更新日：2024.03.23

解答 (第 4 版用)

第 1 章

問 1.1 $2n^2 = m^2$ より m は偶数であることを用いる．

問 1.2 両辺を 2 乗して考える．

問 1.3 原点を O として x 軸上にない．点 P をとり，P を通り x 軸に平行な直線 ℓ を引く．点 $\mathrm{A}(a, 0)$ を通り直線 OP に平行な直線と直線 ℓ との交点 Q とすると，$\mathrm{PQ} = a$ である．点 $\mathrm{B}(b, 0)$ に対しても同様に直線 OQ に平行な直線を考える．

問 1.4 (3) を除いてすべて関数である．

問 1.5 $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$，$h(x) = x$．定義域は共に $\{x \mid x \neq 0, 1\}$．

問 1.6 (省略)

問 1.7 $y = f(x)$ をみたす x が 2 つあるとして，仮定に矛盾することを示す．

問 1.8 (省略)

問 1.9 (1) $\dfrac{3}{2}$　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) -1　(4) -4　(5) $\dfrac{1}{2}$　(6) $-\dfrac{1}{3}$

問 1.10 (省略)

問 1.11 (1) $\dfrac{\pi}{3}$　(2) $-\dfrac{\pi}{6}$　(3) $\dfrac{\pi}{4}$　(4) $\dfrac{3\pi}{4}$　(5) $\dfrac{\pi}{3}$　(6) $-\dfrac{\pi}{4}$

問 1.12 (1) $-\dfrac{\pi}{3}$　(2) $\dfrac{\pi}{3}$　(3) $\dfrac{2\pi}{3}$

問 1.13 $x = \cos y$ とおくと $\cos(\pi - y) = -\cos y$ が成り立つことによる．

第 2 章

問 2.1 (1) 5　(2) 1

問 2.2 (1) 1　(2) -1　(3) $-\infty$

問 2.3 (1) $x^n - a^n = (x-a)\times(x, a$ の多項式$)$ である．　(2) $\cos x - \cos a$ を積に直す．　(3) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a} = -\dfrac{x-a}{ax}$ を用いる．　(4) $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ を用いる．

問 2.4 定義に沿って右辺を計算する．

問 2.5 $f(x) = \tan x - x$ とおく．$f(n\pi) = -n\pi < 0$ および $x \to \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi - 0$ のとき $f(x) \to \infty$ である．

問 2.6 (1) $x = \cosh y$ とおくと $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$ をみたす．　(2) $x = \tanh y$ とおくと $e^{2y}(1-x) = 1 + x$ をみたす．

問 2.7 (1) $\dfrac{3}{4}$　(2) 3　(3) -1

問 2.8 (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) 2　(3) 2　(4) 1　(5) 0　(6) ∞

問 2.9 d を任意の正数について，(1) $n_0 > \dfrac{1}{\sqrt{d}}$ とする．　(2) $n_0 > \log d$ とする．

(3) 定理 2.16 証明の不等式 (2.6) を用い，$n_0 > \dfrac{1}{\mathrm{Arccos}\,(1-d)}$ とする．

問 2.10 $0 < a_1 < a < a_2$ とする．d を任意の正数について，

(1) $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \dfrac{|x-a|}{2\sqrt{a_1}}$ より $h = 2\sqrt{a_1}d$ とする．

(2) $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| < \dfrac{|x-a|}{a_1^2}$ より $h = a_1^2 d$ とする．

(3) $x > 0$ ならば $\log(1+x) \leqq x$ $(1 + x \leqq e^x$ より$)$ なので，$x > a$ のとき $\log x - \log a = \log\left(1 + \dfrac{x-a}{a}\right) < \dfrac{x-a}{a_1}$．よって $h = a_1 d$ とする $x < a$ のときも同様

問 2.11 (1) 上限：2 下限：1　(2) 上限：1, 下限：0　(3) 上限：$\sqrt{2}$, 下限：0
(4) 上限：1, 下限：0

問 2.12 有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ について $A = \{a_n |\ n :$ 自然数 $\}$ とすると，A の上限が極限値である．

問 2.13 (1) $\left|\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x'^2+1}\right|=\dfrac{|x+x'||x-x'|}{(x^2+1)(x'^2+1)}\leqq\dfrac{|x-x'|}{4}$ が成り立つ.

(2) $||x|-|x'||\leqq|x-x'|$ が成り立つ.

(3) $\sqrt{|x|}-\sqrt{|x'|}\leqq\dfrac{|x|-|x'|}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|x'|}}$ であるので，$|x|,|x'|\geqq R$ ならば $|\sqrt{|x|}-\sqrt{|x'|}|\leqq\dfrac{|x-x'|}{2\sqrt{R}}$ が成り立つ．一方, 定理 2.21 より区間 $[-2R,2R]$ では一様連続なので, 任意の $d>0$ について, ある $h>0$ が定まる．$h'=\min\left\{h,\dfrac{d}{2\sqrt{R}}\right\}$ をとり $|x-x'|<h'$ とすれば良い.

練習問題 2.1

1. $N\leqq a<N+1$ をみたす自然数 N をとり，$n>N+1$ のとき $\dfrac{a^n}{n!}=\dfrac{a}{1}\cdots\dfrac{a}{N}\dfrac{a}{N+1}\cdots\dfrac{a}{n}$ と考える.

2. ヒントより $h_n^2\leqq\dfrac{2}{n-1}$ が成り立つ.

3. (1) $1+\dfrac{x}{n}=1+\dfrac{p}{qn}$ であるので，$m=qn$(自然数) とおくと，$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ となる．2 項展開を用いて $\left(1\pm\dfrac{x}{n}\right)^n\geqq1\pm x$ (複号同順) を示す.

4. 定理 2.5 証明の中で a を $|b_n|$ に置き換えると $\left(1+\dfrac{|b_n|}{n}\right)^n\leqq1+\dfrac{|b_n|}{1-\frac{|b_n|}{2}}$ が成り立つことを用いる.

5. ヒントの不等式の 1 番目に $x=\dfrac{1}{n}$，2 番目に $x=\dfrac{1}{n+1}$ を代入する.

6. (1) 数学的帰納法　(2) 定理 2.5 証明の最初の等式 $(a=1)$ より $e\geqq1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{24}-\dfrac{5}{6n}$ がいえる．証明の最後の不等式の右辺は $1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}\left(1+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{4^{n-3}}\right)$ とできる.

練習問題 2.2

1. (1) 1　(2) 2

2. (1) 0　(2) 0

3. (1) 0　(2) 1　(3) 0

4. (1) $||f(x)|-|f(a)||\leqq|f(x)-f(a)|$ を用いる.

(2) $A\geqq B, A<B$ それぞれの場合に確かめる.

(3) (2) より $M(x)=\dfrac{1}{2}\big(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\big)$ と表されるので (1) を用いる．$m(x)$ も同様.

5. 任意の実数 x について x に収束する有理数列 x_n をとり，$f(x_n) = g(x_n)$ であることを用いる．

6. a が有理数：a に近づく無理数 x をとれば連続でない．ことがわかる．a が無理数：a に近づく実数 x が無理数ならば $f(x) = 0$. 有理数ならば $x = \dfrac{p}{q}$ と既約分数であらわすとき，任意の自然数 n について $q \leqq n$ をみたす有理数は有限個なので，$x \to a$ ならば $q \to \infty$ となる，よって $f(x) \to 0 = f(a)$ である．

7. $\tanh x$ の定義式より (1), (2) が得られる．

8. $\cosh x, \sinh x$ の定義式を (1),(2) の右辺に代入する．

9. 前問より $\tanh^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$ であることを用いる．

練習問題 2.3

1. ある x_0 において $f(x_0) = y_0$ とする．条件より，適当な a, b があり $0 < x < a$ と $x > b$ では $f(x) > y_0$ なので，有界区間 $[a, b]$ における最小値を考えれば良い．

2. 例えば，ある x_0 において $f(x_0) = y_0 > 0$ とする．条件より，適当な A があり $|x| > A$ では $|f(x)| < y_0$ なので，有界区間 $[-R, R]$ における最大値を考えれば良い．

3. $\displaystyle\lim_{x \to a_i + 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a_{i+1} - 0} f(x) = -\infty$ より (a_i, a_{i+1}) に 1 つ解を持つ

4. $F(x) = f(x) - x$ として，$F(x)$ に中間値の定理を用いる．

練習問題 2.4

1. (1) 1 　(2) $\dfrac{1}{2}$ 　(3) $\dfrac{2}{3}$

2. (1) 元の $\sin x$, $\tan x$ で考える．1 　(2) $\dfrac{2}{3}$ 　(3) 1

3. (1) $\dfrac{x}{n} = \dfrac{1}{x'}$ として定理 2.13 を用いる．

(2) 証明の不等式で $x = a$ とすると $1 + x \leqq \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leqq 1 + x + \dfrac{x^2}{2\left(1 - \frac{x}{2}\right)}$ がいえるので (1) を用いる．

(3) $\dfrac{e^x - 1}{x}$ に不等式を用いる．

4. (1) $\dfrac{l_n}{s_n} = \dfrac{nl_n}{ns_n} = \dfrac{nl_n}{L}$ である．　(2) $l_n = 2 \sin x_n$, $s_n = 2x_n$ である．

(3) ヒントのように n を選ぶと $\dfrac{\sin x_n}{x_n} \dfrac{x_n}{x_{n-1}} \leqq \dfrac{\sin x}{x} \leqq \dfrac{\sin x_{n-1}}{x_{n-1}} \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$ となる．

練習問題 2.5

1. 任意の $d > 0$ について $n \geqq n_0$ ならば $|a_n - a|, |b_n - b| < d$ とする．このとき，定理 2.3 証明の中の不等式より：

(1) $|a_n b_n - ab| \leqq A|b_n - b| + |b||a_n - a| < (A + |b|)d$

(2) $\displaystyle \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leqq \frac{2|b||a_n - a| + 2|a||b_n - b|}{b^2} < \frac{2(|b| + |a|)d}{b^2}.$

よって，例題 2.14 注意より収束の定義に基づいて極限式が成り立つ．

2. 連続ならば問題の極限式は明らか．もし，極限式をみたし $x = a$ で連続でない．とすると，ある $d_0 > 0$ があって，任意の $n > 0$ について $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}, |f(x_n) - f(a)| \geqq d_0$ をみたす x_n が存在するので極限式が成り立つことに反する．

3. 有界数列 $\{a_n\}$ が $|a_n| \leqq M$ ならば, 実数 a, b を $a < -M < M < b$ をみたすようにとり，区間 $[a, b]$ の部分集合を $A = \{t \in [a, b] |$ 区間 $[a, t]$ に含まれる a_n は有限個$\}$ と定義する．A の上限を a とすると，定理 2.18 より a に収束する $\{a_n\}$ の部分列が存在する．

