第15章 15.2 多変数関数のグラフ

問1 教科書の解答の図と同じ

問2 教科書の解答の図と同じ.

15.3 平面と球面の方程式

問1 (1) 公式 15.3.1 より

$3(x-1)+3(y+2)-(z-2)=0$ より $3x+3y-z+5=0$.

問2 $z=-2x+y+3$ より $2x-y+z-3=0$ となる. 公式15.3.1より,

1つの法線ベクトルは $(2,-1,1)$ である.

問3 公式 15.3.2 より 球の方程式は

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=16$.

問4 $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z=10$ より

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=16=4^2$. 公式 15.3.2 より

半径4, 中心 $(2,-1,1)$ の球である.

問5 $x^2+y^2+z^2+4x-2y-4z=0$ より $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3^2$.

半径3, 中心 $(-2,1,2)$ の円である。球面上の点 $(-1,3,0)$ での

接平面の法線ベクトルの1つは $(-1+2,\ 3-1,\ 0-2)=(1,2,-2)$ である.

公式 15.3.1 より $(x+1)+2(y-3)-2z=0$.

接平面の方程式は $x+2y-2z=5$.

第16章　16.1　2変数関数の極限

問1　(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)}(x+2y)=2+2=4$　存在して，極限値は4である．

(2) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とすると

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to+0}\frac{r^2\cos^2\theta+2r^2\sin^2\theta}{r}=\lim_{r\to+0}r\,(\cos^2\theta+2\sin^2\theta)=0$$

存在して，極限値は0である．

(3) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ として

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to+0}\frac{r^2(\cos^2\theta+2\sin^2\theta)}{r^2}=\cos^2\theta+2\sin^2\theta$$

(x,y) が $(0,0)$ に近づく方向により，極限値が異なるので，

極限は存在しない．

問2　$x=1+r\cos\theta$, $y=-1+r\sin\theta$ とすると

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{(x-1)^2+x(y+1)^2}{(x-1)^2+(y+1)^2}=\lim_{r\to+0}\frac{r^2\cos^2\theta+(1+r\cos\theta)r^2\sin^2\theta}{r^2}$$

$$=\lim_{r\to+0}\{\cos^2\theta+(1+r\cos\theta)\sin^2\theta\}=1$$

存在して，極限値は1である．

16.2　2変数関数の連続性

問1　(1) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ として

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{r\to+0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r}=\lim_{r\to+0}r\cos\theta\sin\theta=0=f(0,0)$$

原点で連続である

(2) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ として

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{r\to+0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\sin\theta$$

極限値が存在しないので原点で不連続.

(3) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ として

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to+0}\frac{r^2(\cos^2\theta(1-r\sin\theta)+\sin^2\theta)}{r^2}=\lim_{r\to+0}(\cos^2\theta(1-r\sin\theta)+\sin^2\theta)$$

$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\neq 0=f(0,0)$$

原点で不連続.

$\boxed{問2}$ $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+4xy+6y^2+1}$.

(1) $x^2+4xy+6y^2+1=(x+2y)^2+2y^2+1$

(a) = 2, (b) = 2.

(2) $(x+2y)^2+2y^2=-1$. 左辺は非負, 右辺は負より

この条件をみたす実数 x, y は存在しない.

(3) 分母、分子は連続である. (2)より定理 16.2.2 (iv) を用いると

$f(x,y)$ は座標平面全体で連続である。

第17章　17.1 偏導関数

$\boxed{\text{問1}}$ xに関する偏導関数はyを定数としてxで微分し，yに関しては，xを定数として，yで微分すればよい

(1) $f_x = 2x - 16x^3y + y$，$f_y = -4x^4 + x + 6y$

(2) $f(x,y) = xe^x ye^{-y}$ として $f_x = e^x ye^{-y} + xe^x ye^{-y}$
$= (1+x)ye^{x-y}$．$f_y = xe^x(1-y)e^{-y} = x(1-y)e^{x-y}$

(3) $f(x,y) = \log\dfrac{\sin y}{x^2} = \log\sin y - 2\log x$，$f_x = -\dfrac{2}{x}$
$f_y = \dfrac{\cos y}{\sin y} = \dfrac{1}{\tan y}$．

(4) $f(x,y) = \log_y x = \dfrac{\log x}{\log y}$．$f_x = \dfrac{1}{x\log y}$，$f_y = \dfrac{-\log x}{y(\log y)^2}$

(5) $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x+y}{x-y}$，$u = \dfrac{x+y}{x-y}$ として合成関数の微分より

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{d}{du}\mathrm{Tan}^{-1}u = \frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2}\frac{1}{1+u^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{d}{du}\mathrm{Tan}^{-1}u = \frac{x-y+(x+y)}{(x-y)^2}\frac{1}{1+u^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

(6) $f(x,y) = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{y}$，$u = \dfrac{x}{y}$ として，合成関数の微分より

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{d}{du}\mathrm{Sin}^{-1}u = \frac{1}{y}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{d}{du}\mathrm{Sin}^{-1}u = -\frac{x}{y^2}\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

$\boxed{\text{問2}}$ (1) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$，$u = x^2+y^2$ として合成関数の微分より

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{d}{du}\log u = 2x\frac{1}{u} = \frac{2x}{x^2+y^2},\quad f_x(1,2) = \frac{2}{5}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{d}{du}\log u = 2y\frac{1}{u} = \frac{2y}{x^2+y^2},\quad f_y(1,2) = \frac{4}{5}$$

(2) $f(x,y) = (2x+y)e^{xy}$，$f_x = 2e^{xy} + (2x+y)ye^{xy}$
$f_x(1,2) = 10e^2$，$f_y = e^{xy} + (2x+y)xe^{xy}$，$f_y(1,2) = 5e^2$．

(3) $f(x,y)=\sqrt{x^2+2y+y^2}$, $u=x^2+2y+y^2$として合成関数の微分より

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{d}{du}\sqrt{u}=2x\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+2y+y^2}},\ f_x(1,2)=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{d}{du}\sqrt{u}=(2+2y)\frac{1}{2\sqrt{u}}=\frac{1+y}{\sqrt{x^2+2y+y^2}},\ f_y(1,2)=1.$$

(4) $f(x,y)=\cos^{-1}\frac{x}{y}$, $u=\frac{x}{y}$として合成関数の微分より

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{d}{du}\cos^{-1}u=\frac{1}{y}\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}=-\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}},\ f_x(1,2)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{d}{du}\cos^{-1}u=-\frac{x}{y^2}\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}},\ f_y(1,2)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

第18章　18.1　2変数関数の全微分可能性

$\boxed{\text{問1}}$　$f(x,y)=3x^2-xy$.

