## 第 1 章　実数　**練習問題詳解** (1)

A1.1　(1) $\dfrac{1}{6} = 0.1666\cdots = 0.1\dot{6}$　　(2) $\dfrac{2}{11} = 0.181818\cdots = 0.\dot{1}\dot{8}$

(3) $\dfrac{1}{7} = 0.1428571428571\cdots = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

A1.2　(1) $x = 1.\dot{2}\dot{3}$ とおくと

$100x = 123.232323\cdots$

$x = \quad 1.232323\cdots$ 辺々引いて $99x = 122$ だから $x = \dfrac{122}{99}$

(2) $x = 1.\dot{2}3\dot{4}$ とおくと

$1000x = 1234.234234\cdots$

$x = \quad 1.234234\cdots$ 辺々引いて $999x = 1233$ だから $x = \dfrac{1233}{999} = \dfrac{137}{111}$

A1.3　(1) $|-3| = 3$

(2) $e = 2.7182\cdots < 3$ だから $e - 3 < 0$. よって $|e-3| = -(e-3) = 3 - e$

(3) $\pi = 3.1415\cdots > 3$ だから $3 - \pi < 0$. よって $|3-\pi| + 3 = (\pi - 3) + 3 = \pi$

(4) $e = 2.7182\cdots > 2$, $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ だから $2 - e < 0$, $\sqrt{2} - 2 < 0$. よって

$|2-e| - |\sqrt{2}-2| = (e-2) - (2-\sqrt{2}) = e - 2 - 2 + \sqrt{2} = e + \sqrt{2} - 4$

(5) $||2-3|-5| = ||-1|-5| = |1-5| = |-4| = 4$

(6) $|2-|3-5|| = |2-|-2|| = |2-2| = |0| = 0$

A1.4　(1) $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{2^3} + \sqrt{3^2\cdot 2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{45} - \sqrt{20} = \sqrt{3^2\cdot 5} - \sqrt{2^2\cdot 5} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

(3) $3\sqrt{12} - \sqrt{\dfrac{3}{4}} = 3\sqrt{2^2\cdot 3} - \sqrt{\dfrac{3}{2^2}} = 6\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\sqrt{3} = \dfrac{12}{2}\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\sqrt{3} = \dfrac{11}{2}\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{6}(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) = \sqrt{2\cdot 3}(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) = 2\sqrt{2\cdot 3^2} - 3\sqrt{2^2\cdot 3} = 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$

(5) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2\cdot 3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$

(6) $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = 3\cdot 2 - 6\sqrt{2\cdot 3} + \sqrt{3\cdot 2} - 2\cdot 3 = -5\sqrt{6}$

## 第 1 章　実数　**練習問題詳解** (2)

A1.5　(1) $\dfrac{1}{\sqrt{11}} = \dfrac{1}{\sqrt{11}} \cdot \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \dfrac{\sqrt{11}}{11}$

(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{35}}{7}$

(3) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \cdot \dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{14+6\sqrt{5}}{9-5} = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$

A1.6　(1) $\sqrt{32}+\sqrt{49}-\sqrt{98} = \sqrt{4^2 \cdot 2}+\sqrt{7^2}-\sqrt{7^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2}+7-7\sqrt{2} = 7-3\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{60}-\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{5}} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$$= 2\sqrt{15}-\frac{1}{3}\sqrt{15}-\frac{1}{5}\sqrt{15} = \frac{30-5-3}{15}\sqrt{15} = \frac{22}{15}\sqrt{15}$$

B1.1　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+2} \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}+\frac{\sqrt{5}-2}{5-4}$$

$$= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-2)$$

$$= (\sqrt{5}-2)+(2-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)$$

$$= \sqrt{5}-1$$

# 第２章　１次関数　**練習問題詳解** (1)

A2.1　(1) $y = \dfrac{1}{2}x + 2$　$(0, 2)$, $(-4, 2)$ を通る．

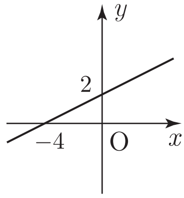
(2) $y = -3x - 1$　$(0, -1)$, $(-\dfrac{1}{3}, 0)$ を通る．

(3) $y = 3$　$x$ に関わらず常に $y = 3$.

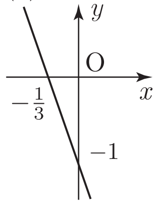
(4) $x - 2y + 4 = 0$　式変形すると

$y = \dfrac{1}{2}x + 2$ なので (1) と同じグラフ．

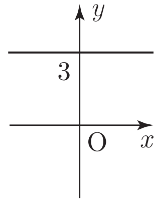
(1)(4)




(2)




(3)




A2.2　(1) $y = \dfrac{1}{2}x + 2$ で $x$ と $y$ を入れ替えて $x = \dfrac{1}{2}y + 2$. これを $y$ について解いて

$y = 2x - 4$ を得る．

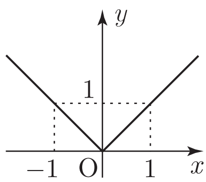
(2) $y = -3x - 1$ で $x$ と $y$ を入れ替えて $x = -3y - 1$. これを $y$ について解いて

$y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$ を得る．

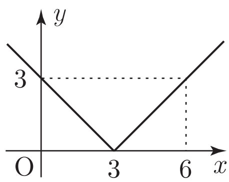
A2.3　いずれも絶対値を外した関数のグラフを描いて（$x$ 軸や $y$ 軸との交点に注意），

$x$ 軸より下の部分を $x$ 軸に関して対称移動させる．

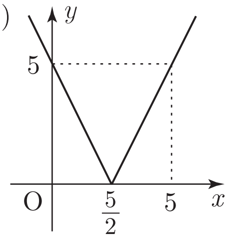
(1)




(2)




(3)

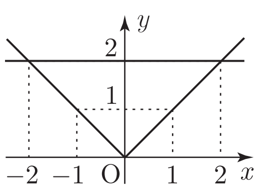



A2.4　(1) $y = |x|$ のグラフと $y = 2$ のグラフの交点の $x$ 座標を求めて $x = \pm 2$.

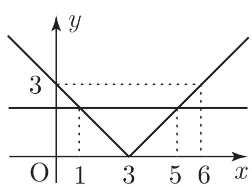
(2) $y = |x - 3|$ のグラフと $y = 2$ のグラフの交点の $x$ 座標を求めて $x = 1, 5$.

(3) $y = |5 - 2x|$ のグラフと $y = 1$ のグラフの交点の $x$ 座標を求めて $x = 2, 3$.

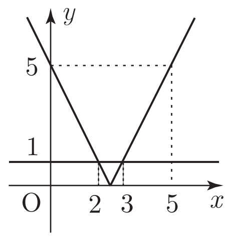
A2.4 (1) A2.5 (1) (2)




A2.4 (2) A2.5 (3)




A2.4 (3) A2.5 (4)



## 第２章　１次関数　**練習問題詳解** (2)

A2.5　（前ページ図参照）

(1) $y=|x|$ のグラフが $y=2$ のグラフより下にあるような $x$ を求めて $-2<x<2$.

(2) $y=|x|$ のグラフが $y=2$ のグラフより上にあるような $x$ を求めて $x<-2,\ 2<x$.

(3) $y=|x-3|$ のグラフが $y=2$ のグラフより下にあるような $x$ を求めて $1<x<5$.

(4) $y=|5-2x|$ のグラフが $y=1$ のグラフより上にあるような $x$ を求めて $x<2,\ 3<x$.

B2.1　(1) $y=|2x-6|$ のグラフが $y=x$ のグラフより下にあるような $x$ を求めて $2<x<6$.

(2) $y=|2x-4|$ のグラフが $y=x+1$ のグラフより上（交点も含む）にあるような

$x$ を求めて $x \leqq 1,\ 5 \leqq x$.