4. 一様連続の定義より，任意の $d > 0$ についてある $h > 0$ をとれば，$|x - x'| < h$ のとき $|f(x) - f(x')| < d$. ここで，区間 (a, b) を N 等分して $\dfrac{b - a}{N} < h$ をみたすようにする．例えば，$a < c < a + \dfrac{b - a}{N}$ をみたす c をとると，任意の $x \in (a, b)$ について $|f(x) - f(c)| \leqq Nd$ と見積れる．よって $|f(x)| \leqq |f(c)| + Nd$ となり有界である．例えば，$\left(0, \dfrac{2}{\pi}\right)$ で $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ は有界であるが一様連続でない．

第3章

問 3.1 $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\dfrac{-1}{(x+h)x}$ より $-\dfrac{1}{x^2}$

問 3.2 $3x-2$

問 3.3

(1) (i) $n=1$ のときは $x'=1$ で成り立つ．(ii) $n-1$ のとき $(x^{n-1})'=(n-1)x^{n-2}$ が成り立つとすると，(iii) $(x^n)'=(x^{n-1}x)'=(x^{n-1})'x+x^{n-1}x'=nx^{n-1}$

(2) $m=-n>0$ とする．$(x^n)'=\left(\dfrac{1}{x^m}\right)'=\dfrac{0-mx^{m-1}}{(x^m)^2}=\dfrac{-m}{x^{m+1}}=nx^{n-1}$

問 3.4 (1) $9x^2(x^3+1)^2$ (2) $(2x^2+1)e^{x^2+1}$ (3) $\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$

問 3.5 (1) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}\right)$ (2) $x^{\tan x}\left(\dfrac{\log x}{\cos^2 x}+\dfrac{\tan x}{x}\right)$

(3) $2(3x^2+11x+9)(x+2)(x+3)^2$

問 3.6 $\dfrac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$

問 3.7 (1) 停留点 $x=0$ で極小値を取る．(2) 停留点 $x=0$ は極値ではない．

問 3.8 (1) 成立しない．(2) 成立する．

問 3.9 中点 $\left(\dfrac{p+q}{2},\dfrac{ap^2+aq^2}{2}\right)$，接点 $\left(\dfrac{p+q}{2},\dfrac{a(p+q)^2}{4}\right)$ で，y 軸に平行か一致する．

問 3.10 $x=-\dfrac{2}{3}\pi$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$x=\dfrac{2}{3}\pi$ で極小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

問 3.11 $x>0$ において, $f(x)=x-\sin x$ とおく．$f'(x)=1-\cos>0$, $f(0)=0$ より, $f(x)>0$. $g(x)=\sin x-(x-\dfrac{x^3}{6})$ とおく．$g''(x)=x-\sin x>0$, $g'(0)=0$ より，$g'(x)>0$. さらに，$g(0)=0$ より，$g(x)>0$

問 3.12 (1) 1 (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) 1

問 3.13 (1) $o(x^4)$ (2) $o(x^4)$ (3) $o(x^3)$

問 3.14 (1) $f'(x)=e^x$ より明らか．

(2) $(f^{(n-1)}(x))'=\left(\dfrac{(-1)^{(n-2)}(n-2)!}{x^{(n-1)}}\right)'$ を用いる．

(3) $(f^{(n-1)}(x))'=\left(\sin\left(x+\dfrac{n-1}{2}\pi\right)\right)'$ を用いる．

(4) $(f^{(n-1)}(x))' = \left(\cos\left(x + \dfrac{n-1}{2}\pi\right)\right)'$ を用いる．

問 3.15 (1) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ (2) $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

(3) $\dfrac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$ (4) $2^n e^{2x}$

問 3.16 (1) 1 (2) k が偶数のとき ∞．k が奇数のとき k (3) k

問 3.17 $(f^{(n-1)})' = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k f^{(n-1-k)} g^{(k)}\right)'$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k f^{(n-k)} g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1} f^{(n-k)} g^{(k)}$ を用いる．

問 3.18 (1) $(x+n)e^x$

(2) $x^2 \cos\left(x + \dfrac{n}{2}\pi\right) + 2nx\cos\left(x + \dfrac{n-1}{2}\pi\right) + n(n-1)\cos\left(x + \dfrac{n-2}{2}\pi\right)$

(3) $(x^2+2x)\sin\left(x + \dfrac{n}{2}\pi\right) + 2n(x+1)\sin\left(x + \dfrac{n-1}{2}\pi\right) + n(n-1)\sin\left(x + \dfrac{n-2}{2}\pi\right)$

問 3.19 n が偶数：$f^{(n)}(0) = 0$．n が奇数：$f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$

問 3.20 $F(x) = f(x) - p_n(x)$ とおくと，$F^{(k)}(a) = 0$ $(k \geq 0)$，$F^{(n+1)}(x) = 0$．平均値の定理 $\dfrac{F^{(n)}(x) - F^{(n)}(a)}{x-a} = F^{(n+1)}(c) = 0$ より，$F^{(n)}(x) = 0$．これを繰り返せば順次 $F^{(n-1)}(x) = 0, \ldots, F(x) = 0$．

問 3.21 (1) $(x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}(x-1)^3$ (2) $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16}$

問 3.22 (1) $-\dfrac{1}{2}$ (2) 1

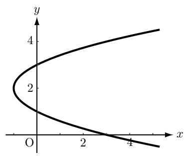
問 3.23 (1) $\dfrac{(-1)^{m+1}\sin(\theta x)}{(2m+2)!}x^{2m+2}$ (2) $\dfrac{(-1)^{m+1}\sin(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$

(3) $\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$ と $\dbinom{\alpha}{n+1}(\theta x+1)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

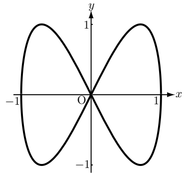
問 3.24 $\sqrt[3]{30} = 3\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{9}}$ として x^3 までの展開では 3.10725

問 3.25 $f(x) = \dfrac{2x}{\pi} - \sin x$ とおく．$f(0) = f(\dfrac{\pi}{2}) = 0$，$f''(x) = \sin x \geq 0$ より $f(x) \leq 0$

問 3.26 (1)



(2)



問 3.27 (1) 20m/sec (2) 300m

問 3.28 9m/sec^2

問 3.29 $|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}| > 0$ なら，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ の左に，$|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}| < 0$ なら右に，$|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}| = 0$ なら同じ方向にあることを用いる．運動は加速度ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ の方向に曲がる．

問 3.30 (1) $x(t) = v_0 t\cos\theta,\ y(t) = h + v_0 t\sin\theta - \dfrac{1}{2}gt^2$

(2) $t_1 = \dfrac{v_0}{g}\sin\theta,\ h_1 = h + \dfrac{{v_0}^2}{2g}\sin^2\theta$　　(3) $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{v_0}{2gh + 2{v_0}^2}}$

問 3.31 (1) $(0, 0)$　　(2) $\left(\dfrac{\pm 1}{45^{\frac{1}{4}}}, \dfrac{\pm 1}{45^{\frac{3}{4}}}\right)$　(複号同順)

問 3.32

(1) $\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{a^4}x^3,\ \beta = -\dfrac{a^2 - b^2}{b^4}y^3,\ \rho = a^2b^2\big(\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4}\big)^{\frac{3}{2}},\ \kappa = \dfrac{1}{\rho}$，縮閉線 $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$

(2) $\alpha = \dfrac{a^2 + b^2}{a^4}x^3,\ \beta = -\dfrac{a^2 + b^2}{b^4}y^3,\ \rho = a^2b^2\big(\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4}\big)^{\frac{3}{2}},\ \kappa = \dfrac{1}{\rho}$，縮閉線 $(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}$

(3) $\alpha = 3x + 2a,\ \beta = -\dfrac{y^3}{4a^2}.\ \ \rho = \dfrac{1}{4a^2}(y^2 + 4a^2)^{\frac{3}{2}},\ \kappa = \dfrac{1}{\rho}$，縮閉線 $(4a^2y)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{4}{3}a(x - 2a)$

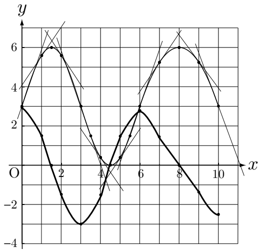
問 3.33 (1) x', x'', y', y'' を求めて公式 3.8 より答を得る．

(2) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ より r', r'' を求め，(1) より答を得る．

練習問題 3.1

1. (1) 微分可能でない．　(2) 微分可能．　(3) 微分可能でない．　(4) 微分可能でない．

2. (1) (3.2) 式に従って計算する．　(2) 接線は $y = -\dfrac{n}{a^{n+1}}(x - a) + \dfrac{1}{a^n}$．これより結果を得る．

3. 

適当なグラフ上の点で接線を作図し，傾きを求めて点を打ち，曲線で結ぶ.

4. 法線の傾きを m とすると $m\,f'(a) = -1$，これより結果を得る.

5. (1) 接線 $y = 3x$，法線 $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{10}{3}$

(2) 接線 $y = nx - n + 1$，法線 $y = -\dfrac{1}{n}x + \dfrac{n+1}{n}$

6. (1) (分子) $= \bigl(x^2 f(a) - a^2 f(a)\bigr) + \bigl(a^2 f(a) - a^2 f(x)\bigr)$ とすればよい.

(2) (分子) $= \bigl(f(a)g(x) - f(a)g(a)\bigr) + \bigl(f(a)g(a) - g(a)f(x)\bigr)$ とすればよい.

7. $h > 0$ として，$\dfrac{f(h) - f(0)}{h} + \dfrac{f(-h) - f(0)}{-h}$ を考える.

8. $\begin{cases} f(b_n) - f(a) = (b_n - a)\bigl(f'(a) + \epsilon_1\bigr) & \bigl(\epsilon_1 \to 0 \quad (n \to \infty)\bigr) \\ f(c_n) - f(a) = (c_n - a)\bigl(f'(a) + \epsilon_2\bigr) & \bigl(\epsilon_2 \to 0 \quad (n \to \infty)\bigr) \end{cases}$ から結果を導く.