(1) $f_x=6x-y$, $f_y=-x$ より $f_x(1,1)=5$, $f_y(1,1)=-1$

(2) $R(h,k)=f(1+h,1+k)-f(1,1)-f_x(1,1)h-f_y(1,1)k$

$$=3(1+h)^2-(1+h)(1+k)-2-5h+k=3h^2-hk$$

(3) $h=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$として

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{r\to+0}\frac{r^2(3\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta)}{r}=0$$

(4) 定義18.1.1より $f(x,y)$は$(x,y)=(1,1)$で全微分可能である.

$\boxed{\text{問2}}$

(1) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$　$f_x(0,0)=0$で存在する

(2) $\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0-0}{k}=0$　$f_y(0,0)=0$で存在する

(3) $\displaystyle R(h,k)=f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k=\frac{h^2k}{h^2+k^2}$

(4) $h=r\cos\theta$, $k=r\sin\theta$として

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{r\to+0}\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^3}=\cos^2\theta\sin\theta$$

極限は存在しない。　(5) $f(x,y)$は$(x,y)=(0,0)$で全微分可能ではない.

18.2 グラフの接平面

$\boxed{問1}$ $f(x,y)=x^2+y^2$

(1) $f_x = 2x, \quad f_y = 2y$

(2) $f_x(1,2)=2, \quad f_y(1,2)=4$

(3) 性質 18.2.1 より 接平面の方程式は

$z = 2(x-1)+4(x-2)+5$, より $2x+4y-z=5$.

$\boxed{問2}$ $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+2}$

$$f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+2}}, \quad f_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+2}}$$

$f(1,1)=2$, $f_x(1,1)=\frac{1}{2}$, $f_y(1,1)=\frac{1}{2}$, 平面の方程式は

$z=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)+2$ より $x+y-2z+2=0$

$\boxed{問3}$ $z=f(x,y)=e^{x^3+3xy-y^3}$

$f_x=(3x^2+3y)e^{x^3+3xy-y^3}$, $f_y=(3x-3y^2)e^{x^3+3xy-y^3}$

$f(1,1)=e^3$, $f_x(1,1)=6e^3$, $f_y(1,1)=0$, 平面の方程式は

$z=6e^3(x-1)+e^3$ より $6e^3x-z-5e^3=0$.

第19章　19.1 合成関数の微分公式：2変数関数と1変数関数の合成.

$\boxed{\text{問1}}$　$f(x,y)=x^2+y^2$,　$x=2\cos t$,　$y=3\sin t$

(1)　$f_x=2x$,　$f_y=2y$

(2)　$x_t=-2\sin t$,　$y_t=3\cos t$　，定理 19.1.1 より，

$$\frac{d}{dt}f(2\cos t, 3\sin t)=2x(-2\sin t)+2y\cdot 3\cos t=10\sin t\cos t$$
$$=5\sin 2t$$

(3)　$\dfrac{d}{dt}f(2\cos t, 3\sin t)=\dfrac{d}{dt}(4\cos^2 t+9\sin^2 t)$

$=-8\sin t\cos t+18\sin t\cos t=10\sin t\cos t=5\sin 2t.$

$\boxed{\text{問2}}$　$f(x,y)=\dfrac{3x-y}{x+2y}$,　$x=e^t$,　$y=e^{-t}$

$$f_x=\frac{3(x+2y)-(3x-y)}{(x+2y)^2}=\frac{7y}{(x+2y)^2},\quad f_y=\frac{-(x+2y)-2(3x-y)}{(x+2y)^2}=\frac{-7x}{(x+2y)^2}$$

$x_t=e^t$,　$y_t=-e^{-t}$

$$\frac{d}{dt}f(e^t, e^{-t})=\frac{7e^{-t}}{(e^t+2e^{-t})^2}\cdot e^t+\frac{-7e^t}{(e^t+2e^{-t})}(-e^{-t})=\frac{14e^{2t}}{(e^{2t}+2)^2}$$

$\boxed{\text{問3}}$　$\dfrac{d}{dt}f(t^2, 2-3t)=\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)\dfrac{d}{dt}t^2+\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)\dfrac{d}{dt}(2-3t)$

$=2tf_x(t^2,2-3t)-3f_y(t^2,2-3t)$

$t=1$とすると

$$\frac{d}{dt}f(1,-1)=2\cdot f_x(1,-1)-3f_y(1,-1)=4-3=1.$$

$\boxed{\text{問4}}$　注意 19.1.2 より

$$\frac{1}{2}f_x(2,3)+\frac{\sqrt{3}}{2}f_y(2,3)=1+3=4.$$

◎ 19.2 合成関数の偏微分公式：2変数関数と2変数関数の合成

問1 (1) $\frac{\partial}{\partial u} f(u+v, \frac{v}{u}) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} = f_x(x, y) - \frac{v}{u^2} f_y(x, y)$

$= f_x(u+v, \frac{v}{u}) - \frac{v}{u^2} f_y(u+v, \frac{v}{u})$

(2) $\frac{\partial}{\partial v} f(u+v, \frac{v}{u}) = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} = f_x(x, y) + \frac{1}{u} f_y(x, y)$

$= f_x(u+v, \frac{v}{u}) + \frac{1}{u} f_y(u+v, \frac{v}{u})$

問2 (1) $\frac{\partial}{\partial u} f(u^2-v^2, 2uv) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} = 2u f_x(x, y) + 2v f_y(x, y)$

$= 2u f_x(u^2-v^2, 2uv) + 2v f_y(u^2-v^2, 2uv)$

(2) $\frac{\partial}{\partial v} f(u^2-v^2, 2uv) = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} = -2v f_x(x, y) + 2u f_y(x, y)$

$= -2v f_x(u^2-v^2, 2uv) + 2u f_y(u^2-v^2, 2uv)$

第20章 20.1 偏微分の順序

問1 (1) $f(x,y)=x^5+3x^4y^2+4xy^3+y^4$

$f_x=5x^4+12x^3y^2+4y^3$, $f_y=6x^4y+12xy^2+4y^3$

$f_{xx}=20x^3+36x^2y^2$, $f_{xy}=24x^3y+12y^2$, $f_{yx}=24x^3y+12y^2$

$f_{yy}=6x^4+24xy+12y^2$.