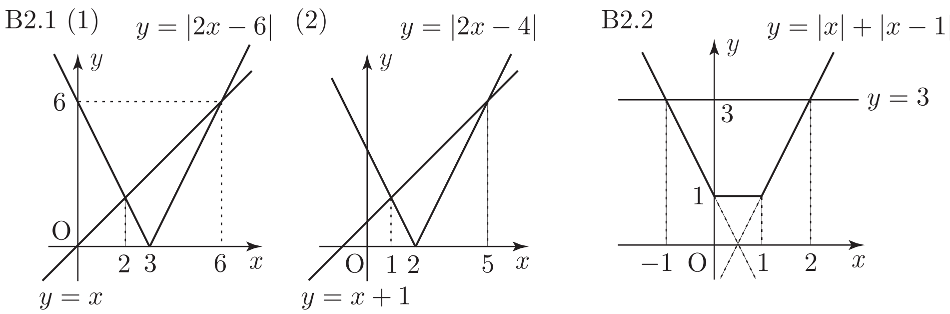
B2.2 $\begin{cases} |x|=x & (x \geqq 0) \\ |x|=-x & (x<0) \end{cases}$ $\begin{cases} |x-1|=x-1 & (x \geqq 1) \\ |x-1|=-x+1 & (x<1) \end{cases}$

これらをまとめると次のようになる.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\|x\|$ | $-x$ | 0 | $x$ | 1 | $x$ |
| $\|x-1\|$ | $-x+1$ | 1 | $-x+1$ | 0 | $x-1$ |
| $\|x\|+\|x-1\|$ | $-2x+1$ | 1 | 1 | 1 | $2x-1$ |

したがって $y=|x|+|x-1|$ のグラフは下図のようになるので,

$y=3$ との交点の $x$ 座標を求めて $x=-1,\ 2$.



# 第３章　２次関数　**練習問題詳解** (1)

A3.1　(1) $y = 2x^2 - 2 = 2(x+1)(x-1)$ より $y$ 切片 $(0, -2)$, 軸は $x = 0$（$y$ 軸）,

頂点は $(0, -2)$. $x$ 軸との交点は $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

(2) $y = (x+1)^2 + 2 = x^2 + 2x + 3$ より $y$ 切片 $(0, 3)$, 軸は $x = -1$, 頂点は $(-1, 2)$.

$D = -8 < 0$ より $x$ 軸との交点はない.

(3) $y = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$ より $y$ 切片 $(0, 2)$,

軸は $x = \dfrac{3}{2}$, 頂点は $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$. $x$ 軸との交点は $(1, 0)$, $(2, 0)$.

(4) $y = -x^2 + 2x + 2 = -(x-1)^2 + 3$ より $y$ 切片 $(0, 2)$, 軸は $x = 1$, 頂点は $(1, 3)$.

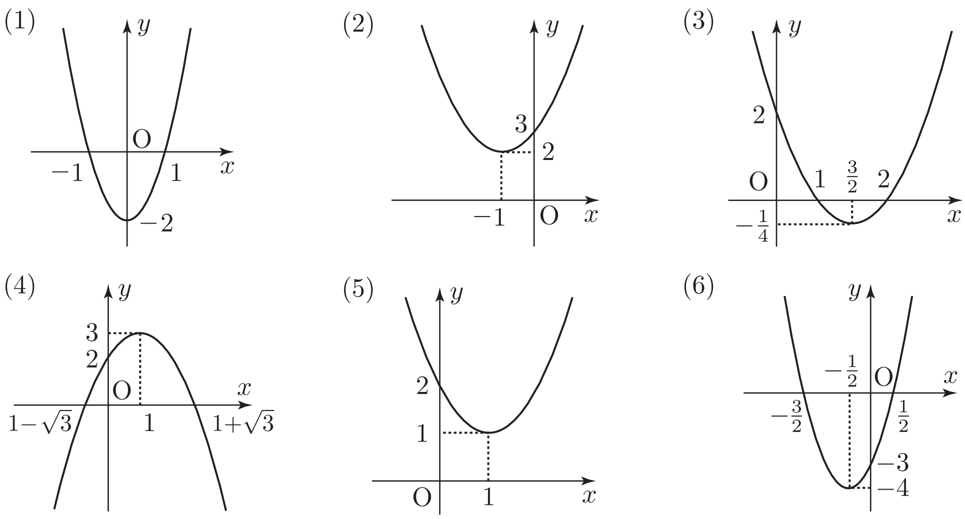
$x$ 軸との交点は $(1 - \sqrt{3}, 0)$, $(1 + \sqrt{3}, 0)$.

(5) $y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ より $y$ 切片 $(0, 2)$, 軸は $x = 1$, 頂点は $(1, 1)$.

$D = -4 < 0$ より $x$ 軸との交点はない.

(6) $y = 4x^2 + 4x - 3 = (2x+3)(2x-1) = 4\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - 4$ より $y$ 切片 $(0, -3)$,

軸は $x = -\dfrac{1}{2}$, 頂点は $\left(-\dfrac{1}{2}, -4\right)$. $x$ 軸との交点は $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$.

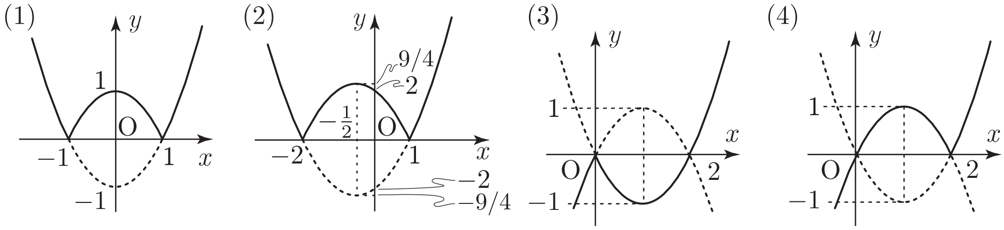



A3.2　(1) $y - (-1) = (x-2)^2 - 2(x-2) = x^2 - 6x + 8$ より $y = x^2 - 6x + 7$.

(2) $y = -(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$

(3) $y = (-x)^2 - 2(-x) = x^2 + 2x$

A3.3　いずれも絶対値を外した関数のグラフを描いて，$x$ 軸より下の部分を $x$ 軸に関して対称移動させる (A2.3 と同様)



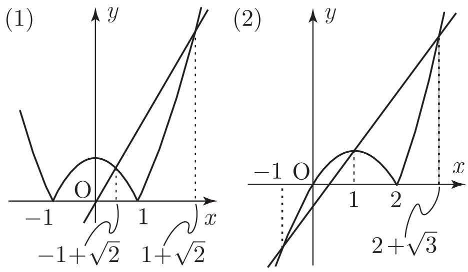

A3.4　A3.3 (1), (4) のグラフを利用

(1) $y = |x^2 - 1|$ のグラフが $y = 2x$ のグラフより下にあるような $x$ を求める．

これらの交点は $x = -1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$ だから $-1 + \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ である．

(2) $y = x|x - 2|$ のグラフが $y = 2x - 1$ のグラフより上にあるような $x$ を求める．

これらの交点は $x = -1, 1, 2 + \sqrt{3}$ だから $-1 < x < 1, 2 + \sqrt{3} < x$ である．




A3.5　$(f \circ f)(x) = f(x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 2$

$(f \circ g)(x) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1) + 1 = x^2$

$(g \circ f)(x) = g(x + 1) = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x$

$(g \circ g)(x) = g(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$

B3.1　(1) まず $x$ 軸方向に 2, $y$ 軸方向に 3 だけ平行移動させると

$y - 3 = 2(x - 2)^2 + 3(x - 2) + 4$ より $y = 2x^2 - 5x + 9$. さらにこれを

$y$ 軸に関して対称移動させると $y = 2(-x)^2 - 5(-x) + 9 = y = 2x^2 + 5x + 9$.

(2) まず $y$ 軸に関して対称移動させると $y = 2(-x)^2 + 3(-x) + 4 = 2x^2 - 3x + 4$.

さらにこれを $x$ 軸方向に 2, $y$ 軸方向に 3 だけ平行移動させると

$y - 3 = 2(x - 2)^2 - 3(x - 2) + 4$ より $y = 2x^2 - 11x + 21$.

B3.2　$y = (f \circ g)(x) = f(2x - 1) = (2x - 1) + 1 = 2x$ より $y = 2x$ の逆関数を求めて $y = \dfrac{x}{2}$.

