e^4 + 1 = 3e^4 + 1 \text{ [m]}$$

14.2 加速度から速度を求める計算

$\boxed{問1}$ $a(t) = e^{-t}$ [m/s²]　$t=0$ で $x=1$ [m]　$v=2$ [m/s]

(1) $v(t) = \int_0^t e^{-t}\,dt + 2 = \left[-e^{-t}\right]_0^t + 2 = 3 - e^{-t}$ [m/s]

(2) $x = \int_0^2 (3 - e^{-t})\,dt + 1 = \left[3t + e^{-t}\right]_0^2 + 1 = 6 + e^{-2} - 1 + 1 = 6 + e^{-2}$ [m]

$\boxed{問2}$ $a(t) = \alpha$ [m/s²]，$t=0$ のとき $x = x_0$ [m] $v = v_0$ [m/s]

(1) $v(t) = \int_0^t a(t)\,dt + v_0 = \int_0^t \alpha\,dt + v_0 = \alpha t + v_0$ [m/s]

(2) $x(t) = \int_0^t v(t)\,dt + x_0 = \int_0^t (\alpha t + v_0)\,dt + x_0$

$$= \left[\frac{\alpha}{2}t^2 + v_0 t\right]_0^t + x_0 = \frac{\alpha}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \text{ [m]}$$