(2) $f(x,y)=e^{x^3y^2}$, $f_x=3x^2y^2e^{x^3y^2}$, $f_y=2x^3ye^{x^3y^2}$

$f_{xx}=6xy^2e^{x^3y^2}+9x^4y^4e^{x^3y^2}=3xy^2(2+3x^3y^2)e^{x^3y^2}$

$f_{xy}=6x^2ye^{x^3y^2}+6x^5y^3e^{x^3y^2}=6x^2y(1+x^3y^2)e^{x^3y^2}$.

$f_{yy}=2x^3e^{x^3y^2}+4x^6y^2e^{x^3y^2}=2x^3(1+2x^3y^2)e^{x^3y^2}$

(3) $f(x,y)=\log(x+y)$, $f_x=\dfrac{1}{x+y}$, $f_y=\dfrac{1}{x+y}$

$f_{xx}=\dfrac{-1}{(x+y)^2}$, $f_{xy}=\dfrac{-1}{(x+y)^2}$, $f_{yy}=\dfrac{-1}{(x+y)^2}$

(4) $f(x,y)=\cos^{-1}\dfrac{y}{x}$.

$f_x=\dfrac{-1}{\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=\dfrac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$, $f_y=\dfrac{-1}{\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

$f_{xx}=-\dfrac{y\left(\sqrt{x^2-y^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)}{x^2(x^2-y^2)}=-\dfrac{y(2x^2-y^2)}{x^2(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$f_{xy}=\dfrac{1}{x}\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x^2-y^2}=\dfrac{x^2}{x(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}=f_{yx}$

$f_{yy}=\dfrac{-2y}{2(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{-y}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

問2 (1) $f(x,y)=x^2+xy+y^2$; $f_x=2x+y$ $f_{xx}=2$

$f_y=x+2y$ $f_{yy}=2$. $f_{xx}+f_{yy}=4\neq0$ より, 調和関数でない。

(2) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$, $f_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $f_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$

$f_{xx}=\dfrac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{yy}=\dfrac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

$f_{xx}+f_{yy}=0$ より，調和関数である．

(3) $f(x,y)=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$, $f_x=\dfrac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $f_y=\dfrac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$f_{xx}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{yy}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$. $f_{xx}+f_{yy}=0$ より，調和関数である．

(4) $f(x,y)=e^x\cos y$, $f_x=e^x\cos y$, $f_y=-e^x\sin y$

$f_{xx}=e^x\cos y$, $f_{yy}=-e^x\cos y$. $f_{xx}+f_{yy}=0$ より，調和関数である．

$\boxed{問3}$ (1) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0$ より，$f_x(0,0)=0$

(2) $\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0-0}{k}=0$ より，$f_y(0,0)=0$

(3) $f_x=\dfrac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-xy(x^2-y^2)\cdot2x}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$

$f_y=\dfrac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-xy(x^2-y^2)\cdot2y}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{k\to0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{-k}{k}=-1=f_{xy}(0,0)$

(5) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1=f_{yx}(0,0)$

◎ 20.2 合成関数の2階微分

$\boxed{問1}$ (1) $\dfrac{d}{dt}f(e^t,t^2)=\dfrac{d}{dt}e^t\times f_x(x,y)+\dfrac{d}{dt}t^2f_y(x,y)$

$=e^tf_x(e^t,t^2)+2tf_y(e^t,t^2)$

(2) $\dfrac{d^2}{dt^2}f(e^t,t^2)=\dfrac{d}{dt}\{e^tf_x(e^t,t^2)+2tf_y(e^t,t^2)\}$

$=e^tf_x(e^t,t^2)+e^t\{e^tf_{xx}(e^t,t^2)+2tf_{xy}(e^t,t^2)\}$

$+2f_y(e^t,t^2)+2t\{e^tf_{yx}(e^t,t^2)+2tf_{yy}(e^t,t^2)\}$

$$= e^t f_x(e^t,t^2) + e^{2t} f_{xx}(e^t,t^2) + 4te^t f_{xy}(e^t,t^2)$$
$$+ 2f_y(e^t,t^2) + 4t^2 f_{yy}(e^t,t^2)$$

$\boxed{問2}$ $x=2t+1,\ y=1-t$ とする.

(1) $\dfrac{d}{dt} f(2t+1,1-t) = 2f_x(2t+1,1-t) - f_y(2t+1,1-t)$

(2) $\dfrac{d^2}{dt^2} f(2t+1,1-t) = \dfrac{d}{dt}\{2f_x(2t+1,1-t) - f_y(2t+1,1-t)\}$

$$= 2\{2f_{xx}(2t+1,1-t) - f_{xy}(2t+1,1-t)\} - \{2f_{yx}(2t+1,1-t)$$
$$- f_{yy}(2t+1,1-t)\} = 4f_{xx}(2t-1,1-t) - 4f_{xy}(2t+1,1-t)$$
$$+ f_{yy}(2t+1,1-t)$$

$\boxed{問3}$ $x=u^2-v^2,\ y=2uv$ とする.

(1) $\dfrac{\partial}{\partial u} f(u^2-v^2,2uv) = \dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot f_x + \dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot f_y$

$$= 2u f_x(u^2-v^2,2uv) + 2v f_y(u^2-v^2,2uv)$$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial v} f(u^2-v^2,2uv) = \dfrac{\partial x}{\partial v} f_x + \dfrac{\partial y}{\partial v} f_y$

$$= -2v f_x(u^2-v^2,2uv) + 2u f_y(u^2-v^2,2uv)$$

(3) $\dfrac{\partial^2}{\partial v\partial u} f(u^2-v^2,2uv) = \dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\dfrac{\partial x}{\partial u} f_x + \dfrac{\partial y}{\partial u} f_y\right\}$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\{2u f_x + 2v f_y\} = 2u\left\{\frac{\partial x}{\partial v} f_{xx} + \frac{\partial y}{\partial v} f_{xy}\right\}$$
$$+ 2f_y + 2v\left\{\frac{\partial x}{\partial v} f_{yx} + \frac{\partial y}{\partial v} f_{yy}\right\}$$
$$= 2u\{-2v f_{xx} + 2u f_{xy}\} + 2f_y + 2v\{-2v f_{yx} + 2u f_{yy}\}$$
$$= -4uv f_{xx} + 4(u^2-v^2) f_{xy} + 4uv f_{yy} + 2f_y$$