練習問題 3.2

1. (1) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (2) $\dfrac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (3) $\dfrac{a}{a^2 + x^2}$ (4) $\dfrac{-a}{a^2 - x^2}$

(5) $e^{ax}(\sin(bx) + \cos(bx))$ (6) $\sqrt{a^2 - x^2}$ (7) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

(8) $\sqrt{x^2 + a^2}$ (9) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ (10) $\sqrt{x^2 - a^2}$

2. (1) $\dfrac{3(\log(\log x))^2}{x \log x}$ (2) $2\,x\,e^{-x^2}\sin(e^{-x^2})$ (3) $\dfrac{-2^{\mathrm{Arccos}\,x}\ \log 2}{\sqrt{1 - x^2}}$

(4) $\Bigl(1 + \dfrac{\log(\sin x)}{\cos^2 x}\Bigr)(\sin x)^{\tan x}$ (5) $\begin{cases} \dfrac{-2}{x^2 + 1} & (x > 0) \\ \dfrac{2}{x^2 + 1} & (x < 0) \end{cases}$ (6) $\dfrac{-4}{5 + 3\sin x}$

(7) $\dfrac{2 - 2x^2}{1 + x^2 + x^4}$

3. $x + y + a = 0$

4. $f(x) = (x - \alpha)^m P(x)$，$P(\alpha) \neq 0$ と表すと，$f'(x) = (x - \alpha)^{m-1}(mP(x) + (x - \alpha)P'(x))$

5. (1) $\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \cosh x.$ (2), (3) も同様

6. (1) $y = \mathrm{Arcsinh}\, x \Leftrightarrow x = \sinh y$ より，$\cosh y > 0$ に注意して，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{d}{dy}(\sinh y)} = \dfrac{1}{\cosh y} = \dfrac{1}{\sqrt{\sinh^2 y + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. (2)，(3) も同様.

7. (1) $g'(x)e^{g(x)}$ (2) $e^x g'(e^x)$ (3) $\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

(4) $\dfrac{1}{x}g'(\log|x|)$ (5) $g'(x)\cos\big(g(x)\big)$ (6) $\cos x\, g'(\sin x)$

8. $0 < k < 1$ のとき正の解が 1 つ存在する．$k \geqq 1$ のとき正の解は存在しない.

練習問題 3.3

1. (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) 1 (3) 1 (4) $-\infty$ に発散

2. (1) $1 \geqq \cos x$ は明らか．$f(x) = \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$ とおき，$f''(x) \geqq 0$ より $f'(x)$ は増加関数で , $f'(0) = 0$ に注意して増減表を作る．$x = 0$ で最小値 $f(0) = 0$ より $f(x) \geqq 0$

(2) $f(x) = x - \mathrm{Arctan}\, x$ とおくと $f'(x) \geqq 0$ より $f(x)$ は増加関数で，さらに $f(0) = 0$ より $f(x) \geqq 0$．$g(x) = \mathrm{Arctan}\, x - \dfrac{x}{1+x^2}$ とおくと $g'(x) \geqq 0$ より $g(x)$ は増加関数で，さらに $g(0) = 0$ より $g(x) \geqq 0$

(3) $f(x) = x - \log(1+x)$ と置くと，$f'(x) > 0$ $(x > 0)$．よって，$f(0) = 0$ より，$f(x) > 0$ $(x > 0)$．次に，$g(x) = \log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ と置くと，$g'(x) > 0$ $(x > 0)$．よって，$g(0) = 0$ より，$g(x) > 0$ $(x > 0)$

3. (1) 正しい：$f(x)$ が $x \neq 0$ で $f(x) \neq 0$ かつ $x = a$ で極値をとらないならば，(A) $x > a$ で $f(x) > 0$，$x < a$ で $f(x) < 0$，または，(B) $x > a$ で $f(x) < 0$，$x < a$ で $f(x) > 0$ のどちらかであり，$g(x)$ もそうである．これらを考慮すれば，$f(x)g(x)$ は $x > a$ と $x < a$ で同符号となり，$x = a$ で極値をとる.

(2) 誤り．反例：$f(x) = x$，$g(x) = 2x$ は $f'(x) = 1 < 2 = g'(x)$ であるが，$f(-1) = -1 > -2 = g(-1)$

4. $g(x) = f(x) - x$ と置いて，$g'(x) \neq 0$ から結果を導く.

5. $f'(x)$ の性質から結果を導く.

6. (1) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \cdot h^4 \sin \dfrac{1}{h} = 0$．$g'(0)$，$h'(0)$ についても同様

(2) $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ に対して，$x_n \to 0$, $f'(x_n)f'(x_{n+1}) < 0$ $(n = 3, 4, 5, \cdots)$ より．
$g'(x)$, $h'(x)$ についても同様.

(3) $g(x) > 0$ $(x \neq 0)$, $h(x) < 0$ $(x \neq 0)$ より．

(4) $x_n = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ に対して，$x_n \to 0$, $f(x_n)f(x_{n+1}) < 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ より．

7. 平均値の定理を適用する.

8. $a \leqq e^{\frac{1}{e}}$

9. $a + b$

10. $f(x) = o(x^m)$, $g(x) = o(x^n)$ と置いて,

(1) では $\dfrac{f(x)g(x)}{x^{m+n}} \to 0$ $(x \to 0)$ を導き,

(2) では $\dfrac{f(x)+g(x)}{x^m} \to 0$ $(x \to 0)$ を導く.

(3) $f(x) = o(x^m)$, $g(t) = o(t^n)$ と置いて，$\dfrac{g\bigl(f(x)\bigr)}{x^{mn}} \to 0$ $(x \to 0)$ を導く.

11. (1) $x \geqq 0$ における，$f(x)$ の最小値を求めて結果を導く.

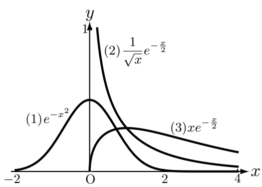
(2) ヒントに従って結果を導く.

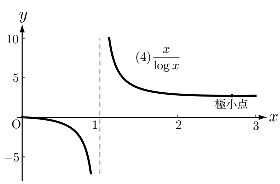
練習問題 3.4

1. 各小問の導関数は

(1) $f'(x) = -2e^{-x^2}x$ (2) $f'(x) = -\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}(x+1)}{2x\sqrt{x}}$ (3) $f'(x) = -\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}(x-2)}{2}$

(4) $f'(x) = \dfrac{\log x - 1}{(\log x)^2}$.





2. (1) $e^a + e^a(x-a) + \dfrac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{e^a}{n!}(x-a)^n + \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

(2) $\dfrac{1}{a-2} - \dfrac{1}{a-1} + \left(\dfrac{-1}{(a-2)^2} - \dfrac{-1}{(a-1)^2}\right)(x-a) + \cdots$
$+ \left(\dfrac{(-1)^n}{(a-2)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n}{(a-1)^{n+1}}\right)(x-a)^n$
$+ \left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{(\theta x-2)^{n+2}} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{(\theta x-1)^{n+2}}\right)(x-a)^{n+1}$

(3) $\dfrac{1}{(a-2)^2} - \dfrac{2(x-a)}{(a-2)^3} + \dfrac{3(x-a)^2}{(a-2)^4} - \cdots + \dfrac{(-1)^n(n+1)(x-a)^n}{(a-2)^{n+2}} + \dfrac{(-1)^{n+1}(n+2)(x-a)^{n+1}}{(\theta x-2)^{n+3}}$

(4) $ae^a + (a+1)e^a(x-a) + \cdots + \dfrac{(a+n)e^a}{n!}(x-a)^n + \dfrac{(a+n+1)e^{\theta x}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

3. (1) $f(x) = \cosh x$ とおくと $f^{(2m)}(0) = 1,\ f^{(2m+1)}(0) = 0$ より．

(2) $f(x) = \sinh x$ とおくと $f^{(2m)}(0) = 0,\ f^{(2m+1)}(0) = 1$ より．

4. $g(x) = f(x+h) - f(x)$ に対して，$\Delta g(x) = g(x+h) - g(x)$ を考える．

5. $f'(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ より，$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = f(x)$ を得る．これを $(n-2)$ 回微分して $f^{(n)}(0)\quad(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の漸化式を求め，以下の結果を導く．$f'(0) = 1,\ f''(0) = 0$ で，$n = 2m\,(m = 1, 2, \cdots)$ のとき，$f^{(2m)}(0) = \big((2m-2)^2+1\big)\big((2m-4)^2+1\big)\cdots(2^2+1)(0^2+1)$ $n = 2m+1\,(m = 1, 2, \cdots)$ のとき，$f^{(2m+1)}(0) = \big((2m-1)^2+1\big)\big((2m-3)^2+1\big)\cdots(3^2+1)(1^2+1)$

6. (1) -3　(2) $\dfrac{1}{2}$

7. $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ と置くと, $\log y = \dfrac{1}{x}\log(1+x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + o(x^3)\ \ (x \to 0)$. これより，$y = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}$ となる．これを更に漸近展開することにより，結果を得る．

8. $f(x) = x^\alpha\ \ (\alpha > 1)$ と置く．$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} > 0\ \ (x > 0)$ より，$f(x)$ は $x \geqq 0$ において狭義凸関数である．定理 3.19 より結果を得る．

9. 3 辺の長さを $a,\ b,\ c$, 面積を S とすると, ヘロンの公式は $S = \sqrt{\ell(\ell-a)(\ell-b)(\ell-c)}$. ただし, $\ell = \dfrac{a+b+c}{2}$．相加平均と相乗平均の不等式より $\sqrt[3]{(\ell-a)(\ell-b)(\ell-c)} \leqq$

$\dfrac{\ell}{3}$ となるから，$S \leqq \dfrac{\ell^2}{3\sqrt{3}}$ が得られる．等号が成り立つのは，$\ell - a = \ell - b = \ell - c$，すなわち $a = b = c$ のときで，S は正三角形のとき．

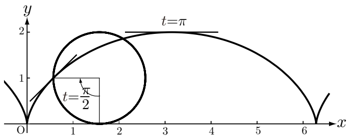
10. (1) 1.25992, $a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{2}{3{a_n}^2}$　(2) 0.739085, $a_{n+1} = \dfrac{a_n \sin a_n + \cos a_n}{\sin a_n + 1}$

練習問題 3.5

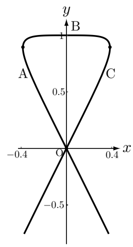
1. (1) $x^2 - y = 1$　(2) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$　(3) $(2x^2 + 5x + 2)y = 4x$

(4) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

2. 概形は下図．$t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $y = x - \left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)a$．$t = \pi$ のとき $y = 2a$



3. 概形は右図．$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{12t^2(1-t^2)}{(3t^2-1)^3}$.