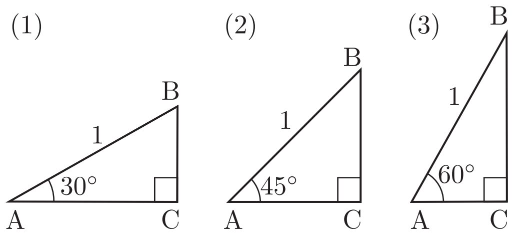
$y = (g \circ f)(x) = g(x + 1) = 2(x + 1) - 1 = 2x + 1$ より $y = 2x + 1$ の逆関数を求めて $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$.

# 第4章　三角関数1　**練習問題詳解** (1)

A4.1　(1) $A=30^\circ$ より $\mathrm{BC}:\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=1:2:\sqrt{3}$ で $\mathrm{AB}=1$ だから $\mathrm{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$

(2) $A=45^\circ$ より $\mathrm{BC}:\mathrm{AC}:\mathrm{AB}=1:1:\sqrt{2}$ で $\mathrm{AB}=1$ だから $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $A=60^\circ$ より $\mathrm{AC}:\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=1:2:\sqrt{3}$ で $\mathrm{AB}=1$ だから $\mathrm{AC}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$




A4.2　(1) $A=30^\circ$ より $\mathrm{BC}:\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=1:2:\sqrt{3}$ で $\mathrm{AC}=1$ だから $\mathrm{AB}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{BC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $A=60^\circ$ より $\mathrm{AC}:\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=1:2:\sqrt{3}$ で $\mathrm{AC}=1$ だから $\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{BC}=\sqrt{3}$

A4.3

| 度 | $30^\circ$ | $60^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $180^\circ$ | $225^\circ$ | $240^\circ$ | $300^\circ$ | $315^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 弧度 | $\dfrac{\pi}{6}$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\dfrac{2\pi}{3}$ | $\dfrac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\dfrac{5\pi}{4}$ | $\dfrac{4\pi}{3}$ | $\dfrac{5\pi}{3}$ | $\dfrac{7\pi}{4}$ |

A4.4　$17\pi=\pi+16\pi$, $-7\pi=\pi-8\pi$ より $\dfrac{17\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+4\pi$, $-\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}-2\pi$ で

$11\pi=3\pi+8\pi$, $-13\pi=3\pi-16\pi$ より $\dfrac{11\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi$, $-\dfrac{13\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}-4\pi$ だから

$\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{17\pi}{4}, -\dfrac{7\pi}{4}\right\}$,　$\left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{11\pi}{4}, -\dfrac{13\pi}{4}\right\}$

A4.5

| 弧度 | $0$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\dfrac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\dfrac{7\pi}{6}$ | $\dfrac{3\pi}{2}$ | $\dfrac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 度 | $0^\circ$ | $45^\circ$ | $90^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ | $210^\circ$ | $270^\circ$ | $330^\circ$ | $360^\circ$ |

A4.6

| $\theta$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $0$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $0$ |
| $\cos\theta$ | $-1$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-1$ |
| $\tan\theta$ | $0$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ | ／ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $0$ |

A4.7

| $\theta$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\cos\theta$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\tan\theta$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ | ／ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ |

A4.8　(1)-(3) は下図左参照，(4)-(6) は下図右参照.

(1) $\pi < 4 < 5 < 2\pi$ より $\cos 4 < \cos 5$ だから $\cos 5$.

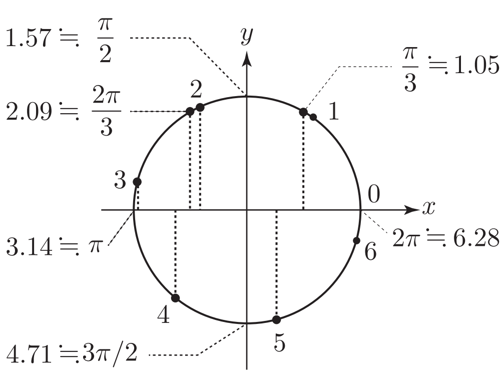
(2) $0 < \frac{\pi}{3} < 3 < \pi$ より $\cos 3 < \cos\frac{\pi}{3}$ だから　$\cos\frac{\pi}{3}$.

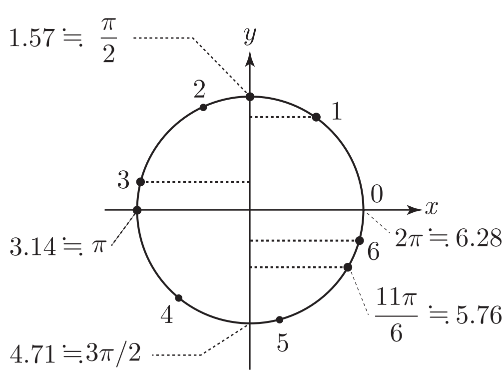
(3) $0 < 2 < \frac{2\pi}{3} < \pi$ より $\cos\frac{2\pi}{3} < \cos 2$ だから $\cos 2$.

(4) $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ より $\sin 1 < \sin\frac{\pi}{2}$ だから $\sin\frac{\pi}{2}$.

(5) $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ より $\sin\pi < \sin 3$ だから $\sin 3$.

(6) $\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < 6 < 2\pi$ より $\sin\frac{11\pi}{6} < \sin 6$ だから $\sin 6$

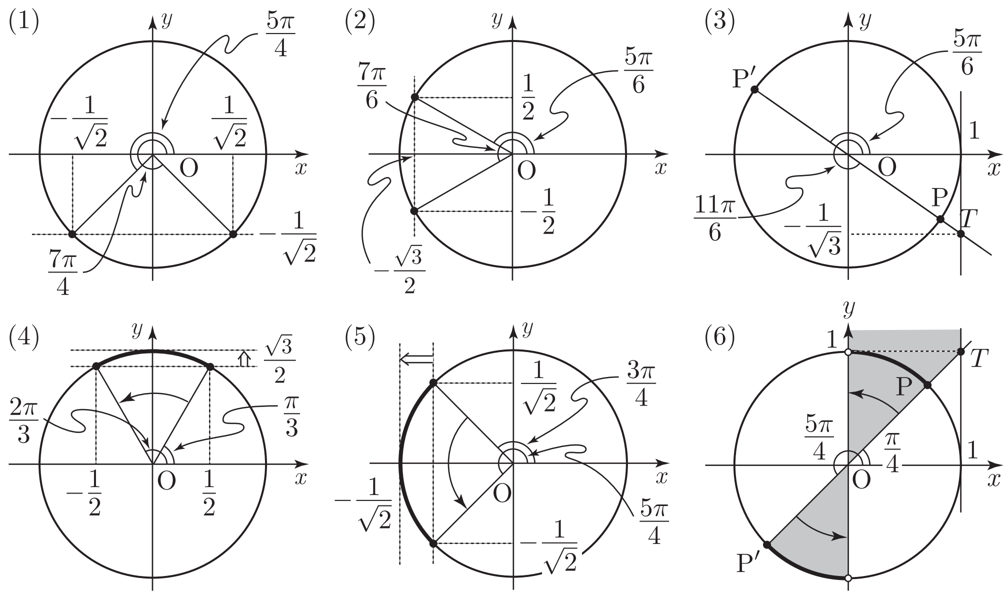


# 第 4 章　三角関数 1　**練習問題詳解** (3)

A4.9　（下図参照）　(1) $\dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$　(2) $\dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{7\pi}{6}$　(3) $\dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{11\pi}{6}$

(4) $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{2\pi}{3}$　(5) $\dfrac{3\pi}{4} < \theta < \dfrac{5\pi}{4}$　(6) $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$




B4.1　$\pi$ rad$= 180^\circ$ だから $\theta : \pi = a : 180$ より $\theta = \dfrac{\pi}{180}\,a,\quad a = \dfrac{180}{\pi}\theta$

B4.2　問 4.8 より $\ell = 4 \cdot \dfrac{\pi}{4} = \pi,\quad S = \dfrac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \dfrac{\pi}{4} = 2\pi$

## 第５章　三角関数２　**練習問題詳解** (1)

A5.1　(1) $\sin\dfrac{5\pi}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

(2) $\cos\dfrac{7\pi}{6} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \pi\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(問 5.3 (4) より)

(3) $\tan\dfrac{17\pi}{4} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

(4) $\sin\left(-\dfrac{23\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 8\pi\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A5.2　(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