(4) $\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(u^2-v^2, 2uv) = \frac{\partial}{\partial u}\{2u f_x + 2v f_y\}$

$= 2f_x + 2u\{2u f_{xx} + 2v f_{xy}\} + 2v\{2u f_{yx} + 2v f_{yy}\}$

$= 2f_x + 4u^2 f_{xx} + 8uv f_{xy} + 4v^2 f_{yy}$

$\frac{\partial^2}{\partial v^2} f(u^2-v^2, 2uv) = \frac{\partial}{\partial v}\{-2v f_x + 2u f_y\}$

$= -2f_x - 2v\{-2v f_{xx} + 2u f_{xy}\} + 2u\{-2v f_{yx} + 2u f_{yy}\}$

$= -2f_x + 4v^2 f_{xx} - 8uv f_{xy} + 4u^2 f_{yy}$

$\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(u^2-v^2, 2uv) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} f(u^2-v^2, 2uv) = 4(u^2+v^2)(f_{xx} + f_{yy})$

$\boxed{問4}$ $r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ r_{xx} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\theta_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \ \theta_y = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial r}{\partial x} f_r + \frac{\partial \theta}{\partial x} f_\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_r + \frac{-y}{x^2+y^2} f_\theta$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot f_r + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{rr} + \frac{-y}{x^2+y^2} f_{r\theta}\right\}$

$+ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} f_\theta + \frac{-y}{x^2+y^2}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{\theta r} - \frac{-y}{x^2+y^2} f_{\theta\theta}\right\}$

$\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial r}{\partial y} f_r + \frac{\partial \theta}{\partial y} f_\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} f_r + \frac{x}{x^2+y^2} f_\theta$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} f_r + \frac{x}{x^2+y^2} f_\theta\right\} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} f_r$

$+ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left\{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{rr} + \frac{x}{x^2+y^2} f_{r\theta}\right\} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} f_\theta$

$+ \frac{x}{x^2+y^2}\left\{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} f_{\theta r} + \frac{x}{x^2+y^2} f_{\theta\theta}\right\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} f_r + f_{rr} + \frac{1}{x^2+y^2} f_{\theta\theta}$$

$$= \frac{1}{r} f_r + f_{rr} + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} (f_{\theta\theta} + r^2 f_{rr} + r f_r).$$

第21章　21.1 微分演算子

$\boxed{問1}$　$f(x,y)=xy^2$ とする.

(1)　$(2\partial_x+3\partial_y)f=2f_x+3f_y=2y^2+6xy$

(2)　$(2\partial_x+3\partial_y)^2 f=4f_{xx}+12f_{xy}+9f_{yy}$

$=24y+18x$

(3)　$f_x=y^2,\ f_{xx}=0,\ f_y=2xy\ f_{xy}=2y,\ f_{yy}=2x$

$f_{yyx}=2,\ f_{yyy}=0,\ f_{xxy}=0\ \ f_{xxx}=0$

$a+b=10$ のとき $\partial_x^a\partial_y^b f=0$ より $(2\partial_x+3\partial_y)^{10}f=0.$

$\boxed{問2}$　(1)　$\dfrac{d}{dt}f(1+t,1+2t)=f_x(1+t,1+2t)+2f_y(1+t,1+2t)$

$t=0$ のとき　$f_x(1,1)+2f_y(1,1)=1$

(2)　$\dfrac{d^2}{dt^2}f(1+t,1+2t)=f_{xx}+4f_{xy}+4f_{yy}$

$t=0$ のとき　$f_{xx}(1,1)+4f_{xy}(1,1)+4f_{yy}(1,1)=0$

(3)　$\dfrac{d^3}{dt^3}f(1+t,1+2t)=f_{xxx}+2f_{xxy}+4f_{xyx}+8f_{xyy}$

$+4f_{yyx}+8f_{yyy}$

$t=0$ のとき　$f_{xxx}(1,1)+6f_{xxy}(1,1)+12f_{xyy}(1,1)+8f_{yyy}(1,1)$

$=6+12+8=26$

21.2 テイラーの定理

$\boxed{問1}$　$f(x,y)=e^x\cos 3y$ とする.

(1)　$f_x=e^x\cos 3y,\ f_y=-3e^x\sin 3y$

$f_{xx}=e^x\cos 3y,\ f_{xy}=f_{yx}=-3e^x\sin 3y,\ f_{yy}=-9e^x\cos y$

(2)　$f(0,0)=1,\ f_x(0,0)=1,\ f_y(0,0)=0.\ f_{xx}(0,0)=1$

$f_{xy}(1,1)=f_{yx}(1,1)=0,\ f_{yy}(1)=-9$

$(h, k) = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{4}{2}k^2 + \cdots$

$\boxed{問2}$ (1) $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 4y - 2$

$f_x = 2x + 2y + 2$, $f_y = 2x - 2y + 4$ $\quad f_{xx} = 2$, $f_{xy} = f_{yx} = 2$

$f_{yy} = -2$

$$f(h, k) = f(0,0) + f_x(0,0)h + f_y(0,0)k$$

$$+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)h^2 + 2f_{xy}(0,0)hk + f_{yy}(0,0)k^2\right) + \cdots$$

$$= -2 + 2h + 4k + \frac{1}{2}(2h^2 + 4hk - 2k^2) + \cdots$$

(2) $f(x, y) = \log(1 + xy)$, $f_x = \frac{y}{1+xy}$, $f_y = \frac{x}{1+xy}$

$f_{xx} = \frac{-y^2}{(1+xy)^2}$, $f_{xy} = \frac{1+xy-xy}{(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2}$, $f_{yy} = \frac{-x^2}{(1+xy)^2}$

$f(h, k) = \log 1 + f_{xy}(0,0)hk + \cdots = hk + \cdots$

$\boxed{問3}$ $f(x, y) = \sqrt{3x+y}$ とする.

(1) $f_x = \frac{3}{2\sqrt{3x+y}}$, $f_y = \frac{1}{2\sqrt{3x+y}}$, $f_{xx} = -\frac{9}{4(3x+y)^{\frac{3}{2}}}$

$f_{xy} = \frac{-3}{4(3x+y)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{yy} = \frac{-1}{4(3x+y)^{\frac{3}{2}}}$.