(A) $t < -1$ $(x < 0)$ で上に凸，$-1 < t < \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

$\left(0 < x < \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ で下に凸．$t = -1$ の原点 (0,0) は変曲点．

(B) $\dfrac{-1}{\sqrt{3}} < t < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(\dfrac{-2}{3\sqrt{3}} < x \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ で上に凸である．

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < t < 1$ $\left(\dfrac{-2}{3\sqrt{3}} < x < 0\right)$ で下に凸，$1 < t$ $(0 < x)$ で上に凸．

$t = 1$ の原点 (0,0) は変曲点．原点 (0,0) は重複点でもある．

4. 円：$\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}$ ((0,0) を除く)．$\boldsymbol{v} = {}^t\!\left(\dfrac{-6t}{(1+t^2)^2}, \dfrac{3(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\right)$

5. (1) $t > 0$

(2) $t = t_1$ のとき $(x, y) = (x_1, y_1)$ とすると，$t = \dfrac{1}{t_1}$ のとき $x = \dfrac{3t_1^2}{t_1^3 + 1} = y_1$，$y = \dfrac{3t_1}{t_1^3 + 1} = x_1$ となり，結果を得る．

(3) 接線が水平：$(x, y) = (0, 0)$，$(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$．接線が垂直：$(x, y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$

(4) $y_1 = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$，$y_2 = -x - 1 = -\dfrac{3t}{1+t^3} - 1 =$ とすると，$y_1 - y_2 = \dfrac{(1+t)^2}{1-t+t^2} \to 0$　$(t \to -1)$ となる．

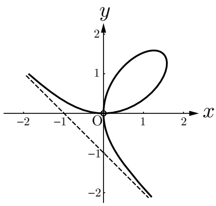
(5) 概形は下図 (次ページ 左)

6. (1) x 軸に対象：$t \Rightarrow 2\pi - t$ を対応　y 軸に対象：$t \Rightarrow \pi + t$ を対応.

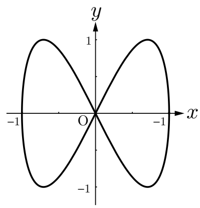
(2) 定理 3.22 より，$0 < t < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi < t < 2\pi$　(3) 概形は下図 (中央).

7. (1) 軌跡は下図 (右)．交点は $\mathrm{A}(0, -3)$ と B の 2 つ.　(2) 点 A で重なる.

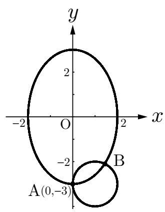
(3) 重ならない.



練習問題 3.5 5.(5)



練習問題 3.5 6.(3)



練習問題 3.5 7.(1)

8. (1) $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$　(2) $(\pi - 4)x + (4 + \pi)y = 4\sqrt{2}$

9. $(2x - a)^2 + (2y - b)^2 = a^2 + b^2$ となり，中心 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ の円.

10. (1) $3t^2 - 12t + 9$　(2) $t = 1, 3$　(3) $t < 1,\ 3 < t$　(4) 28　(5) 12

11. 点 Q の x 座標は $x = \cos\omega t + \sqrt{\ell^2 - \sin^2\omega t}$. これより, 速度: $\dfrac{dx}{dt} = -\omega\sin\omega t - \dfrac{\omega\sin(2\omega t)}{2\sqrt{\ell^2 - \sin^2\omega t}}$ 加速度：$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\cos\omega t - \dfrac{\omega^2\left(\ell^2\cos(2\omega t) + \sin^4\omega t\right)}{(\ell^2 - \sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}}$

第4章

問 4.1 ヒントにある不等式の各辺を積分する.

問 4.2 (省略)

問 4.3 (1) $\dfrac{32}{3}$　(2) $-\dfrac{37}{6}$　(3) 2　(4) $\dfrac{\pi}{6}$

問 4.4 判別式は $D = \left(\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - \left(\displaystyle\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\displaystyle\int_a^b g(x)^2 dx\right)$

問 4.5 (1) $\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-1}$　(2) $\dfrac{2}{15}\sqrt{x+1}\,(3x^2+x-2)$　(3) $-\log|\cos x|$

(4) $\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{x}{a}$　(5) $\dfrac{1}{a}\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{a}$

問 4.6 (1) と (2) $\displaystyle\int_{-\alpha}^0 f(x)\,dx$ において，$x=-t$ と置く.

(3) 前半は $I = \displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx$ において，$x = \pi - t$ と置くと $I = \pi\displaystyle\int_0^\pi f(\sin x)\,dx - I$. 後半は $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$ において，$x = \pi - t$ と置くと $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)\,dx$

(4) (3) と同じく，$x = \pi - t$ と置いて，$I = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^\pi \cos^{2n} t \sin t\,dt$ を導き，その後 $\cos t = u$ と置換積分.

問 4.7 (2) $\displaystyle\int \mathrm{Arcsin}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arcsin}\,x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ とし，右辺の積分は $t = 1-x^2$ と置換積分.　(3) $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}\,x\,dx = x\mathrm{Arctan}\,x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ とし，右辺の積分は $t = 1+x^2$ と置換積分.

問 4.8 (2) $I = x\sqrt{a^2-x^2} - \displaystyle\int \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ より結果を得る.　(3)$j = x\sqrt{x^2+k} - \displaystyle\int \frac{x^2+k-k}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = x\sqrt{x^2+k} - J + k\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}\,dx$ より結果を得る.

問 4.9 (1) $\dfrac{x^2}{2} + x - \log|x+1|$　(2) $\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + \dfrac{1}{x+1}$

(3) $2\log|x+1| - \dfrac{1}{2}\log(x^2+4) - 2\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{2}$

問 4.10 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin\theta}\,d\theta$ (2) $\displaystyle 2\int \frac{1}{t^2-1}\,dt$

問 4.11 $\displaystyle I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$ より結果を得る.

問 4.12 C を適当な正の定数とする. (1) $\displaystyle g(x) = \frac{C}{(x-a)^\alpha}$ (2) $\displaystyle g(x) = \frac{C}{(b-x)^\alpha}$ (3) $\displaystyle g(x) = \frac{C}{x^\alpha}$ (4) $\displaystyle g(x) = \frac{C}{|x|^\alpha}$

問 4.13 (1) $\log x > 1 \quad (x > e)$ より発散 (2) $\displaystyle 0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ において $\displaystyle\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x}$ より発散.

問 4.14 (1) π (2) π

問 4.15 $t = 0$ の近傍：$1 - p < 1$ より収束（定理 4.8(1) 参照） $t = 1$ の近傍：$1 - q < 1$ より収束（定理 4.8(2) 参照).

問 4.16 (1) $t \neq 0$ のとき, $1 - t < e^{-t}$, $1 + t < e^t$ より結果を得る.

(2) (1) において, $1 - x^2$ の代わりに $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (1 < x) \end{cases}$ と置き替えても同じ不等式が成り立つことに注意して, 各辺を n 乗してから $[0, \infty)$ で積分する.

(3) ヒントに従い置換積分する. (4) ヒントに従い置換積分する.

問 4.17 (1) $\displaystyle -\frac{1}{(n+1)^2}$

(2) $n = 0$ のとき収束し積分値は π, $n = 1, 2$ のとき発散.

(3) 発散.

問 4.18 右端を代表点にとると, $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ より,

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$$

問 4.19 (1) $\displaystyle \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})\right)$ (2) 8

(3) $\displaystyle \frac{1}{2}\left(\pi\sqrt{\pi^2+1} + \log(\pi + \sqrt{\pi^2+1})\right)$

問 4.20 (1) $\displaystyle \frac{4}{3}\pi ab^2$ (2) $2\pi^2 a^2 b$

問 4.21 (1) $\displaystyle \frac{2\pi ab}{e}\left(\operatorname{Arcsin} e + e\sqrt{1-e^2}\right)$ (2) $4\pi^2 ab$

問 4.22 $\displaystyle \frac{64}{3}\pi a^2$

練習問題 4.1

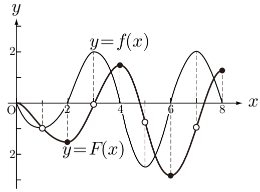
1. (1) 2　(2) $\dfrac{9}{\log 10}$　(3) $\dfrac{1}{2}\log 2$　(4) $\sqrt{3}$　(5) $\dfrac{\pi}{6}$　(6) $2\log(1+\sqrt{2})$

(7) $\dfrac{\pi}{2}$　(8) $\dfrac{1}{2}\log 3$　(9) 0

2. 積分の定義を確認する．

3. (1) $2,\ 6$　(2) 4　(3) $[1,3],\ [5,7]$

(4) $f(x)=0$ となる x で極値 (黒点) を取り，$f(x)$ の極値の x で変曲点 (白点) となる．



4. (1) $\sqrt{1+x^2}$　(2) $2x\sqrt{1-x^4}$　(3) $\dfrac{1}{x^2+x}$　(4) $\dfrac{4x^4+9x^2-1}{(x^2+1)(4x^2+1)}$

(5) $\sin x$

5. $a=8$　$f(x)=\sqrt[3]{x}$

6. (1)，(2) ともヒントに従って導く．

7. ヒントに従って導く．また，等号の成立条件をチェックする．

練習問題 4.2

1. (1) $\dfrac{122}{5}$　(2) $x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$　(3) $\dfrac{1}{8}(x^2+1)^4$　(4) $\log|x^2-3x+2$

(5) $\dfrac{1}{2}(\log x)^2$　(6) $\log|\log x|$　(7) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$　(8) $\dfrac{1}{8}(\pi-2)$

(9) $2\sqrt{2}$　(10) $\dfrac{112}{9}$　(11) $\dfrac{\pi}{4}$　(12) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$　(13) $\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)$

(14) $\dfrac{16-7\sqrt{5}}{3}$　(15) $\dfrac{1}{2}\big(x\cos(\log x)+x\sin(\log x)\big)$

2. (1) $\log\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{6}$　(2) $\dfrac{1}{2}x^2-2x+\log\dfrac{(x-1)^2}{|x+1|}$　(3) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{18}{13}-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{3}\mathrm{Arctan}\,\dfrac{2}{3}$

(4) $\dfrac{5}{2}\log 2-\dfrac{\pi}{4}$　(5) $\dfrac{1}{24}\log\left|\dfrac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}\right|+\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}$　(6) $\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,x^2$

(7) $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\log\dfrac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\mathrm{Arctan}\,(\sqrt{2}x-1)+\mathrm{Arctan}\,(\sqrt{2}x+1)\Big)$

(8) $\dfrac{56}{5}$　(9) $\dfrac{\pi}{2}-1$　(10) $2\mathrm{Arctan}\,\sqrt{x-1}$　(11) $\log\left|\dfrac{x-1+\sqrt{1+x+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x+x^2}}\right|$

(12) $\dfrac{1}{5}\log\left|\dfrac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\tan\frac{x}{2}+2}\right|$　(13) $\log(3-\sqrt{3})$

3. $\dfrac{1}{6}\log\left|\dfrac{x^6-1}{x^6}\right|$

4. (1) $I_{n+1} = \displaystyle\int x^{n+1}\big(-e^{-x}\big)'dx$ を部分積分． (2) $I_{n+2} = \displaystyle\int x^{n+1}\big(-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\big)'dx$ を部分積分． (3) $I_{n+1} = \displaystyle\int x^{n+1}(-\cos x)'dx$ を部分積分． J_{n+1} についても同様.

5. $u = \sqrt[3]{1-x^5}$ と置くと $x = \sqrt[5]{1-u^3}$ となる．

6. (1) $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x)'(1-x^2)^n dx$ を部分積分 (2) $I_0 = 1$ と (1) より．

7. (1) $\dfrac{x^n}{2} \leqq \dfrac{x^n}{1+x} \leqq x^n$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を積分.

