# 付録　Gauss の不等式

## Gauss の不等式

**定理 1**

連続型確率変数 $X$ の p.d.f. $f(x)$ が $x=0$ について対称[*2], $x>0$ で単調減少，かつ $X$ が有限な分散 $\sigma^2$ をもつとき，$a>0$ に対して $m(a)=\mathbf{P}(|X| \leqq a\sigma)$ は次をみたす。

(1) $m(a) \leqq \dfrac{2}{3}$ ならば $m(a) \geqq \dfrac{a}{\sqrt{3}}$,

(2) $m(a) > \dfrac{2}{3}$ ならば $m(a) \geqq 1-\dfrac{4}{9a^2}$

よって次の不等式が成立する。

$$\mathbf{P}(|X| \leqq k\sigma) \geqq 1-\frac{4}{9k^2}$$

**証明**. まず，$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y$ とおいて変数変換 $u=F_X(x)$ を考えると，分散 $\sigma^2$ の値は次のように計算できることに注意しよう。

$$\sigma^2=\mathbf{E}[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} (F_X^{-1}(u))^2\,\mathrm{d}u$$

$a$ を任意に固定して $u_0=F_X(a\sigma)$ とおく。関数 $F_X^{-1}(u)$ は $\frac{1}{2} \leqq u \leqq 1$ の範囲で凸であるから，この範囲のグラフは，点 $(u_0, F_X^{-1}(u_0))=(u_0, a\sigma)$ で接する直線

$$\ell_0 : x = \underbrace{(F_X^{-1}(u_0))'}_{=\frac{1}{f(a\sigma)}}(u-u_0)+a\sigma$$

の上側に位置する。直線 $\ell$ と $x=0$ の交点の $u$ 座標 $u_0^*$ は $u_0^*=u_0-a\sigma f(a\sigma)$ で与えられ，$\frac{1}{2} \leqq u_0^* \leqq u_0$ をみたす。直線 $\ell_0$ が

$$\begin{aligned}
\ell_0 : x &= \frac{u-u_0}{f(a\sigma)}+a\sigma \\
&= \frac{u-u_0^*}{f(a\sigma)}+\underbrace{\frac{u_0^*-u_0}{f(a\sigma)}+a\sigma}_{=0}
\end{aligned}$$

[*2] $f(-x)=f(x)$ ということ。

と表せることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} (F_X^{-1}(u))^2\,\mathrm{d}u &\geqq 2\int_{u_0^*}^{1}\left(\frac{u-u_0^*}{f(a\sigma)}\right)^2 \mathrm{d}u \\
&\geqq 2\int_{u_0^*}^{1}\left(\frac{u-u_0^*}{f(a\sigma)}\right)^2 \mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3(f(a\sigma))^2}(1-u_0^*)^3 = \frac{2}{3(f(a\sigma))^2}\big(1-F_X(a\sigma)+a\sigma f(a\sigma)\big)^3
\end{aligned}
$$

ここで，$F_X(a\sigma) = \mathbf{P}(X \leqq a\sigma) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X \leqq 0) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(|X| \leqq a\sigma) = \frac{1+m}{2}$ であることに注意すると，以上より

$$
\frac{2a^2\sigma^2}{3(a\sigma f(a\sigma))^2}\left(\frac{1-m}{2}+a\sigma f(a\sigma)\right)^3 \leqq \sigma^2, \quad a>0 \tag{C.1}
$$

であることが示された。これが定理の仮定をみたすような任意の p.d.f. について成り立つのである。
$a$ が固定されているとしても $a\sigma f(a\sigma)$ は $X$ の確率分布に応じて変化するが，

$$
a\sigma f(a\sigma) \leqq \int_0^{a\sigma} f(y)\,\mathrm{d}y = F_X(a\sigma) - F_X(0) = F_X(a\sigma) - \frac{1}{2} = \frac{m}{2}
$$

であるから，たかだか $(0, \frac{m}{2}]$ の区間内しか動かない。一旦，$z = a\sigma f(a\sigma)$ を (**定理の仮定をみたす p.d.f. たちのパラメータとして**) 独立変数のように考えた関数

$$
G(z) = \frac{2a^2\sigma^2}{3z^2}\left(\frac{1-m}{2}+z\right)^3, \quad 0<z\leqq\frac{m}{2}
$$

を考えてみよう。

$$
G'(z) = \frac{2a^2\sigma^2}{3z^2}\left(\frac{1-m}{2}+z\right)^2\left(1-\frac{1-m}{z}\right)
$$

であることより，$z \leqq \frac{m}{2}$ という条件がなければ $G'(z)=0 \Leftrightarrow z = 1-m$ であることに注意しよう。

(a) $m \geqq \frac{2}{3}$ $(\Leftrightarrow 0 < 1-m \leqq \frac{m}{2})$ である場合，$G(z)$ は $z = 1-m$ において最小値をとる。特に，式 (C.1) より $G(1-m) \leqq \sigma^2$ が成り立たなければならないが，これを書き換えて $m \leqq 1 - \frac{4}{9a^2}$ を得る。

(b) $m < \frac{2}{3}$ $(\Leftrightarrow 1-m > \frac{m}{2})$ のとき，$G(z)$ はその定義域の端点 $z = \frac{m}{2}$ において最小値をとる。特に，式 (C.1) から $G(\frac{m}{2}) \leqq \sigma^2$ が成り立たなければならない。これを書き換えて $m \geqq \frac{a}{\sqrt{3}}$ を得る。

□