(2) $f(1,1) = 2$, $f_x(1,1) = \frac{3}{4}$, $f_y(1,1) = \frac{1}{4}$, $f_{xx}(1) = -\frac{9}{32}$

$f_{xy}(1,1) = \frac{-3}{32}$ $\quad f_{yy}(1,1) = \frac{-1}{32}$.

(3) $f(h, k) = 2 + \frac{3}{4}h + \frac{1}{4}k - \frac{9}{64}h^2 - \frac{3}{32}hk - \frac{1}{64}k^2 + \cdots$.

第22章　22.1 2変数関数の極値

問1　$f(x,y)=-x^2+xy-y^2$ とする

(1) $f_x=-2x+y$, $f_y=x-2y$, $f_{xx}=-2$, $f_{xy}=1$, $f_{yy}=-2$.

(2) $-2a+b=0$　$a-2b=0$ より, $a=b=0$.

(3) $\Delta=f_{xx}(0,0)\,f_{yy}(0,0)-f_{xy}(0,0)^2=4-1=3>0$

$f_{xx}(0,0)=-2<0$

定理 22.1.3 (1) より $(x,y)=(0,0)$ で極大となり, 0が極大値である.

問2　(1) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ として

$f_x=3x^2-3y$, $f_y=3y^2-3x$, $f_{xx}=6x$, $f_{xy}=-3$, $f_{yy}=6y$

$f_x=0$, $f_y=0$ より　$x^4-x=x(x^3-1)=x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=0$ のとき $y=0$, $x=1$ のとき $y=1$.

$x=0$, $y=0$ のとき

$\Delta=f_{xx}(0,0)\,f_{yy}(0,0)-f_{xy}(0,0)^2=-9<0$　極値ではない.

$x=1$, $y=1$ のとき

$\Delta=f_{xx}(1,1)\,f_{yy}(1,1)-f_{xy}(1,1)^2=36-9=27>0$

$f_{xx}(1,1)=6>0$　$(x,y)=(1,1)$ で極小となり, -1 が極小値である.

(2) $f(x,y)=e^{-(2x^2+3y^2)}$

$f_x=-4xe^{-(2x^2+3y^2)}$, $f_y=-6ye^{-(2x^2+3y^2)}$

$f_{xx}=(-4+16x^2)e^{-(2x^2+3y^2)}$, $f_{xy}=12xye^{-(2x^2+3y^2)}$

$f_{yy}=(-6+36y^2)e^{-(2x^2+3y^2)}$

$f_x=0$, $f_y=0$ は $x=y=0$.

$\Delta=f_{xx}(0,0)\,f_{yy}(0,0)-f_{xy}(0,0)^2=24>0$

$f_{xx}(0,0)=-4<0$

$(x,y)=(0,0)$ で極大となり, 1が極大値である.

$\boxed{問3}$ (1) $xyz=180$

(2) $f(x,y)=xy+2xz+2yz=xy+\dfrac{360(x+y)}{xy}$

$\left(z=\dfrac{180}{xy}\text{ より}\right)$ $\qquad =xy+\dfrac{360}{x}+\dfrac{360}{y}$

(3) $f_x=y-\dfrac{360}{x^2}$, $f_y=x-\dfrac{360}{y^2}$ $\quad f_{xx}=\dfrac{720}{x^3}$, $f_{xy}=1$, $f_{yy}=\dfrac{720}{y^3}$

(4) $b=\dfrac{360}{a^2}$, $a=\dfrac{360}{b^2}$ より $a=\dfrac{a^4}{360}$ $\quad a^3=360=3^2\cdot2^3\cdot5$

$a=2\sqrt[3]{45}$, $b=2\sqrt[3]{45}$

(5) $\Delta=f_{xx}(2\sqrt[3]{45},2\sqrt[3]{45})f_{yy}(2\sqrt[3]{45},2\sqrt[3]{45})-f_{xy}(2\sqrt[3]{45},2\sqrt[3]{45})^2$

$=4-1=3>0$.

$f_{xx}(2\sqrt[3]{45},2\sqrt[3]{45})=2>0$.

$(a,b)=(2\sqrt[3]{45},2\sqrt[3]{45})$ で極小となる.

$f(a,b)=4(45)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{360}{\sqrt[3]{45}}=\dfrac{540}{\sqrt[3]{45}}$ が最小の面積である.

④ 22.2. 条件付き極値.

$\boxed{問1}$ $g(x,y)=xy-1=0$, $f(x,y)=x^2+y^2$ とする.

(1) $f_x=2x$, $f_y=2y$, $f_{xx}=2$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=2$.

(2) $g_x=y$, $g_y=x$, $g_{xx}=0$, $g_{xy}=1$, $g_{yy}=0$

(3) $\begin{cases} ab-1=0 \\ 2a-\lambda b=0 \\ 2b-\lambda a=0 \end{cases}$ $\qquad a=\dfrac{1}{b}$ から $2a-\dfrac{\lambda}{a}=0$,

$\left(\dfrac{2}{a}-\lambda a=0\right.$.

$\lambda=2$ のとき $a=1, b=1$ または $a=-1, b=-1$.

$(a,b)=(1,1)$のとき

$\Delta=\{f_{xx}(1,1)-\lambda g_{xx}(1,1)\}g_y(1,1)^2$

$-2\{f_{xy}(1,1)-\lambda g_{xy}(1,1)\}g_x(1,1)g_y(1,1)$

$+\{f_{yy}(1,1)-\lambda g_{yy}(1,1)\}g_x(1,1)^2$

$=2+4+2=8>0$ 条件付き極小である.