A5.3　(1) $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

(3) (2) と $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2 a - 1$

(4) (2) と $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

(5) [三角関数の性質 2] (p.26) より $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ だから

$\cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - \sin\alpha\cdot\sin(-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

(6) [三角関数の性質 2] (p.26) より $\tan(-\beta) = -\tan\beta$ だから

$\tan(\alpha + (-\beta)) = \dfrac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\cdot\tan(-\beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\cdot\tan\beta}$

A5.4　(1) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

(2) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos^2\theta + (1-\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)\ \cos\theta}$

$$= \dfrac{\cos^2\theta + (1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta)}{(1-\sin\theta)\ \cos\theta} = \dfrac{2\ (1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)\ \cos\theta} = \dfrac{2}{\cos\theta}$$

(3) $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\theta} = \dfrac{2}{\sin 2\theta}$

## 第５章　三角関数２　**練習問題詳解** (2)

A5.4　(4) $\dfrac{1+\cos\theta}{1+\sin\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{(1+\cos\theta)(1-\sin\theta)-(1-\cos\theta)(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$$=\frac{(1+\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta\cdot\sin\theta)-(1-\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta\cdot\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{2\left(1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\cos\theta}=\frac{2(1-\tan\theta)}{\cos\theta}$$

(5) $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1\cdot\cos 2\theta=\cos 2\theta$

A5.5　(1) $\sin(p+q)=\sin p\cdot\cos q+\cos p\cdot\sin q$

$\sin(p-q)=\sin p\cdot\cos q-\cos p\cdot\sin q$ より

$\sin(p+q)-\sin(p-q)=2\cos p\cdot\sin q$ だから両辺を $\dfrac{1}{2}$ 倍すれば与式が得られる.

(2) $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}\cdots(*)$ を示す.

$\cos(p+q)=\cos p\cdot\cos q-\sin p\cdot\sin q$

$\cos(p-q)=\cos p\cdot\cos q+\sin p\cdot\sin q$ より

$\cos(p+q)+\cos(p-q)=2\cos p\cdot\cos q$ だから，ここで $p=\dfrac{A+B}{2}$, $q=\dfrac{A-B}{2}$

とおくと $p+q=A$, $p-q=B$ となるので (*) が得られる.

B5.1

(1) $\sin\dfrac{\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(3) $\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\dfrac{\pi}{3}\cdot\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$

$$=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=2-\sqrt{3}$$

[ (1), (2) を用いた別解]

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\dfrac{\pi}{12}}{\cos\dfrac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{6-2\sqrt{12}+2}{6-2}=2-\sqrt{3}$$

## 第５章　三角関数２　**練習問題詳解** (3)

B5.2　(1) $\sin^2\dfrac{7\pi}{3}+\cos^2\dfrac{\pi}{3}=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi\right)+\cos^2\dfrac{\pi}{3}=\sin^2\dfrac{\pi}{3}+\cos^2\dfrac{\pi}{3}=1$

(2) $\sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta+\dfrac{4\pi}{3}\right)$

$=\sin\theta+\left(\sin\theta\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}+\cos\theta\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)+\left(\sin\theta\cdot\cos\dfrac{4\pi}{3}+\cos\theta\cdot\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

$=\sin\theta+\left(\sin\theta\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\cos\theta\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)+\left(\sin\theta\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\cos\theta\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\sin\theta+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\theta=0\cdot\sin\theta+0\cdot\cos\theta=0$

B5.3　(1) $\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cdot\cos\theta+\cos 2\theta\cdot\sin\theta$

$=2\sin\theta\cdot\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\cdot\sin\theta=2\sin\theta\cdot(1-\sin^2\theta)+(1-2\sin^2\theta)\cdot\sin\theta$

$=2\sin\theta-2\sin^3\theta+\sin\theta-2\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(2) $\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cdot\cos\theta-\sin 2\theta\cdot\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cdot\cos\theta-2\sin^2\theta\cdot\cos\theta=(2\cos^2\theta-1)\cdot\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cdot\cos\theta$

$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\cos\theta+2\cos^3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

B5.4　(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos\theta+\cos\dfrac{\pi}{2}\cdot\sin\theta=1\cdot\cos\theta+0\cdot\sin\theta=\cos\theta$

(2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos\theta-\sin\dfrac{\pi}{2}\cdot\sin\theta=0\cdot\cos\theta-1\cdot\sin\theta=-\sin\theta$

(3) $\tan(\pi+\theta)=\dfrac{\tan\pi+\tan\theta}{1-\tan\pi\cdot\tan\theta}=\dfrac{0+\tan\theta}{1-0\cdot\tan\theta}=\tan\theta$

B5.5　$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\sin\dfrac{A-B}{2},\ \cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\sin\dfrac{A-B}{2}$

だから $A=x+h,\ B=x$ とおくと次が得られる.

$$\sin(x+h)-\sin x=2\cos\frac{(x+h)+x}{2}\cdot\sin\frac{(x+h)-x}{2}=2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}\cdots\ (1)$$

$$\cos(x+h)-\cos x=-2\sin\frac{(x+h)+x}{2}\cdot\sin\frac{(x+h)-x}{2}=-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}\cdots\ (2)$$

## 第６章　三角関数３　**練習問題詳解** (1)

A6.1　(1) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}\sin(x+\alpha) = 2\sin(x+\alpha)$ であり

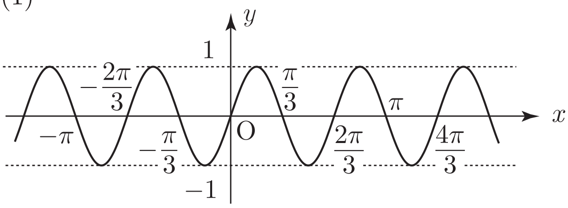
$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ だから $y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

(2) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\sin(x+\alpha) = 2\sin(x+\alpha)$ であり

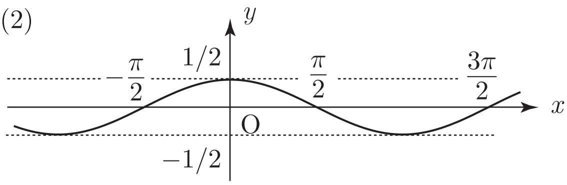
$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$ だから $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

A6.2　グラフは下図．周期は (1) $\dfrac{2\pi}{3}$ (2) $2\pi$ (3) $\dfrac{\pi}{2}$ (4) $\dfrac{2\pi}{3}$ (5) $2\pi$ (6) $\dfrac{\pi}{2}$.

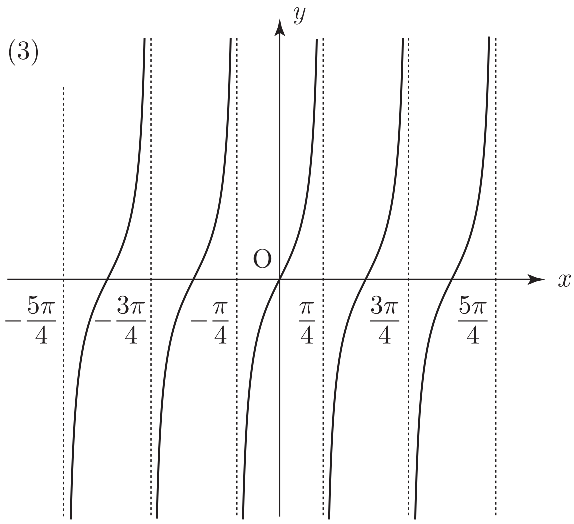
(1)



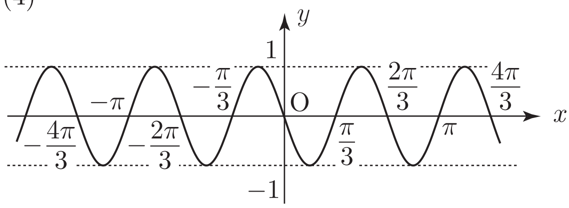

(2)



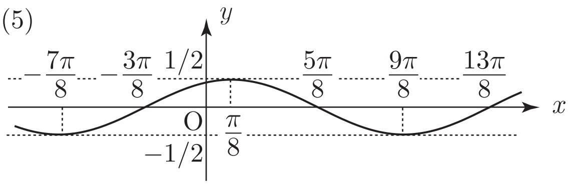

(3)