(2) $I_n + I_{n-1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n-1}dx$ $(n \geqq 1)$， $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x}dx$ より結果を得る.

(3) (1) より $I_n \to 0$ $(n \to \infty)$ で，これを (2) に適用する．

8. (1) $\displaystyle\int \dfrac{1}{t^2}\,dt = -\dfrac{1}{t} = -\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}$ (2) $\displaystyle\int \dfrac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx = -\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}$

(3) $\displaystyle\int \dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

練習問題 4.3

1. (1) 2 (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) 発散 (4) $\dfrac{\pi}{2ab}$ (5) 発散 (6) $\dfrac{b}{a^2+b^2}$ (7) $\dfrac{2}{e}$

(8) π (9) $\dfrac{\pi}{2}$ (10) $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ (11) π (12) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

2. (1) 発散 (2) 収束 (3) $p > -1$ のとき収束 $p \leqq -1$ のとき発散 (4) 発散 (5) 発散 (6) $|p| < 1$ のとき収束 $|p| \geqq 1$ のとき発散 (7) 収束 (8) 収束 (9) 収束

3. $x \to 0$ のとき $\dfrac{\sin x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} + o(1)$，$x \to \infty$ のとき $\left|\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leqq \dfrac{1}{x^\alpha} + o(1)$ より収束する．

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx$, および $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx$ より結果を得る.

5. (1) 任意の $\alpha > 0$ に対し， $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^\alpha(-\log x)^{n-1} = 0$ (2) 部分積分.

(3) $-\log x = t$ とおいて置換積分.

6. (1) 任意の $\alpha > 0$ に対し， $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^\alpha \log(\sin x) = 0$ (2) $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ と置く．

(3) $x = \pi - t$ と置く． (4) $x = 2t$ と置く． $\sin 2t = 2\sin t\cos t$ を利用する．

7. (1) $\dfrac{\pi}{2}\log 2$　(2) $-\pi\log 2$　(3) $-\dfrac{\pi^2}{2}\log 2$

8. (1) $p>c$ に対して $F(p)$ は存在　(2) (i) $\dfrac{1}{p^2+1}$　(ii) $\dfrac{p}{p^2+1}$　(iii) $\dfrac{1}{(p-a)^2}$

(iv) $\dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$　(v) $\dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$

9. (1) 前半の等式：$t=\cos^2\theta$ とおいて置換積分．後半の等式：$\dfrac{t}{1-t}=u$ とおいて置換積分.　(2) $\displaystyle\int_0^1 t^m(1-t)^n dt$ を部分積分.

練習問題 4.4

1. (1) $S_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{3}$

(2) $S_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\log 2$

2. (1) A　(2) A　(3) 約 4.5 分後（4 分〜5 分の間なら正解とする.）

(4) 2 分後の A と B の間隔.

3. リーマン和 $S_n=\dfrac{3}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3k}{n}\right)^3$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{609}{4}$

4. (1) $\log 2-\dfrac{1}{2}$　(2) πab　(3) $\dfrac{3}{2}\pi a^2$

5. (1) $2-\sqrt{2}+\log\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}$　(2) $6a$　(3) $\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}$

6. $\dfrac{5}{12}\pi a^3$

7. 定義 4.4 の記号を用いる．小区間 $[x_{i-1},x_i]$ において，底辺の長さ (x_i-x_{i-1})，高さ $f(c_i)$ の長方形を y 軸の回りに 1 回転してできる円筒の体積は $\Delta V_i=\left(\pi x_i^2-\pi x_{i-1}^2\right)f(c_i)=\pi(x_i+x_{i-1})f(c_i)(x_i-x_{i-1})$ である．これより，リーマン和 $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$ の極限をとると結果を得る.

8. (1) $\dfrac{1}{6}$　(2) $\dfrac{2}{15}\pi$　(3) $\dfrac{\pi}{6}$

9. (1) $\dfrac{24\sqrt{3}}{5}$　(2) $\dfrac{27}{4}\pi$　(3) $\dfrac{432\sqrt{3}}{35}\pi$

10. (1) $\dfrac{8}{3}\pi$　(2) $\dfrac{16}{15}\pi$　(3) $\dfrac{1}{2}\pi^2$

11. $\dfrac{13}{3}\pi$

12. $S_a=\left\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})-e^{-a}\sqrt{1+e^{-2a}}-\log\left(e^{-a}+\sqrt{1+e^{-2a}}\right)\right\}\pi$.

$S_\infty=\left(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\right)\pi$

13. $x' = r'\cos\theta - r\sin\theta$, $y' = r'\sin\theta + r\cos\theta$ を回転体の表面積公式に代入する．

14. (1) $\dfrac{32\pi}{5}a^2$　(2) $4\pi\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)a^2$

練習問題 4.5

1. $2h = \dfrac{b-a}{n}$ として，公式 4.12 の証明と同様に，$[-h, h]$ における誤差 $E(h) = \displaystyle\int_{-h}^{h} f(t)\,dt - 2hf(0)$ を考える．$E(x)$ のマクローリン展開より，$|E(h)| \leqq \dfrac{M_2}{3}h^3$ となる．

2. (1) $T_{10} = 0.800972$　(2) $M_{10} = 0.806598$

(3) $S_{10} = 0.804779$．真の値は $I = 0.804719\cdots$ より，$|I - T_{10}| = 0.003747$，$|I - M_{10}| = 0.001879$，$|I - S_{10}| = 0.000060$

3. 補題 4.1 において，$y = px^3 + qx^2 + rx + s$ としても (4.16) 式は同じである．

4. $134\,\mathrm{m}^2$（シンプソンの公式による．）

5. 区間 $[a, b]$ を $2n$ 等分したときの分点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ における関数の値を $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{2n}$ とすると，$T_n = \dfrac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_2 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + y_{2n})$ となるから，$3S_{2n} = 4T_{2n} - T_n$ を得る．

第5章

問 5.1 開領域は (2), 閉領域は (1), (4), (5).

問 5.2 $\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$，等高線の接線ベクトルは $\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{h} = 0$ より直交する.

問 5.3 (1) 極限値なし. (2) 0 (3) 極限値なし.

問 5.4 (1) 連続. (2) 連続でない. (3) 連続.

問 5.5 $x^2 + y^2 \leqq 2$ では $f(1,1) = \dfrac{2}{3}$ と最大値・最小値の定理 5.3 を使う．一方, $x^2 + y^2 = r^2 > 2$ では $|f(x,y)| \leqq \dfrac{\sqrt{2}r}{1+r^2} < \dfrac{2}{3}$ を示せば，$\mathbb{R}^2$ で最大値が存在する.

問 5.6 (1) $f_x = 3x^2 - 2ay$, $f_y = 3y^2 - 2ax$

(2) $f_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

(3) $f_x = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = -\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}$

(4) $f_x = -\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

問 5.7 (1) $f_x = 3x^2 - 3yz$, $f_x = 3y^2 - 3zx$, $f_z = 3z^2 - 3xy$

(2) $f_x = -\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, f_y, f_z : 省略 $(x, y, z$ について対称)

(3) $f_x = -e^{\sqrt{2}z} \sin x \sin y$, $f_y = e^{\sqrt{2}z} \cos x \cos y$, $f_z = \sqrt{2} e^{\sqrt{2}z} \cos x \sin y$.

問 5.8 (1) 定義より $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. $f_x = -\dfrac{2y^4x}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = \dfrac{2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

よって $x, y \to 0$ のとき $f_x, f_y \to 0$

(2) 定義より $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. $f_x = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$,

$f_y = \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$. よって $x, y \to 0$ のとき $f_x, f_y \to 0$.

問 5.9 微分可能性より $f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) - f(a,b) = f_x(a,b) r\cos\theta + f_y(a,b) r\sin\theta + o(r)$ が得られるので，方向微係数の定義より求められる.

問 5.10 (1) 接平面は $4x - 2y - z - 3 = 0$，法線は $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$

(2) 接平面は $x + \dfrac{2}{3}y - z - 2 = 0$, 法線は $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{3(y-3)}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

問 5.11 (1) $f_{xx} = e^x \sin y,\ f_{xy} = e^x \cos y,\ f_{yy} = -e^x \sin y$

(2) $f_{xx} = \dfrac{2(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2},\ f_{xy} = -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2},\ f_{yy} = \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

(3) $f_{xx} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ f_{xy} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ f_{yy} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$

問 5.12 (1) $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$ (2) $f_{xy}(0,0) = -1 \neq f_{yx}(0,0) = 1.$

問 5.13 $f_{xxx} = e^x \sin y,\ f_{xxy} = e^x \cos y,\ f_{xyy} = -e^x \sin y,\ f_{yyy} = -e^x \cos y.$

問 5.14 (1) $u_x = \dfrac{x}{x^2+y^2} = v_y,\ v_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2} = -v_y$ (2) $\Delta u = \Delta v = 0.$

問 5.15 $\Delta f = 0.$

問 5.16 (1) $z_x = 2nx(x^2+2y^3)^{n-1},\ z_y = 6ny^2(x^2+2y^3)^{n-1}$

(2) $z_x = (2x+3y)e^{x^2+3xy+y^3},\ z_y = 3(x+y^2)e^{x^2+3xy+y^3}$

(3) $z_x = yx^{y-1}\cos(x^y+y),\ z_y = (1+x^y \log x)\cos(x^y+y)$

(4) $z_x = \dfrac{2x}{1+x^2+y^2}\ z_y = \dfrac{2y}{1+x^2+y^2}.$

問 5.17 $z_x = bf'(bx-ay),\ z_y = -af'(bx-ay)$ を用いる.

問 5.18 (1) $18t^5$ (2) $8e^{8t}$.

問 5.19 (1) $f_u = 4u^3v^8,\ f_v = 8u^4v^7$ (2) $f_u = 2,\ f_v = 0.$

問 5.20 $z_u = e^u(f_x \cos v + f_y \sin v),\ z_v = e^u(-f_x \sin v + f_y \cos v).$ $z_u^2 + z_v^2 = e^{2u}(f_x^2 + f_y^2).$

問 5.21 $y' = \dfrac{x^2-y}{x-y^2}.$

問 5.22 (1) $y = \dfrac{2}{5}(2x+3)$ (2) $y = -\dfrac{x}{2} + 5.$

問 5.23 $p'(x) = \dfrac{2(x^2-z^2)}{x-z-2yz},\ q'(x) = \dfrac{-x-2xy+z}{x-z-2yz}.$

問 5.24 $x = X(U(s,t),V(s,t)),\ y = Y(U(s,t),V(s,t))$ について $x_s,\ x_t,\ y_s,\ y_t$ を定理 5.14 により計算して行列表示する.