$(a, b) = (-1, -1)$ のとき

$\Delta = 2 + 4 + 2 = 8 > 0$. 条件付き極小である

第23章 23.1 重積分と累次積分

$\boxed{問1}$ (1) $\int_0^3\left(\int_0^2 (x+y)\,dx\right)dy = \int_0^3\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_0^2 dy = \int_0^3 (2+2y)\,dy$

$= \left[2y+y^2\right]_0^3 = 15$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2x}\cos(2x-y)\,dy\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\sin(2x-y)\right]_0^{2x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(\cos\pi-\cos 0)=1$

(3) $x^2+y^2=t$ として x は t の関数とする. $\frac{dt}{dx}=2x$

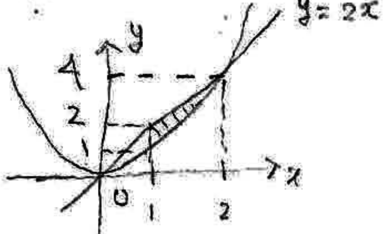
$\int x\sqrt{x^2+y^2}\,dx = \int x\sqrt{t}\,\frac{dx}{dt}\,dt = \int x\sqrt{t}\,\frac{1}{2x}\,dt$

$=\int\frac{\sqrt{t}}{2}\,dt = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+C$

$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\right)dy = \int_0^1\left[\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{1-y^2}}dy$

$=\frac{1}{3}\int_0^1(1-y^3)\,dy = \frac{1}{3}\left[y-\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$

$\boxed{問2}$ (1)

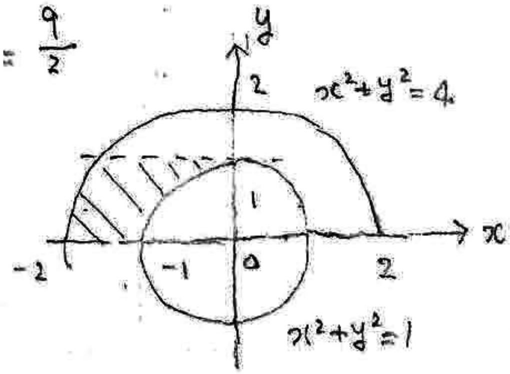


$\iint_D 2xy\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_{x^2}^{2x} 2xy\,dy\right)dx$

$=\int_1^2\left[xy^2\right]_{x^2}^{2x}dx = \int_1^2(4x^3-x^5)\,dx$

$=\left[x^4-\frac{x^6}{6}\right]_1^2 = 16-\frac{32}{3}-1+\frac{1}{6}=\frac{9}{2}$

(3)



$\iint_D 2x\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} 2x\,dx\right)dy$

$=\int_0^1\left[x^2\right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}}dy = \int_0^1\left(1-y^2-(4-y^2)\right)dy$

$$= \int_0^1 -3\,dy = \left[-3y\right]_0^1 = -3.$$

(3) $\int \log t\,dt = \int 1\times \log t\,dt = t\log t - \int dt = t\log t - t + C$

に注意する。　$u = xy$ について

$$\int \log(xy)\,dx = \int \log u \,\frac{dx}{du}\,du = \frac{1}{y}\int \log u\,du$$

$$= \frac{1}{y}(u\log u - u) + C = x\log xy - x + C.$$

$$\int_1^2\left(\int_1^2 \log(xy)\,dx\right)dy = \int_1^2 \left[x\log xy - x\right]_1^2 dy$$

$$= \int_1^2 (2\log 2y - 2 - \log y + 1)\,dy = \int_1^2 (2\log 2 + \log y - 1)\,dy$$

$$= \left[(2\log 2 - 1)y + y\log y - y\right]_1^2 = 4\log 2 - 2 + 2\log 2 - 2 - 2\log 2 + 1 + 1$$

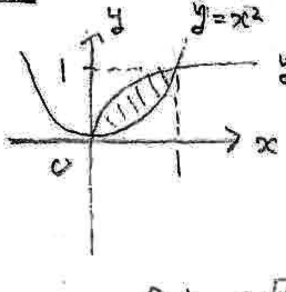
$$= 4\log 2 - 2$$

(4) $\iint_D \cos\frac{y}{x}\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}x} \cos\frac{y}{x}\,dy\right)dx$

$$= \int_1^2 \left[x\sin\frac{y}{x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}x} dx = \int_1^2 x\sin\frac{\pi}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}$$

23.2 積分の順序交換

$\boxed{問1}$ (1) $D = \{(x,y) \mid 0<x<1,\ x^2<y<\sqrt{x}\}$



(2) yの最小値は0，最大値は1である

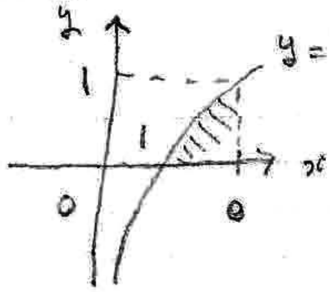
(3) $x=y^2$，$x=\sqrt{y}$ より　$y^2<x<\sqrt{y}$

より最小値はy^2，最大値は$\sqrt{y}$である

(4) $\int_0^1\left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} \sin\frac{\pi x}{\sqrt{y}}\,dx\right)dy = \int_0^1 \left[-\frac{\sqrt{y}}{\pi}\cos\frac{\pi x}{\sqrt{y}}\right]_{y^2}^{\sqrt{y}} dy$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{y}}{\pi}\cos\pi y^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{y}}{\pi}\cos\pi\right)dy = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3\pi}\sin\pi y^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3\pi}.$$

問2 (1) $D=\{(x,y)\mid 1<x<e,\ 0<y<\log x\}$



$y=\log x$ より $x=e^y$

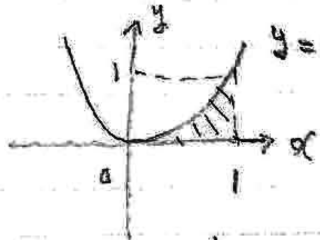
D は $e^y<x<e,\ 0<y<1$ と表示される.

$$\int_1^e\left(\int_0^{\log x}\frac{1+y}{x}\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_{e^y}^e\frac{1+y}{x}\,dx\right)dy$$

$$=\int_0^1(1+y)\Big[\log x\Big]_{e^y}^{e}\,dy=\int_0^1(1+y)(1-y)\,dy=\int_0^1(1-y^2)\,dy$$

$$=\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

(2) $D=\{(x,y)\mid \sqrt{y}<x<1,\ 0<y<1\}$



$x=\sqrt{y}$ より $y=x^2$。領域Dは

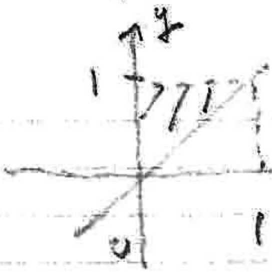
$0<x<1,\ 0<y<x^2$ と表示される

$$\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\,dx\right)dy=\int_0^1\left(\int_0^{x^2}e^{x^3}\,dy\right)dx=\int_0^1 e^{x^3}\Big[y\Big]_0^{x^2}dx$$

$$=\int_0^1 e^{x^3}\cdot x^2\,dx=\int_0^1\frac{1}{3}\left(e^{x^3}\right)'dx=\frac{1}{3}\Big[e^{x^3}\Big]_0^1=\frac{1}{3}(e-1)$$