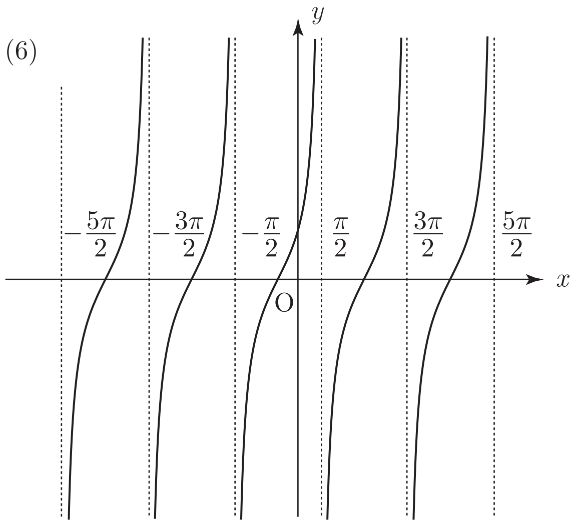

(4)




(5)



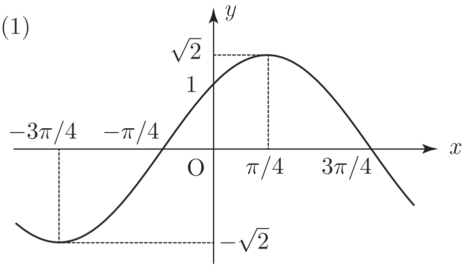

(6)



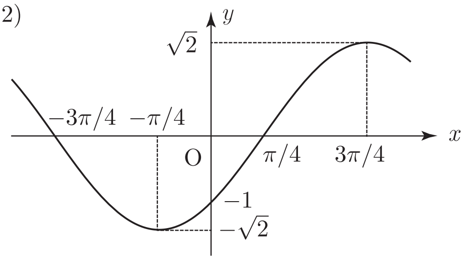
A6.3　グラフは下のようになる．

なお，(1) $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$　(2) $y = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$　(3) $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

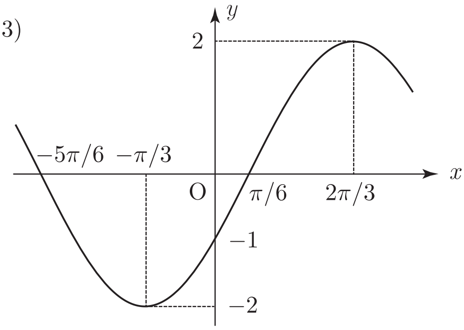
(1)




(2)




(3)




B6.1　(1) $-\dfrac{\pi}{3}$　(2) $\dfrac{\pi}{4}$　(3) $\dfrac{\pi}{3}$

B6.2　(1) $\cot\theta \cdot \sin\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \sin\theta = \cos\theta$

(2) $\mathrm{cosec}\,\theta - \cot\theta \cdot \cos\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \cos\theta = \dfrac{1 - \cos^2\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta} = \sin\theta$

(3) $\mathrm{cosec}\,\theta - \sec\theta \cdot \cot\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$

(4) $\sin^3\theta \cdot \mathrm{cosec}\,\theta + \sec\theta \cdot \cos^3\theta = \sin^3\theta \cdot \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta} \cdot \cos^3\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

# 第７章　指数関数　**練習問題詳解** (1)

A7.1　(1) $1$　(2) $\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$　(3) $(7^{-1})^{-2}=7^2=49$　(4) $\dfrac{1}{(-3)^2}=\dfrac{1}{9}$

(5) $(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$　(6) $(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=27$　(7) $(2^4)^{-\frac{3}{4}}=2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$

A7.2　(1) $a^{3-\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}}$　(2) $a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{7}{12}}$　(3) $a^{\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}}=a^{\frac{13}{6}}$　(4) $(a^{-3})^{\frac{1}{5}}=a^{-\frac{3}{5}}$

(5) $\dfrac{1}{a^{\frac{4}{3}}}=(a^{\frac{4}{3}})^{-1}=a^{-\frac{4}{3}}$　(6) $a^6\cdot a^{-2}=a^{6-2}=a^4$　(7) $a^{(-5)(-2)}=a^{10}$

(8) $(a\sqrt{a})^{\frac{1}{2}}=(a^1\cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(a^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}}$　(9) $a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{3}{8}}a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{2+3-4}{8}}=a^{\frac{1}{8}}$

A7.3　(1) $a^2a^{-3}a^5b^{-2}b^4=a^{2-3+5}b^{-2+4}=a^4b^2$　(2) $a^{\frac{1}{5}}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}\beta^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{8}{15}}b^{\frac{3}{4}}$

(3) $(a^{-2}b^{-1})^{-3}=a^{(-2)(-3)}b^{(-1)(-3)}=a^6b^3$　(4) $(\sqrt{a^3b^2}\cdot\sqrt[4]{ab^{-2}})^{\frac{1}{3}}=((a^3b^2)^{\frac{1}{2}}(ab^{-2})^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$

$=(a^3b^2)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}(ab^{-2})^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}=(a^3b^2)^{\frac{1}{6}}(ab^{-2})^{\frac{1}{12}}=a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{2}{6}}a^{\frac{1}{12}}b^{-\frac{2}{12}}=a^{\frac{6+1}{12}}b^{\frac{4-2}{12}}=a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{6}}$

(5) $(a^2b)^{\frac{1}{3}}(a^3b^2)^{\frac{1}{4}}(a^5b^{-2})^{-\frac{1}{12}}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{5}{12}}b^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{8+9-5}{12}}b^{\frac{2+3+1}{6}}=a^1b^1=ab$

A7.4　(1) $\left(\dfrac{81}{25}\right)^{-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8}}=\left(\dfrac{81}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}=(3^45^{-2})^{-\frac{1}{2}}=3^{4(-\frac{1}{2})}5^{(-2)(-\frac{1}{2})}=3^{-2}5^1=\dfrac{5}{9}$

(2) $(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2=a^1-b^1=a-b$　(3) $2^{\frac{2}{3}}5^{-\frac{1}{3}}2^{-\frac{5}{3}}5^{-\frac{2}{3}}=2^{\frac{2-5}{3}}5^{-\frac{1+2}{3}}=2^{-1}5^{-1}=\dfrac{1}{10}$

A7.5　(1)(3)(5) $2<e<3<\pi<4<5$ に注意して ($e=2.7182818\cdots$, $\pi=3.1415926\cdots$)

(1)(3) は底が 1 より大きいから指数が小さい順に並べればよい．

(1) $2^2<2^e<2^3<2^\pi<2^4<2^5$　(3) $e^2<e^e<e^3<e^\pi<e^4<e^5$

(5) は底が 1 より小さいので指数が大きい順に並べればよい． $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4<\left(\dfrac{1}{2}\right)^\pi<\left(\dfrac{1}{2}\right)^3<\left(\dfrac{1}{2}\right)^e<\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

(2) $\sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{81}=3^{\frac{4}{5}}$, $\sqrt[7]{243}=3^{\frac{5}{7}}$ で，底が 3 $(>1)$ で $\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{7}<\dfrac{4}{5}$ だから $\sqrt[3]{9}<\sqrt[7]{243}<\sqrt[5]{81}$

(4) $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $9^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[6]{3^5}=3^{\frac{5}{6}}$ で，底が 3 $(>1)$ で $\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{6}$ だから $\sqrt{3}<9^{\frac{1}{3}}<\sqrt[6]{3^5}$

(6) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{\dfrac{1}{8}}=2^{-\frac{3}{4}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}=2^{-\frac{2}{3}}$ で，底が 2 $(>1)$ で $-\dfrac{3}{4}<-\dfrac{2}{3}<-\dfrac{1}{2}$ だから $\sqrt[4]{\dfrac{1}{8}}<\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}<\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

A7.6　(1) $125=5^3$ だから $5^{2x-3}=5^3$．よって $2x-3=3$ だから $2x=6$ より $x=3$

(2) $4=2^2$, $8=2^3$ だから $2^{2x}=2^3$．よって $2x=3$ より $x=\dfrac{3}{2}$

(3) $\dfrac{1}{9}=3^{-2}$, $27=3^3$ だから $3^{-2x}>3^3$．$y=3^x$ は増加関数なので $-2x>3$ だから $x<-\dfrac{3}{2}$.