問 5.25 (1) $1+x+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{1}{2}\left(x^2+3xy+\dfrac{9}{4}y^2\right)+R_3$ (2) $x+y-\dfrac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)+R_3$

(3) $1-x+y+x^2-2xy+y^2+R_3.$

問 5.26 (1) $xy+xy(x+y)+R_4$ (2) $x-y-\dfrac{1}{6}(x-y)^3+R_4$

(3) $x+y-\dfrac{1}{2}(x+y)^2+\dfrac{1}{3}(x+y)^3+R_4$

問 5.27 (1) 極値なし (2) $(2,2)$ で極小. 極小値は -8

(3) 極小は $(2,2)$ で 8. 極大は $(-2,-2)$ で -8.

問 5.28 (1) 最大は $\left(\pm\sqrt{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で 1，最小は $\left(\pm\sqrt{2}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で -1 (複号同順)

(2) 最大は $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ で 3，最小は $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \mp\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ で -2 (複号同順)

問 5.29 $(fg)_x = f_x g + f g_x$, $(fg)_y = f_y g + f g_y$ を用いる.

問 5.30 $\alpha ax + \beta by + \gamma cz = d$

問 5.31 最大は $4\sqrt{3}$. 最大を与える (x, y, z) : $\left((-1)^p 2\sqrt{3}, (-1)^q\sqrt{3}, (-1)^r\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,

$(p, q, r) = (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$.

最小は $-4\sqrt{3}$. 最小を与える (x, y, z) : $\left((-1)^p 2\sqrt{3}, (-1)^q\sqrt{3}, (-1)^r\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,

$(p, q, r) = (1,1,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

練習問題 5.1

1. 集合を E とすると，$\mathrm{P} \notin E$ ならば E の 点 (有限個) を含まない P の近傍がとれる.

2. ($\Rightarrow$) もし $\mathrm{P} \notin E$ ならば E の要素を含まない P の近傍 $B_h(\mathrm{P})$ がとれるので，$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n = \mathrm{P}$ に矛盾. ($\Leftarrow$) もし $\mathrm{P} \notin E$ で近傍列 $B_{h_n}(\mathrm{P})(h_n \to 0)$ で $B_{h_n}(\mathrm{P}) \cap E \neq \emptyset$ が成り立てば，$\mathrm{P}_n \in E$ で $\mathrm{P}_n \to \mathrm{P} \notin E$ とできるので矛盾. よって，ある h で $B_h(\mathrm{P})$ は E の補集合に含まれる.

3. 任意の有理数の近傍には無理数があるので，P の任意の近傍は無理数を座標とする点を含む.

4. もし $\mathrm{P} \in \partial E$ ならば近傍列 $B_{h_n}(\mathrm{P})(h_n \to 0)$ で $B_{h_n}(\mathrm{P}) \cap E \neq \emptyset$ が成り立つ. よって，$\mathrm{P}_n \in E$ で $\mathrm{P}_n \to \mathrm{P}$ なる点列があり，E は閉集合なので $\mathrm{P} \in E$.

5. もし $\mathrm{P} \in E$ ならば，ある近傍 $B_h(\mathrm{P}) \subset E \subset E \cup F$. $\mathrm{P} \in F$ としても同様なので，$E \cup F$ は開集合. もし $\mathrm{P} \in E \cap F$ ならば，ある近傍 $B_{h_1}(\mathrm{P})$ と $B_{h_2}(\mathrm{P})$ で $B_{h_1}(\mathrm{P}) \subset E, B_{h_2}(\mathrm{P}) \subset F$. $h = \min\{h_1, h_2\}$ とすれば $B_h(\mathrm{P}) \subset E \cap F$.

6. 集合 E の補集合を E^c と表すとき，$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$, $(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$ なので問題 5. より閉集合となる.

練習問題 5.2

1. (1) $\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $|\boldsymbol{g}| = \sqrt{13}$　(2) $\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $|\boldsymbol{g}| = 2\sqrt{13}$　(3) $\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $|\boldsymbol{g}| = \sqrt{13}$.

2. $x=\pm 1$, $z=a+by^2$: a の正負は放物線の頂点の位置. (1), (4) $b>0$ ならばグラフは上に凸. (2), (3) $b<0$ ならば下に凸.

$x=0$, $z=by^2$: 放物線の頂点は原点で，上と同様に b の正負で凹凸が決まる.

$z=1, ax^2+by^2=1$: (1) $a>0, b>0$ ならば楕円. (3) $a>0, b<0$ ならば軸が x 軸の双曲線. (4) $a<0, b>0$ ならば軸が y 軸の双曲線. (2) $a, b<0$ ならば空集合 $\emptyset$ でグラフはない.

$z=-1$ ならば，$z=1$ と様子が，(1) と (4)，(2) と (3) それぞれで逆になる.

$z=0$, $ax^2+by^2=0$: (1),(4) a と b が同符号ならば $x=y=0$. (2),(3) 異符号ならば 2 つの直線.

3. (1) $z=r^4-2r^2$ と表されるので，グラフは関数 $z=x^4-2x^2$ のグラフを z 軸中心に回転したもの.　(2) $z=r\cos 2\theta$ なので，グラフは単位円周上のグラフ $z=\cos 2\theta$ を動径方向に比例拡大したもの.

4. (1) $z=2X^2+3Y^2-11$　(2) $z=3X^2-5Y^2-\dfrac{1}{12}$.

5. (1) $z=\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{7}{2}Y^2$　(2) $z=\dfrac{13}{2}X^2-\dfrac{1}{2}Y^2$.

6. $a\neq b$ ならば $\tan 2\theta=\dfrac{2h}{a-b}$ をみたす θ.　$a=b$ ならば $\theta=\pm\dfrac{\pi}{4}$.

練習問題 5.3

1. (1) 0　(2) 極限値なし　(3) 1　(4) 0　(5) 極限値なし　(6) 0.

2. (1) 連続でない.　(2) 連続　(3) 連続　(4) 連続.

3. 十分に大きな $M>0$ について，x または y が十分に小さければ $f(x,y)>M$. また，x または y が十分に大きければ $f(x,y)>M$. 以上より，最小値は有界な範囲で考えれば良いので必ず存在する.

4. $\mathrm{P}_n\in E$, $\mathrm{P}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n$ とすると，$f(\mathrm{P})=\lim_{n\to\infty}f(\mathrm{P}_n)=0$ より $\mathrm{P}\in E$. よって，E は閉集合.

5. E の補集合は $E^c=\{\mathrm{P}\in\mathbb{R}^2 \mid f(\mathrm{P})\leqq 0\}$. $\mathrm{P}_n\in E^c$, $\mathrm{P}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n$ とすると，$f(\mathrm{P})=\lim_{n\to\infty}f(\mathrm{P}_n)\leqq 0$ より $\mathrm{P}\in E^c$. よって，E^c は閉集合であることより E は開集合.

6. 最大値・最小値の定理より，最大値 M と最小値 m が存在するので，値域は $[m,M]$ に含まれる. また，中間値の定理より，任意の $m<k<M$ に対して P が存在して $f(\mathrm{P})=k$. よって，値域は $[m,M]$.

練習問題 5.4

1. (1) $f_x = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$, $f_y = -\dfrac{2x}{(x+y)^2}$ (2) $f_x = \dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = \dfrac{x(x^2-y^2)}{(x+y)^2}$

(3) $f_x = e^x(\cos y + \sin y)$, $f_y = e^x(-\sin y + \cos y)$

(4) $f_x = e^x \cos y + e^y \cos x$, $f_y = -e^x \sin y + e^y \sin x$

(5) $f_x = 2x\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x} - y$, $f_y = -2y\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{y} + x$

(6) $f_x = -\dfrac{x}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, f_y, f_z : 省略 (x, y, z について対称)

(7) $f_x = \dfrac{3(x^2-yz),}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$, f_y, f_z : 省略 (x, y, z について対称).

2. (1) $a = d = 0$, $b = -3$, $c = 3$, $e = -1$ (2) $P(z) = z^3$.

3. (1) $9x - 12y - z - 4 = 0$ (2) $8x - 4y - z - 12 = 0$ (3) $2x - y + z - 2 = 0$

(4) $x - y + 2z - \dfrac{\pi}{2} = 0$.

4. (1) $a + c = 0$ (2) $a + d = 0$, $b - c = 0$.

5. (1) $E_t = -\dfrac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2t}} + \dfrac{x^2}{2t^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$, $E_x = -\dfrac{x}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$ より計算

(2) $u_x = (e^x + e^{-x})\sin y$, $u_y = (e^x - e^{-x})\cos y$ より計算.

6. (1) $y\dfrac{\partial}{\partial z}\Omega_y f = yf_x + yzf_{xz} - yxf_{zz}$, $z\dfrac{\partial}{\partial y}\Omega_y f = z^2 f_{xy} - zxf_{zy}$ などを用いる. (2) $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Omega_x f = 2f_{yz} + \Omega_x f_{yy}$ などを用いる.

練習問題 5.5

1. $z_u = \dfrac{1}{v}f'\left(\dfrac{u}{v}\right)$, $z_v = -\dfrac{u}{v^2}f'\left(\dfrac{u}{v}\right)$ を用いる.

2. $z_u = \dfrac{-1}{(u^2+v^2)^2}[(u^2-v^2)f_x + 2uvf_y]$,

$z_v = \dfrac{1}{(u^2+v^2)^2}[-2uvf_x + (u^2-v^2)f_y]$, $z_u^2 + z_v^2 = \dfrac{1}{(u^2+v^2)^2}(f_x^2 + f_y^2)$.

3. 定理 5.14 と $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を用いる.

4. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

5. $u_{tt} = c^2(f'' + g'')$, $u_{xx} = f'' + g''$ である.

6. $u_{xx} = \dfrac{x^2}{r^2}U'' + \dfrac{r^2 - x^2}{r^{\frac{3}{2}}}U'$ などを用いる. 方程式は $(rU')' = 0$ と同値である.

練習問題 5.6

1. (1) $y = -2x + 6$ (2) $y = -\dfrac{9}{13}x + \dfrac{40}{13}$.

2. (1) $4x+3y+3z-16=0$ (2) $x+2y+z-6=0$.

3. ヤコビ行列は例題 5.24. その逆行列は $\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \dfrac{\cos\theta\cos\phi}{r} & -\dfrac{\sin\phi}{r\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\phi & \dfrac{\cos\theta\sin\phi}{r} & \dfrac{\cos\phi}{r\sin\theta} \\ \cos\theta & -\dfrac{\sin\theta}{r} & 0 \end{bmatrix}$

4. 条件は $\beta y-\alpha z\neq 0$. $p'(x)=\dfrac{q(x)-\beta x}{\beta p(x)-\alpha q(x)}$, $q'(x)=\dfrac{\alpha x-p(x)}{\beta p(x)-\alpha q(x)}$.