(3) $D:=\{(x,y)\mid 0<x<y,\ 0<y<1\}$ このとき, 領域Dは

$0<x<1,\ x<y<1$ と表示される



$$I=\int_0^1\left(\int_0^y\frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2}\,dx\right)dy$$

$$=\int_0^1\left(\int_x^1\frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2}\,dy\right)dx=\int_0^1\int_x^1\left(-\frac{1}{x^2+y^2+1}\right)'dy\,dx$$

$$= -\int_0^1 \left[\frac{1}{x^2+y^2+1} \right]_x^1 dx = -\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{2x^2+1} \right) dx$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} - \frac{1}{(\sqrt{2}x)^2+1} \right) dx.$$

$u = \frac{x}{\sqrt{2}}$ とすると $\displaystyle \int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} dx = \int \frac{1}{u^2+1} \sqrt{2}\, du = \sqrt{2}\,\mathrm{Tan}^{-1} u + c$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{Tan}^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

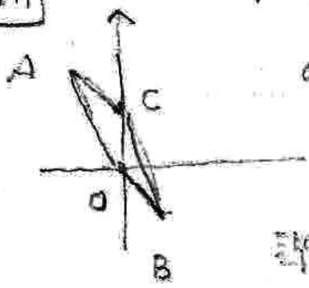
$u = \sqrt{2}x$ とすると, $\displaystyle \int \frac{1}{(\sqrt{2}x)^2+1} dx = \int \frac{1}{u^2+1} \frac{1}{\sqrt{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Tan}^{-1} u + c$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Tan}^{-1} \sqrt{2}x + c.$$

$$I = -\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Tan}^{-1} \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Tan}^{-1} \sqrt{2}y \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathrm{Tan}^{-1} \sqrt{2} - \mathrm{Tan}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

第24章　24.1 準備：平行四辺形の面積

問1　A $(-1,3)$, B $(1,-2)$, C $(0,1)$



$\vec{OA}+\vec{OB} = (-1,3)+(1,-2) = (0,1) = \vec{OC}$

OABC は平行四辺形である

準備 24.1.1 より

$|(-1)\times(-2)-3\times1| = 1.$

問2　$P(1,2)$, $Q(2,3)$, $R(0,6)$, $S(-1,5)$ のとき

$\vec{PQ} = (2-1,\ 3-2) = (1,1)$　　$\vec{PR} = (-1,\ 6-2) = (-1,4)$

$\vec{PS} = (-1-1,\ 5-2) = (-2,3)$

$\vec{PQ}+\vec{PS} = \vec{PR}$　　$|1\times3-1\times(-2)| = 5.$

より PQRS は平行四辺形である，準備 24.1.1 より

点Pを原点に平行移動したと考えればよい，

24.2 変数変換による微小面積の拡大率

問1

$$\text{ヤコビアン} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

問3

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \\ \dfrac{1}{1+v} & \dfrac{-u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{-uv-u}{(1+v)^3} = \frac{-u}{(1+v)^2}$$

問2

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{vmatrix} = u-v$$

$\boxed{問 4}$

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$\boxed{問 5}$

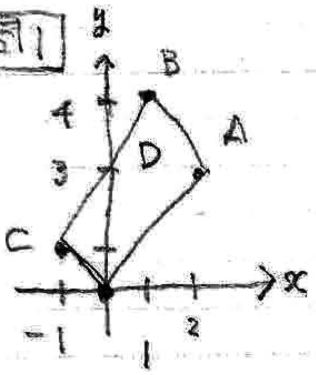
$$\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^\theta + e^{-\theta} & r(e^\theta - e^{-\theta}) \\ e^\theta - e^{-\theta} & r(e^\theta + e^{-\theta}) \end{vmatrix} = r\{(e^\theta + e^{-\theta})^2 - (e^\theta - e^{-\theta})^2\}$$

$$= 4r$$

第25章 25.1 変数変換と重積分

25.2 具体計算

問1



(1) $(x, y) = u\vec{OA} + v\vec{OC} = u(2, 3) + v(-1, 1)$

$= (2u - v,\ 3u + v)$

$0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1$

(2) $J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$

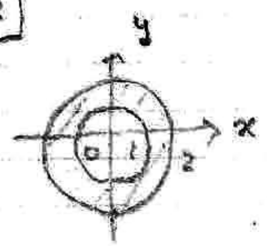
(3) $\displaystyle \iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (2u - v)(3u + v)\,5\,du\,dv$

$\displaystyle = \int_0^1 \int_0^1 5\,(6u^2 - uv - v^2)\,du\,dv = 5\int_0^1 \left[2u^3 - \frac{1}{2}u^2 v - v^2 u\right]_0^1 dv$

$\displaystyle = 5\int_0^1 \left(2 - \frac{1}{2}v - v^2\right) dv = 5\left[2v - \frac{1}{4}v^2 - \frac{v^3}{3}\right]_0^1 = 5\left(2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)$

$\displaystyle = \frac{85}{12}$

問2



(1) $1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta < 2\pi$

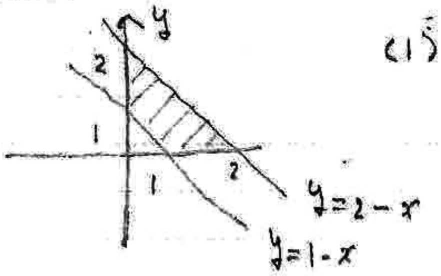
(2) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$.

$\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

(3) $\displaystyle \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi}\int_1^2 dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} [r]_1^2\,d\theta$

$\displaystyle = \int_0^{2\pi} d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi$

問13　$D := \{ (x, y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, 1 \leq x+y \leq 2 \}$



(1) $(x, y) = (u(1-v), uv)$

$x + y = u$ より　$1 \leq u \leq 2$.

$0 < \dfrac{y}{x} = \dfrac{v}{1-v}$ より　$0 \leq v \leq 1$.