## 第 7 章　指数関数　**練習問題詳解** (2)

A7.7　(1) $2^x = t$ とおくと $t > 0$．また，$2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$ だから

（与式）$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t-1) = 0$．よって $t = 1, 4$ ($t > 0$ をみたす).

$t = 2^x$ だから $2^x = 1$ より $x = 0$, $2^x = 4$ より $x = 2$．従って $x = 0, 2$.

(2) $2^x = t$ とおくと $t > 0$．また，$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = t^2$，$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x = 2t$ だから

（与式）$\Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-4) = 0$．よって $t = 2, 4$ ($t > 0$ をみたす).

$t = 2^x$ だから $2^x = 2$ より $x = 1$, $2^x = 4$ より $x = 2$．従って $x = 1, 2$.

(3) $2^x = t$ とおくと $t > 0$．また，$2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$ だから（与式）$\Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (t+3)(t-2) = 0$．よって $t = -3, 2$ だが $t > 0$ だから $t = 2$．$t = 2^x$ より $x = 1$.

(4) $2^x = t$ とおくと $t > 0$．また，$2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$ だから（与式）$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 > 0$

$\Leftrightarrow (t+2)(t-4) > 0$. よって $t < -2, 4 < t$ だが $t > 0$ だから $t > 4$ である.

従って $t = 2^x$ だから $2^x > 4$ より $x > 2$.

B7.1　(1) $3^{-x} = t$ とおくと $t > 0$．また，$9^{-x} = (3^2)^{-x} = (3^{-x})^2 = t^2$ だから

（与式）$\Leftrightarrow 3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow (3t-1)(t-3) = 0$．よって $t = \dfrac{1}{3}, 3$ ($t > 0$ をみたす).

$t = 3^{-x}$ だから $3^{-x} = \dfrac{1}{3}$ より $x = 1$, $3^{-x} = 3$ より $x = -1$．従って $x = \pm 1$.

(2) $5^x = t$ とおくと $t > 0$．また，$5^{1+x} = 5 \cdot 5^x = 5t$, $5^{1-x} = 5 \cdot (5^x)^{-1} = \dfrac{5}{t}$ だから（与式）

$\Leftrightarrow 5t + \dfrac{5}{t} - 26 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 26t + 5 = 0 \Leftrightarrow (5t-1)(t-5) = 0$．よって $t = \dfrac{1}{5}, 5$ ($t > 0$ を

みたす)．$t = 5^x$ だから $5^x = \dfrac{1}{5}$ より $x = -1$, $5^x = 5$ より $x = 1$．従って $x = \pm 1$.

(3) $3^x = t$ とおくと $t > 0$．また，$9^x = t^2$, $3^{x+1} = 3t$ だから （与式）$\Leftrightarrow t^2 - 3t - 54 > 0$

$\Leftrightarrow (t+6)(t-9) > 0$．よって $t < -6, 9 < t$ だが $t > 0$ より $t > 9$. 従って $3^x > 9$ より $x > 2$.

(4) $e^{x^2+x} \cdot e^{2x+2} = e^{x^2+x+2x+2} = e^{x^2+3x+2}$ だから（与式）$\Leftrightarrow e^{x^2+3x+2} = 1$

従って $x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1) = 0$ より $x = -2, -1$.

B7.2　(1) $e^{\sin^2 x} \cdot e^{\cos^2 x} = e^{\sin^2 x + \cos^2 x} = e^1 = e$

(2) $\sin^2 e^x + \cos^2 e^x = 1 \qquad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

(3) $\dfrac{e^{\cos^4 x}}{e^{\sin^4 x} \cdot e^{\cos 2x}} = e^{\cos^4 x - \sin^4 x - \cos 2x}$．ここで $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2$

$= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x$ だから

$e^{\cos^4 x - \sin^4 x - \cos 2x} = e^{\cos 2x - \cos 2x} = e^0 = 1$

# 第８章　対数関数　**練習問題詳解** (1)

A8.1　(1) 底が $3(>1)$ より増加関数で，$\dfrac{1}{7}<\dfrac{1}{5}<1<5<7$ だから

$$\log_3\frac{1}{7}<\log_3\frac{1}{5}<\log_3 1<\log_3 5<\log_3 7$$

(2) 底が $\dfrac{1}{3}(<1)$ より減少関数で，$\dfrac{1}{7}<\dfrac{1}{5}<1<5<7$ だから

$$\log_{\frac{1}{3}}7<\log_{\frac{1}{3}}5<\log_{\frac{1}{3}}1<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{7}$$

A8.2　(1) $\log_2 4=2$　(2) $\log_2\dfrac{1}{4}=-2$　(3) $\log_5 125=3$　(4) $\log_3\dfrac{1}{9}=-2$　(5) $\log_8\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}$

A8.3　(1) $2^3=8$　(2) $2^0=1$　(3) $2^{-3}=\dfrac{1}{8}$　(4) $64^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{8}$

A8.4　(1) $x=\log_2 2^4=4$　(2) $x=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$　(3) $x=\log_2 2^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2}$

(4) $x=\dfrac{\log_7\frac{1}{7}}{\log_7 49}=\dfrac{\log_7 7^{-1}}{\log_7 7^2}=\dfrac{-1}{2}$　(5) $x=0$　(6) $x=5^{-1}=\dfrac{1}{5}$　(7) $x^1=2$ より $x=2$

(8) $x^{\frac{2}{3}}=4$ なので $x^{\frac{2}{3}}=(x^{\frac{1}{3}})^2,\ 4=2^2$ より $x^{\frac{1}{3}}=2$ だから $x=(x^{\frac{1}{3}})^3=2^3=8$

A8.5　(1) $\log_2\dfrac{4}{3}\cdot 6=\log_2 8=3$　(2) $\log_2\dfrac{24}{3}=\log_2 8=3$　(3) $\log_2\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\log_2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$

(4) $\dfrac{\log_3 27}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2}=\dfrac{3\log_3 3}{2\log_3 3}=\dfrac{3}{2}$ (5) $\log_3 4\cdot\dfrac{1}{36}=\log_3\dfrac{1}{9}=-2$　(6) $\log_3\dfrac{1}{3}=-1$

(7) $\log_5\sqrt{10}-\log_5 2^{\frac{1}{2}}=\log_5\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\log_5\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}$　(8) $\dfrac{\log_{10}4^2}{\log_{10}4^3}=\dfrac{2\log_{10}4}{3\log_{10}4}=\dfrac{2}{3}$

A8.6　(1) 真数は正であるので $x>0$ かつ $x-4>0$ すなわち $x>4\cdots(*)$．また

$\log_5 x+\log_5(x-4)=\log_5 x(x-4)$ より（与式）$\Leftrightarrow x^2-4x=5^1$

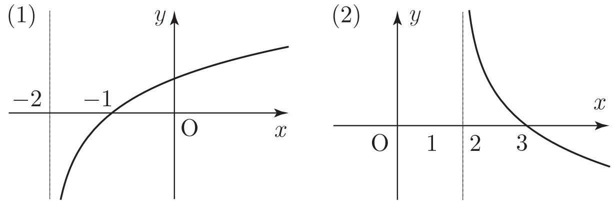
$\Leftrightarrow x^2-4x-5=0\Leftrightarrow(x+1)(x-5)=0$．これを解いて $x=-1,5$. $(*)$ より $x=5$.

(2) 真数は正であるので $x+1>0$ すなわち $x>-1\cdots(*)$. また底が $2(>1)$ だから

（与式）$\Leftrightarrow x+1<2^4=16\Leftrightarrow x<15$. $(*)$ より $-1<x<15$.

A8.7　(1) $y=\log_2 x$ のグラフを $x$ 軸方向に $-2$ だけ平行移動したもの

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ のグラフを $x$ 軸方向に 2 だけ平行移動したもの



## 第 8 章　対数関数　**練習問題詳解** (2)

B8.1　(1) $\log x = \log e^{\log 5} = \log 5 \cdot \log e = \log 5$ より $x = 5$. 一般に $a^{\log_a x} = x$.