5. (挿入問題) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial r}-\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}$.

6. 上の練習問題 5.を用いて $u_{xx}+u_{yy}$ を計算する.

7. $u_{xx}=\dfrac{x^2}{r^2}U''+\dfrac{r^2-x^2}{r^{\frac{3}{2}}}U'$ などを用いる. 方程式は $(r^2U')'=0$ と同値である.

8. 例題 5.24 の式を用いて $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$ を計算する. 忍耐力は必要.

9. (1) $J=\begin{bmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{bmatrix}$, $|J|=4(u^2+v^2)=0$ となるのは $u=v=0$

(2) $J=\begin{bmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{bmatrix}$, $|J|=-u=0$ となるのは $u=0$

10. $J=\begin{bmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v(1-w) & u(1-w) & -uv \\ vw & uw & uv \end{bmatrix}$, $|J|=u^2v=0$ となるのは $u=0$ または $v=0$

練習問題 5.7

1. $1-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)-\dfrac{1}{8}(x^4+2x^2y^2+y^4)+R_6$

2. (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-y)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{x^ky^{n-k}}{k!(n-k)!}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+y)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{x^ky^{n-k}}{k!(n-k)!}$

3. (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k-1}x^ky^{n-k}}{(n-k)k!}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}+1\Big)\cdot\Big(-\frac{1}{2}+n-k-1\Big)\frac{x^ky^{n-k}}{k!(n-k)!}$

4. (1) $\Big(1,-\dfrac{3}{2}\Big)$ で極小値 $-\dfrac{5}{4}$ (2) $(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$ で極小値 -8

(3) $\Big(2m\pi,\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\Big)$ で極大値 2. $\Big((2m+1)\pi,\dfrac{\pi}{2}+(2n+1)\pi\Big)$ で極小値 -2

(4) $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ で極小値 $-\frac{1}{8}$. $\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$ で極大値 $\frac{1}{8}$

(5) $(0, 0)$ で極小値 0

5. (1) $(0, \pm 1)$ で最小値 1. $(\pm 2, 0)$ で最大値 4.

(2) $(0, 0)$ で最小値は 0. $(\pm\sqrt{2}, 0)$ で最大値 2

6. (1) 限界代替率は $\frac{p_{\mathrm{X}}}{p_{\mathrm{Y}}}$. よって予算 b には依存しない.

(2) $x = \frac{\alpha b}{(\alpha+\beta)p_{\mathrm{X}}}$, $y = \frac{\beta b}{(\alpha+\beta)p_{\mathrm{Y}}}$

練習問題 5.8

1. $dH = dU + Vdp + pdV = TdS + Vdp$. よって $T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p$, $V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S$.

マクスウェルの関係式は $\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S$.

2. $dF = dU - TdS - SdT = -SdT - pdV$. よって $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$, $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$. マクスウェルの関係式は $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$.

3. (1) $dp = -\frac{\gamma p}{V}dV + \frac{\Gamma T}{V}dS$, $dT = \frac{\Gamma T}{V}dV + \frac{gT^2}{pV}dS$

(2) $dp = -\frac{p}{V}\left(\gamma - \frac{\Gamma^2}{g}\right)dV + \frac{\Gamma^2 p}{gT}dT$, $dS = \frac{p\Gamma}{gT}dV + \frac{pV}{gT^2}dT$. よって $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{pV}{gT}$

(3) $dV = \frac{1}{p(g\gamma - \Gamma^2)}\left(\frac{\Gamma pV}{T}dT - gVdp\right)$, $dS = \frac{1}{T(g\gamma - \Gamma^2)}\left(\frac{\gamma pV}{T}dT - \Gamma Vdp\right)$. よって $C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{\gamma pV}{(g\gamma - \Gamma^2)T}$.

(4) $\frac{C_p}{C_V} = \frac{g\gamma}{g\gamma - \Gamma^2}$

練習問題 5.9

1. $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \pm\frac{b}{\sqrt{3}}, \pm\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ (± : 全ての組み合わせ) で $xyz = \pm\frac{abc}{3\sqrt{3}}$ より最大値は $\frac{abc}{3\sqrt{3}}$ 最小値は $-\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

2. 3 方向の辺の長さを x, y, z として, xyz を $x + y + z = l$(一定) の元で $x, y, z \geqq 0$ において最大化する. または, $f(x, y) = xy(l - x - y)$ の最大を求めても良い.

3. 正三角形．三角形の 3 頂点で切られた各円弧の中心角を $\theta, \phi.\psi$ とし半径を a とすると面積は $\dfrac{a^2}{2}(\sin\theta + \sin\phi + \sin\psi)$．これを $\theta + \phi + \psi = 2\pi$ の条件で最大化する ($\psi = 2\pi - \theta - \phi$ を代入しても良い).

4. 正三角形．円周上の 3 接点で切られた各円弧の中心角を $2\theta, 2\phi, 2\psi$ とし半径を a とすると面積は $a^2(\tan\theta + \tan\phi + \tan\psi)$. これを $\theta + \phi + \psi = 2\pi$ の条件で最大化する．

5. $2S = ax+by+cz$ の元で $x^2+y^2+z^2$ を最大化する．解は $x = \dfrac{2aS}{a^2+b^2+c^2}$, $y = \dfrac{2bS}{a^2+b^2+c^2}$, $z = \dfrac{2cS}{a^2+b^2+c^2}$.

6. $L = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j - \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1\Big)$ とおく．対称行列 $[a_{ij}] = A$ と表すと，$L_{x_i} = 0$, $(1 \leqq i \leqq n)$ の条件は $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$．よって，単位固有ベクトルで最大・最小をとる．よって，A の最大固有値が最大値で最小固有値が最小値.

7. $Q(p, q)$ は下に凸な p, q の 2 次関数で，その最小値を求める．$p = \dfrac{\overline{a}\overline{b} - \overline{ab}}{\overline{a}^2 - \overline{a^2}}$，$q = \dfrac{\overline{a}\,\overline{ab} - \overline{a^2}\,\overline{b}}{\overline{a}^2 - \overline{a^2}}$.

8. (1) $f_x = f_y = f_z = 0$ となるのは $(0,0,0), (1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)$ で $(0,0,0)$ はマクローリン展開 $f(x,y,z) = xyz + R_4$ より極大点でも極小点でもない．残りはいずれも，ヘッセ行列の 3 固有値がすべて正なので極小点で，極値は -1

(2) $f_x = f_y = f_z = 0$ となるのは $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (複号同順) の 2 点. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ではヘッセ行列の固有値はすべて負なので極大値 (最大値) $\dfrac{\sqrt{6}e}{2}$ をとり，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ ではヘッセ行列の固有値はすべて正なので極小値 (最小値) $-\dfrac{\sqrt{6}e}{2}$ をとる.

第6章

問 6.1 $D = \{(x,y)\,|\,g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x), x \in I\}$ のとき，g_1, g_2, I を示す．

(1) $g_1(x) = \dfrac{1}{2}x$, $g_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 3-x, & 1 < x \leqq 2 \end{cases}$, $I = [0,2]$

(2) $g_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3, & -4 \leqq x \leqq 0 \\ 2x-3, & 0 < x \leqq 4 \end{cases}$, $g_2(x) = \begin{cases} 2x+3, & -4 \leqq x \leqq 0 \\ \frac{1}{2}x+3, & 0 < x \leqq 4 \end{cases}$, $I = [-4,4]$

(3) $g_1(x) = -\sqrt{25-x^2}$, $g_2(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x, & -3 \leqq x \leqq 3 \\ \sqrt{25-x^2}, & 3 < x \leqq 5 \end{cases}$, $I = [-3,5]$

問 6.2 (1) $\dfrac{9}{2}$ (2) $\dfrac{3}{8}$ (3) $\dfrac{1}{24}$ (4) $\dfrac{1}{24}$

問 6.3 (1) $D = \left\{(x,y)\,|\,\dfrac{1}{2}x \leqq y \leqq \sqrt{x},\ 0 \leqq x \leqq 4\right\}$, $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\right) dx$

(2) $D = \left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq 1\right\}$, $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx$

問 6.4 (1) $\dfrac{e^{bx}-e^{ax}}{b-a}$ $(a \neq b)$, xe^{ax} $(a = b)$

(2) $\dfrac{a}{a^2-b^2}(\cos bx - \cos ax)$ $(a \neq b)$, $\dfrac{1}{2}x \sin ax$ $(a = b)$

問 6.5 (1) xe^{ax} (2) $f_n(x) = \dfrac{x^n e^x}{n!}$

問 6.6 積分の基本性質 (線形性) より示される．

問 6.7 $\mathcal{D} = \{(x,y,z)\,|\,g_1(x,y) \leqq z \leqq g_2(x,y), x \in E\}$ のとき，g_1, g_2, E を示す．

(1) (a) $R \geqq 2$ のとき，$g_1(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, $g_2(x,y) = R + \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $E = \left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 4(R-1)\right\}$ (b) $1 \leqq R < 2$ のとき，$g_1(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2+y^2), & x^2+y^2 \leqq 4(R-1) \\ R - \sqrt{R^2-x^2-y^2}, & 4(R-1) < x^2+y^2 \leqq R^2 \end{cases}$, $g_2(x,y) = R + \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $E = \left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq R^2\right\}$

(2) $g_1(x,y) = x$, $g_2(x,y) = a - \sqrt{x^2+y^2}$, $E = \left\{(x,y)\,|\,y^2 \leqq a^2 - 2ax,\ x \geqq 0\right\}$,

(3) $g_1(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, $g_2(x,y) = 1 - x - y$, $E = \left\{(x,y)\,|\,\dfrac{1}{a^2}\left(x - \dfrac{a^2}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{b^2}\left(y - \dfrac{b^2}{2}\right)^2 \leqq 1 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right)\right\}$

問 6.8 (1) $\dfrac{abc}{3}(a^2+b^2+c^2)$ (2) $\dfrac{\pi}{16}$ (3) $\dfrac{1}{6}$

問 6.9 (1) $\dfrac{1}{15}$ (2) $2\pi\log\dfrac{b}{a}$ (3) $2\pi\left(b^2\log b - a^2\log a\right) - \pi(b^2-a^2)$
(4) $\pi(\phi(b^2)-\phi(a^2))$

問 6.10 直交座標変換 Φ : $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{u}$ では $\det[\mathrm{D}\Phi] = \det P = \pm 1$ である.