(2) $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u - uv + uv = u.$

(3) $\displaystyle \iint_D e^{\frac{y}{x+y}} \, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_1^2 e^{\frac{uv}{u}} \cdot u \, du \right) dv$

$\displaystyle = \int_0^1 e^v \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2 dv = \frac{3}{2} \int_0^1 e^v \, dv = \frac{3}{2} \left[e^v \right]_0^1 = \frac{3}{2}(e-1)$

第26章 26.1 準備 2つの3次元ベクトルが作る
平行四辺形の面積

問1 準備 26.1.1 より

$$\sqrt{(2-2)^2+(1+4)^2+(-2-8)^2}=\sqrt{125+100}=5\sqrt{5}$$

問2 A(1,1,0), B(2,3,-1), C(3,1,1)

(1) $\vec{AB}=(2-1,3-1,-1)=(1,2,-1)$

(2) $\vec{AC}=(3-1,1-1,1)=(2,0,1)$

(3) 平行四辺形の半分の面積より

$$\frac{1}{2}\sqrt{4+9+16}=\frac{\sqrt{29}}{2}$$

⑲ 26.2 グラフの曲面積

問1 $z=x+\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=y^{\frac{1}{2}}$

(2) $\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+1+y}\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^1\sqrt{2+y}\,dx\right)dy$

(a) $=\sqrt{2+y}$

(3) $\int_0^1\int_0^1\sqrt{2+y}\,dx\,dy=\int_0^1\sqrt{2+y}\,dy$

$$=\left[\frac{2}{3}(2+y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$$

問2 $D = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

(2) $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{4-x^2-y^2}+\dfrac{y^2}{4-x^2-y^2}} = \sqrt{\dfrac{4}{4-x^2-y^2}}$

(a) $= \dfrac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

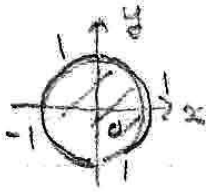
(3) $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta$ より (a) $= 0$, (b) $= 1$, (c) $= \dfrac{2r}{\sqrt{4-r^2}}$.

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-2(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 d\theta$

$\displaystyle = \int_0^{2\pi} -2(\sqrt{3}-2)\,d\theta = 4\pi(2-\sqrt{3})$

問3 $D = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, $z = \sqrt{1-y^2}$



(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

(2) $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$ より

$\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\dfrac{y^2}{1-y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

(a) $= -\sqrt{1-y^2}$, (b) $= \sqrt{1-y^2}$, (c) $= \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left[x\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy$

$\displaystyle = \int_{-1}^1 2\,dy = \left[2y\right]_{-1}^1 = 4.$

第27章 27.1 関数が1点で発散する場合

(1) $(x^2+y^2)^{-\frac{4}{5}}$ は原点で発散する。

$D := \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ として、極座標

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とすると $0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ となる

$$\iint_D (x^2+y^2)^{-\frac{4}{5}}\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 r^{-\frac{8}{5}}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{2\pi}\left[\frac{5}{2}r^{\frac{2}{5}}\right]_\varepsilon^1 d\theta = 5\pi\lim_{\varepsilon\to+0}\left(1-\varepsilon^{\frac{2}{5}}\right) = 5\pi$$

収束する

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は原点で発散する

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 1\,dr\,d\theta = 2\pi\lim_{\varepsilon\to+0}\left[r\right]_\varepsilon^1 = 2\pi$$

収束する

(3) $\log(x^2+y^2)$ は原点で発散する

$$\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 r\log r^2\,dr\,d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} 2\pi\int_\varepsilon^1 2r\log r\,dr$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} 2\pi\left\{\left[r^2\log r\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 r\,dr\right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} 2\pi\left\{-\varepsilon^2\log\varepsilon - \left[\frac{r^2}{2}\right]_\varepsilon^1\right\} = \lim_{\varepsilon\to+0} 2\pi\left\{-\varepsilon^2\log\varepsilon - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right\}$$

$= -\pi$ 　収束する。ここで、ロピタルの定理より

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^2\log\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\log\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{2}{\varepsilon^3}} = \lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) = 0$$

となることを用いた。

27.2 領域が無限に広い場合

$\boxed{\text{問1}}$ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $0 \leq r$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする

(1) $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^3} = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^n \frac{r}{(1+r^2)^3}\,dr\,d\theta$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi\left[-\frac{1}{4}(1+r^2)^{-2}\right]_0^n = -\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{(1+n^2)^{-2}-1\right\} = \frac{\pi}{2}$$

収束する。

(2) $$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^n \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\,dr\,d\theta$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi\left[\sqrt{1+r^2}\right]_0^n = \lim_{n\to\infty} 2\pi\left(\sqrt{1+n^2}-1\right) = \infty$$

発散する。

(3) $$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi}\int_0^n e^{-r}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi\left\{\left[-e^{-r}\cdot r\right]_0^n + \int_0^n e^{-r}\,dr\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi\left\{-ne^{-n} + \left[-e^{-r}\right]_0^n\right\} = \lim_{n\to\infty} 2\pi\left\{-ne^{-n} - e^{-n} + 1\right\}$$

$= 2\pi$ 収束する。 ここで，ロピタルの定理より，

$$\lim_{n\to\infty} n e^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

となることを用いた。

⑪ 27.3 ガウス積分

$\boxed{\text{問1}}$ (1)

$$I_\alpha^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx\, dy$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx\, dy$$

(2) $$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{n} e^{-\alpha r^2} r\, dr\, d\theta$$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi \int_0^n r e^{-\alpha r^2} dr = \lim_{n\to\infty} 2\pi \left[-\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha r^2}\right]_0^n$$
$$= -\frac{\pi}{\alpha} \lim_{n\to\infty} \left(e^{-\alpha n^2} - 1\right) = \frac{\pi}{\alpha}$$

ここで $\alpha > 0$ を用いた。

(3) $I_\alpha^2 = \dfrac{\pi}{\alpha}$, $I_\alpha > 0$ より $I_\alpha = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$

$\boxed{\text{問2}}$ $J = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ について

(1) $\int x^2 e^{-x^2} dx = -\dfrac{x}{2} e^{-x^2} + \dfrac{1}{2} \int e^{-x^2} dx$

(a) $= x$, (b) $= e^{-x^2}$

(2) $$\lim_{n\to\infty} n e^{-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n e^{n^2}} = 0$$

(3) $$J = \lim_{n\to\infty} \left[x \times \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right)\right]_{-n}^{n} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\boxed{問3}$ $I_\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

(1) $\frac{d}{d\alpha} I_\alpha = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}}$

(2) $\frac{d}{d\alpha} I_\alpha = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$

$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}}$ より $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(3) 問2 (3) の結果と一致する。