(2) $x = 5 \log e = 5$　(3) $x = \pi \log e = \pi$　(4) (1) と同様にして $x = \pi$.

(5) (1) と同様にして $e^{\log \pi} = \pi$ だから $x = \sin \pi = 0$.

B8.2　(1) 真数は正であるので $x - 3 > 0$ かつ $x - 4 > 0$ すなわち $x > 4 \cdots (*)$.

また（与式）$\Leftrightarrow \log_2 (x-3)(x-4) < 1$ で底が $2(>1)$ だから $x^2 - 7x + 12 < 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) < 0$. これを解いて $2 < x < 5$. $(*)$ より $4 < x < 5$.

(2) 真数は正であるので $x - 2 > 0$ かつ $x + 4 > 0$ すなわち $x > 2 \cdots (*)$.

また（与式）$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} (x-2)^2 > \log_{\frac{1}{3}} (x+4)$ で底が $\dfrac{1}{3}(<1)$ だから $(x-2)^2 < x + 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x < 0 \Leftrightarrow x(x-5) < 0$. これを解いて $0 < x < 5$.

$(*)$ より $2 < x < 5$.

B8.3　(1) 底の変換で底を 3 にそろえて

$$\frac{\log_3 24}{\log_3 2} \cdot \log_3 2^3 - \log_3 (2^2)^{\frac{9}{2}} = \frac{3 \log_3 2 \cdot \log_3 24}{\log_3 2} - \log_3 2^9 = 3 \log_3 24 - \log_3 2^9$$

$$= \log_3 (2^3 \cdot 3)^3 - \log_3 2^9 = \log_3 \frac{2^9 \cdot 3^3}{2^9} = \log_3 3^3 = 3$$

(2) $\log (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) - \log (\sin^2 x - \cos^2 x)$

$$= \log (\sin^2 x - \cos^2 x) - \log (\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$$

B8.4　(1) $\log_a M = p$, $log_a N = q$ とおくと $M = a^p$, $N = a^q$ だから $MN = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$.

従って $log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$

(2) $\log_a M = p$ とおくと $M = a^p$. 従って

$$\log_a M^r = \log_a (a^p)^r = \log_a a^{pr} = pr = rp = r \log_a M$$

# 第 9 章　有理関数と無理関数　**練習問題詳解** (1)

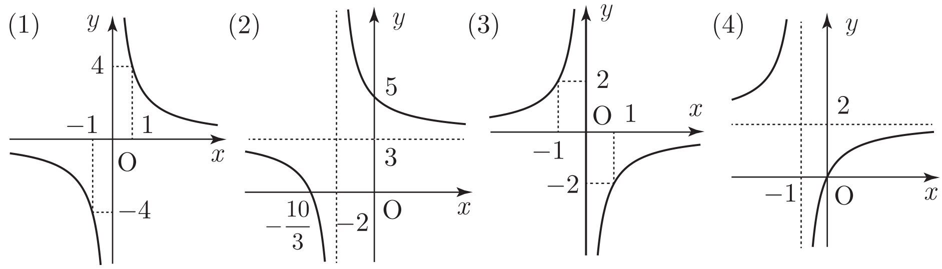
A9.1　(1), (3) 下図

(2) $y=\dfrac{3x+10}{x+2}=\dfrac{\{3(x+2)-6\}+10}{x+2}=\dfrac{3(x+2)+4}{x+2}=\dfrac{4}{x+2}+3$ と変形されるので

(1) のグラフを $x$ 軸方向に $-2$, $y$ 軸方向に 3 だけ平行移動したもの.

(4) $y=\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-2}{x+1}=-\dfrac{2x}{x+1}+2$ と変形されるので (3) のグラフを

$x$ 軸方向に $-1$, $y$ 軸方向に 2 だけ平行移動したもの.




A9.2　(1) $y=\dfrac{4}{x}$ のグラフが $y=x$ のグラフより上にある $x$ を求めればよい.

2 つのグラフの交点の $x$ 座標は $\dfrac{4}{x}=x$ を解いて $x=\pm2$ だから下のグラフより

$x<-2,\ 0<x<2$.　以下の問いについても同様に考える.

(2) $y=\dfrac{3x+10}{x+2}$ のグラフと $y=x+2$ のグラフの交点の $x$ 座標は

$3x+10=(x+2)^2 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)=0$ を解いて $x=-3,\ 2$ だから

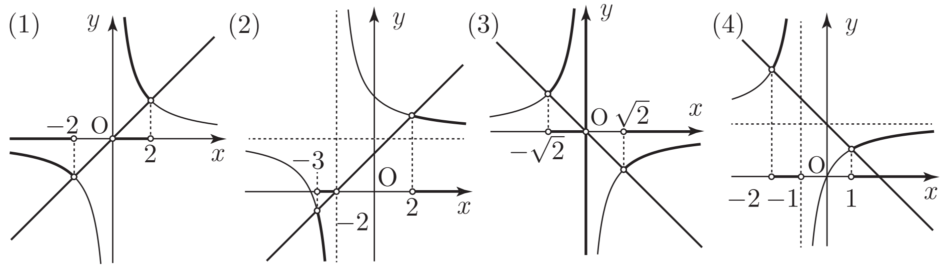
下のグラフより $-3<x<-2,\ 2<x$

(3) $y=-\dfrac{2}{x}$ のグラフと $y=-x$ のグラフの交点の $x$ 座標は

$-\dfrac{2}{x}=-x$ を解いて $x=\pm\sqrt{2}$ だから下のグラフより $-\sqrt{2}<x<0,\ \sqrt{2}<x$

(4) $y=\dfrac{2x}{x+1}$ のグラフと $y=-x+2$ のグラフの交点の $x$ 座標は

$\dfrac{2x}{x+1}=-x+2$ を解いて $x=-2,\ 1$ だから下のグラフより $-2<x<-1,\ 1<x$



## 第 9 章　有理関数と無理関数　**練習問題詳解** (2)

A9.3　(1) 下図　(2) $y = \sqrt{2x+4} - 2 = \sqrt{2(x+2)} - 2$ だから (1) のグラフを

$x$ 軸方向に $-2$, $y$ 軸方向に $-2$ だけ平行移動したもの.

(3) $y = -\sqrt{2x-2} + 2 = -\sqrt{2(x-1)} + 2$ だから $y = -\sqrt{2x}$ のグラフを

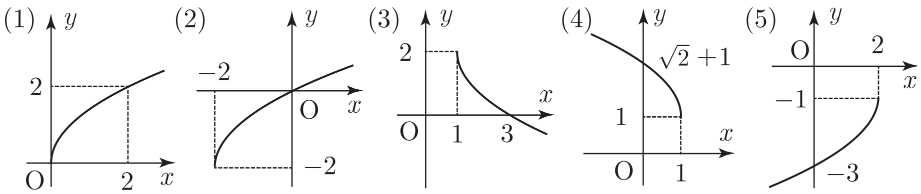
$x$ 軸方向に 1, $y$ 軸方向に 2 だけ平行移動したもの.

(4) $y = \sqrt{-2x+2} + 1 = \sqrt{-2(x-1)} + 1$ だから $y = \sqrt{-2x}$ のグラフを

$x$ 軸方向に 1, $y$ 軸方向に 1 だけ平行移動したもの.

(5) $y = -\sqrt{-2x+4} - 1 = -\sqrt{-2(x-2)} - 1$ だから $y = -\sqrt{-2x}$ のグラフを

$x$ 軸方向に 2, $y$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動したもの.




A9.4　(1) $y = \sqrt{2x+4} - 2$ のグラフが $y = x$ のグラフより上にある $x$ を求めればよい.

$\sqrt{2x+4} - 2 = x \Leftrightarrow (x+2)x = 0$ を解くと $x = -2, 0$ なので下のグラフより

$y = \sqrt{2x+4} - 2$ のグラフと $y = x$ のグラフの交点の $x$ 座標は $x = -2, 0$.

よって求める解は下のグラフより $-2 < x < 0$.　以下の問いについても同様に考える.