問 6.11 $\dfrac{\pi a^2 h\rho_0}{3}$, $\left(0, 0, \dfrac{h}{4}\right)$

問 6.12 $\left(\dfrac{a}{4}, \dfrac{b}{4}, \dfrac{c}{4}\right)$

問 6.13 (1) $x = \sqrt{2}u$ と変数変換 (2) $x = u^2$ と変数変換

問 6.14 $\dfrac{\pi R^2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}$

問 6.15 $2R^2$

練習問題 6.2 **1.** (1) $\dfrac{25}{6}$ (2) $\dfrac{1}{2}+2\log 2-\dfrac{3}{2}\log 3$ (3) $\dfrac{36}{5}$ (4) $-\dfrac{3^5}{40}$ (5) 0
(6) $\dfrac{16}{3}$ (7) $\dfrac{2}{3}$ (8) $\dfrac{32}{15}\sqrt{2}$ (9) $e-\dfrac{5}{2}$ (10) $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

2. (1) $\dfrac{e-1}{4}$ (2) $\dfrac{1}{2}\log 2$ (3) $\dfrac{61}{3}$ (4) 2

3. (1) $\dfrac{abc}{6}(2a^2+2b^2+2c^2+3ab+3bc+3ca)$ (2) $\dfrac{1}{2}\log 2-\dfrac{5}{16}$ (3) $\dfrac{1}{2}$

4. (1) $\pi bc\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ (2) $\dfrac{4\pi}{3}abc$

5. (1) $\dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{a^2-x^2}-x^2\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}\right)$ (2) $\dfrac{\pi}{6}a^3$

練習問題 6.3

1. (1) $\dfrac{3\pi}{2}a^3$ (2) $\dfrac{\pi}{8}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)a^4$ (3) πa^2b^2 (4) $\dfrac{2}{9}(3\pi-4)$

2. (1) $\dfrac{\pi}{2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$ (3) $\dfrac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$ (4) $\dfrac{3\pi}{8}$ (5) $\dfrac{2}{3}\left(\pi-\dfrac{2}{3}\right)a^3$ (6) $\dfrac{\pi}{6a}$

3. (1) $\dfrac{\pi}{16}a^4$ (2) $\dfrac{5\pi}{8}a^4$ (3) $\dfrac{2\pi}{3}a^4$ (4) $\dfrac{5\pi}{64}a^4$

4. (1) $\dfrac{4\pi}{15}(a+b+c)$ (2) $4\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$ (3) $\dfrac{\pi}{16}a^4$ (4) $\pi\left(2-\dfrac{a^2-1}{a}\log\dfrac{a+1}{a-1}\right)$
(5) $R>b$ のとき $\dfrac{4\pi}{3R}\left(b^3-a^3\right)$, $R<a$ のとき $2\pi\left(b^2-a^2\right)$ (6) $\dfrac{\pi}{8}$

5. $\dfrac{16}{3}a^3$

6. $16\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)a^3$

7. $\left(\dfrac{9\pi}{64}a,\ \dfrac{3}{8}a,\ \dfrac{9\pi}{64}a\right)$

8. 立体を D とすると $\overline{x} = \dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\iiint_D x\,dxdydz = \dfrac{\pi}{\Omega}\int_a^b xf(x)^2\,dx$

(1) $\dfrac{1}{4}a$ (2) $\dfrac{5}{6}$

練習問題 6.4

1. (1) $\dfrac{\pi}{1-\alpha}$ (2) $\dfrac{\pi}{\alpha-1}$ (3) $2\pi a$

2. (1) $\dfrac{4\pi}{3-2\alpha}$ (2) $\dfrac{4\pi}{2\alpha-3}$ (3) $\dfrac{8}{15}$

3. (1) 0 (2) 1

4. $\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}$

5. (1) $\dfrac{8}{15}$ (2) $2\log(1+\sqrt{2})$ (3) π (4) $\dfrac{\pi}{4a^2}$ (5) $-\pi$ (6) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

(7) $\dfrac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$ (6.(6) 参照) (8) $\dfrac{\alpha}{2\sin\alpha}$

6. (1) $\dfrac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}$ (2) π^2a^2 (3) $\pi\left(2+\dfrac{1-a^2}{a}\log\dfrac{1+a}{1-a}\right)$

(4) $2\pi\left(b^2-\dfrac{R^2}{3}-\dfrac{2a^3}{3R}\right)$ (5) $\dfrac{1}{2}\log 2$ (6) $\dfrac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}$

7. $\dfrac{1}{q}B(p,q+1) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(1+p+q)}$

8. $\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(1+p+q+r)}$

練習問題 6.5

1. (1) $\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{2}{3}$ (3) $\dfrac{2}{3}$

2. (1) $U = y\log x + \cos y$ (2) $U = x^2+xy+y^2$

3. (1) $2\pi^2Rr^2$ (2) $4\pi^2Rr$

4. (1) $\dfrac{1}{2}\pi a^2$ (2) $\dfrac{2\pi}{3}\left[(1+a^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$ (3) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{ab}(a+b)$

(4) $\dfrac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1)ab\right)$

5. (1) $4a^2$ (2) $8a^2$

6. (1) 4π (2) $2\pi h$

第7章

問 7.1 以下を用いる．(1) $\dfrac{\log x}{x^{\delta}} \to 0 \ (x \to \infty)$ (2) $\dfrac{1}{\log x} = o(1) \ (x \to \infty)$
(3) $\log(1+x) = x + o(x^2) \ (x \to 0)$ (4) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + o(x^2) \ (x \to 0)$

問 7.2 (1) 条件収束． (2) 条件収束． (3) $p \leqq 1$ のとき条件収束，$p > 1$ のとき絶対収束.

問 7.3 極限関数 $f(x) = 0$ で，$f_n(x)$ の最大値は n であるから一様収束しない.

問 7.4 極限関数 $f(x) = 0$ で，$f_n(x)$ の最大値は $\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$ であるから一様収束しない.

問 7.5 $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ の収束半径は 1 で，$x = 1$ のとき右辺が収束することからアーベルの定理 7.33 を適用する.

練習問題 7.1

1. $\dfrac{611}{495}$

2. (1) $\dfrac{3}{4}$ (2) 収束しない． (3) $\dfrac{13}{6}$ (4) $\dfrac{1}{4}$ (5) 4 (6) 4

3. (1) 収束 (2) 発散 (3) 発散 (4) 収束 (5) 収束 (6) 収束 (7) $p > 1$ のとき収束 $p \leqq 1$ のとき発散 (8) 発散

4. 十分大きな n に対して，$a_n \geqq \dfrac{C}{n}$ (C は正の定数) となる.

5. (9) は収束しない．他は収束する.

6. コーシー・シュワルツの不等式 (例題 4.1 の注意) を用いる.

7. (1) $\dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{-1}{2k}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ を用いる.

(2) 例題 7.3 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\bigl(T_n - \log n\bigr)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\bigl(T_{2n} - \log(2n)\bigr)$ は同じ値に収束する.

(3) $\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2(2n-1)} + \dfrac{1}{4n} = \dfrac{1}{2}\Bigl(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}\Bigr)$ より示される.

8. $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$B = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ とする．$\beta_n = B - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ とおくと，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \cdots + a_k b_1) = a_1(B - \beta_n) + a_2(B - \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B - \beta_1)$

より，$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)B - S_n = a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1$ となる．ここで，$\beta_n \to 0\ (n \to \infty)$ と $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が絶対収束することを用いれば，右辺 $\to 0\ (n \to \infty)$ を示すことができる．

9. 定理 7.9 を用いて $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!},\ \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{b^n}{n!}$ が絶対収束することを示してから前問 8.を適用する．$c_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!} \cdot \dfrac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \dfrac{(a+b)^n}{n!}$ より結論を得る．

10. $\{a_m\}, \{b_n\}$ の順序を並べ替えたものを $\{a_{m_i}\}, \{b_{n_j}\}$ とする．任意の自然数 N に対して，$\{m_i, n_j\}\ \ (1 \leqq i \leqq N, 1 \leqq j \leqq N)$ の最大を N_1 とすれば，$\sum_{i=1,j=1}^{i=N,j=N} |a_{m_i} b_{n_j}| \leqq \sum_{m=1,n=1}^{m=N_1,n=N_1} |a_m b_n| = \Big(\sum_{m=1}^{m=N_1} |a_m|\Big)\Big(\sum_{n=1}^{n=N_1} |b_n|\Big)$ となり，絶対収束する．後半は，$c_n = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)$ とおいて，$c_1 + (c_2 - c_1) + \cdots + (c_n - c_{n-1}) + \cdots$ を考える． 定理 7.6 を考慮すれば結論を得る．

練習問題 7.2

1. $f(x) = 0,\ \ \dfrac{x}{1+nx} < \dfrac{1}{n}$ を用いる．

2. $g_n(x) = (1-x)x^n,\ h_n(x) = \dfrac{1}{n}$ として，$\sum_k g_k(x)h_k(x)$ に対してディリクレの定理 7.18 を用いる．

3. (1) $(-\infty, \infty)$ ただし，$x \neq -\dfrac{1}{n}\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$，　一様収束しない．

(2) $(-\infty, \infty)$　一様収束しない．　(3) $(-\infty, \infty)$　一様収束する．

(4) $(0, \infty)$　一様収束しない．

4. (1) 極限関数は $f(x) = 0$

(2) $p < 1$ のとき一様収束する．　$p \geqq 1$ のとき一様収束しない．

(3) $p < 2$ のとき項別積分可能．　$p \geqq 2$ のとき項別積分可能でない．

5. (1) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$　(2) 項別微分可能でない．

6. (前半) 定理 7.6 (1) の証明と同様

(後半) 例えば，$f_n(x) = (-1)^n(1-x^2)x^n\ (0 \leqq x \leqq 1)$

練習問題 7.3

1. (1) ∞　(2) 1　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(4) 0　(5) 4　(6) e^2　(7) 1

2. (1) $-1 < x < 5$　(2) $-3 \leqq x < 1$　(3) $-\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq \dfrac{1}{e}$

3. (1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{2^k} x^k$　(2) $\displaystyle 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$　(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k - 2^k}{k!} x^k$

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x^{2k}}{a^{2k+1}} + \frac{x^{2k+1}}{a^{2k+2}} \right)$　(5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

4. (1) $\dfrac{(-1)^{m-1} \cdot (2m+1)!}{m}$　$(n = 2m+1\ (m = 1, 2, \cdots)$ のとき$)$,　0　(その他)

(2) $(-1)^m 2^{2m+1} (2m)!$　$(n = 2m+1\ (m = 0, 1, 2 \cdots)$ のとき$)$,　0　(その他)

5. (1) $-\dfrac{20!}{6!}$　(2) 0

6. (1) $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(2) と (3) $\displaystyle x = (1 - x - x^2) \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ において，x^n の係数を比較する．

7. (1) 1

(2) $\displaystyle f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1}$ から，$(1+x)f'(x)$ のべき級数展開において，x^n の係数を求める．

(3) (2) の結果より．　(4) (3) の結果より．

8. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$ と前問 8.の結果を利用する．

9. (1) 0　(2) $3n$　(3) 0　(4) べき級数に表せたとして矛盾を導く．