(2) $-\sqrt{2x-2} + 2 = x - 3 \Leftrightarrow (x-3)(x-9) = 0$ を解くと $x = 3, 9$ なので下のグラフ

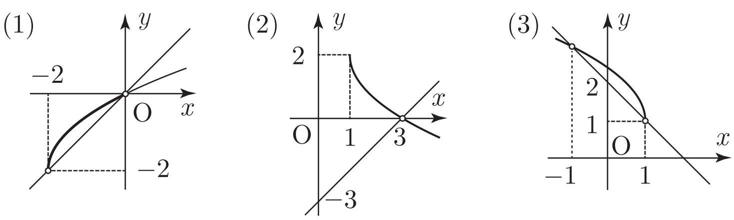
より $y = -\sqrt{2x-2} + 2$ のグラフと $y = x - 3$ のグラフの交点の $x$ 座標は $x = 3$.

よって求める解は下のグラフより $1 \leqq x < 3$.

(3) $\sqrt{-2x+2} + 1 = -x + 2 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0$ を解くと $x = \pm 1$ でなので下のグラフ

より $y = \sqrt{-2x+2} + 1$ のグラフと $y = -x + 2$ のグラフの交点の $x$ 座標は $x = \pm 1$.

よって求める解は下のグラフより $-1 < x < 1$.




B9.1　$y = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \dfrac{\frac{a}{c}\left(x + \frac{d}{c}\right) - \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \dfrac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x - \left(-\frac{d}{c}\right)} + \dfrac{a}{c}$

## 第 10 章　関数の極限　**練習問題詳解** (1)

A10.1

(1) $\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{x-3} = x+1\ (x \neq 3)$ より $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+1) = 4$

(2) $\dfrac{x^2+x}{x^2+4x+3} = \dfrac{x(x+1)}{(x+3)(x+1)} = \dfrac{x}{x+3}\ (x \neq -1)$ より $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -1}\frac{x}{x+3} = -\frac{1}{2}$

(3) $\dfrac{x^2+x}{x} = \dfrac{x(x+1)}{x} = x+1\ (x \neq 0)$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$

(4) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+8}-3} = \dfrac{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)} = \dfrac{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(x+8)-3^2} = \dfrac{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{x-1}$

$= \sqrt{x+8}+3\ (x \neq 1)$ より $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x+8}+3) = \sqrt{9}+3 = 6$

(5) $\dfrac{\sqrt{3-x}-2}{x+1} = \dfrac{(\sqrt{3-x}-2)(\sqrt{3-x}+2)}{(x+1)(\sqrt{3-x}+2)} = \dfrac{(3-x)-2^2}{(x+1)(\sqrt{3-x}+2)} = \dfrac{-(x+1)}{(x+1)(\sqrt{3-x}+2)}$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{3-x}+2}\ (x \neq -1)$ より $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-2}{x+1} = \lim_{x\to -1}(-\frac{1}{\sqrt{3-x}+2}) = -\frac{1}{\sqrt{4}+2} = -\frac{1}{4}$

(6) $\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \dfrac{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}{x^2(1+\sqrt{1+x^2})} = \dfrac{1^2-(1+x^2)}{x^2(1+\sqrt{1+x^2})} = \dfrac{-x^2}{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}$

$= -\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\ (x \neq 0)$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) = -\frac{1}{1+\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x}{x^2+5}} = \sqrt{\frac{2}{2^2+5}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

(8) $\sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ より

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\sin x+\cos x} = \frac{e^0}{\sin 0+\cos 0} = \frac{1}{0+1} = 1$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e = e$　(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$　(12) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \pi = \pi$　(14) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \log x = -\infty$　(15) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$

# 第 10 章　関数の極限　**練習問題詳解** (2)

A10.1（続き）

(16) $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ より $-\dfrac{1}{x^2} \leqq \dfrac{\cos x}{x^2} \leqq \dfrac{1}{x^2}$. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ だから

はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0$.

(17) $-1 \leqq \sin\dfrac{1}{x} \leqq 1$ より $-x^2 \leqq x^2\sin\dfrac{1}{x} \leqq x^2$. $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(-x^2\right)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2=0$ だから

はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

(18) $-1 \leqq \cos\dfrac{1}{x} \leqq 1$ より $-x^2 \leqq x^2\cos\dfrac{1}{x} \leqq x^2$. $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(-x^2\right)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2=0$ だから

はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$.

(19) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=3$

(20) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x+\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin 4x}{x}+\dfrac{\sin 3x}{x}}{\dfrac{\sin 2x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{4\cdot\dfrac{\sin 4x}{4x}+3\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}}{2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$

(21) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{2}$

A10.2

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-1}{x^3+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{2}{x^2}}=3$

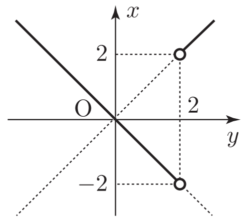
(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^3}}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=-\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3-x+5)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)=-\infty$

第 10 章　関数の極限　**練習問題詳解** (3)

B10.1




(1) $x > 2$ のとき $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{|x-2|} = \dfrac{x(x-2)}{x-2} = x,$

$x < 2$ のとき $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{|x-2|} = \dfrac{x(x-2)}{-(x-2)} = -x$ より

右図のようになる.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{x^2-2x}{|x-2|} = \lim_{x\to 2+0} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+0} x = 2.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-2x}{|x-2|} = \lim_{x\to 2-0} \frac{x(x-2)}{-(x-2)} = \lim_{x\to 2-0}(-x) = -2.$

B10.2

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = 1\cdot 1 = 1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = 1\cdot 1 = 1$

(3) $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}\dfrac{1}{1+\cos x}$ より

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right) = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$　((2) 参照)

(4) $\sqrt{x^2+3}+x = \dfrac{(\sqrt{x^2+3}+x)(\sqrt{x^2+3}-x)}{\sqrt{x^2+3}-x} = \dfrac{(x^2+3)-x^2}{\sqrt{x^2+3}-x} = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}-x}$ より

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+3}+x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}-x} = 0$　($x\to -\infty$ に注意)

(5) $t = \dfrac{1}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $t = \dfrac{1}{x}\to 0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\cdot\sin t\right) = 1$

B10.3

(1) $t = \dfrac{1}{x}$ とおくと $x\to +0$ のとき $t = \dfrac{1}{x}\to\infty$ だから $\displaystyle\lim_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} e^t = \infty$ (A10.1(11))

(2) $t = \dfrac{1}{x}$ とおくと $x\to -0$ のとき $t = \dfrac{1}{x}\to -\infty$ だから $\displaystyle\lim_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$ (A10.1(12))

(3) (1)(2) より $\displaystyle\lim_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}} \neq \lim_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}}$ なので $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ は存在しない

## 第 11 章　微分 1　**練習問題詳解** (1)

A11.1　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ を計算する．和を関にする公式（教科書 P.32 もしくは練習問題 B5.5 (2)）より $\cos(x+h)-\cos x=-2\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\cdot\sin\dfrac{h}{2}$ だから

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{2\cdot\frac{h}{2}}$$

$=\displaystyle\lim_{h\to 0}-\frac{2}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdots(*)$. すると $\displaystyle\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)=\sin x$,　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$ だから

$$(*)=-\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

A11.2　$\displaystyle\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{h}\cdot(\log(x+h)-\log x)=\frac{1}{h}\cdot\log\frac{x+h}{x}$

$$=\frac{1}{h}\cdot\log\left(1+\frac{x}{h}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\log\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

（最後の等式では $k=\dfrac{h}{x}$ とおいた）すると $h\to 0$ のとき $k=\dfrac{h}{x}\to 0$ だから（$x$ は動かない）

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{x}\log(1+k)^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log(1+k)^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{x}$$

（最後の等式は $\displaystyle\lim_{k\to 0}\log(1+k)^{\frac{1}{k}}=\log e=1$ より）

A11.3

(1) $y'=\left(x^{-1}\right)'=-1\cdot x^{-1-1}=-x^{-2}$　　(2) $y'=\left(x^{-3}\right)'=-3\cdot x^{-3-1}=-3x^{-4}$

(3) $y'=\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)'=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1}=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$　　(4) $y'=\left(x^{\sqrt{3}}\right)'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$

(5) $y'=(x^e)'=e\,x^{e-1}$　　(6) $y'=\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2\cdot x^{-2-1}=-2x^{-3}\left(=-\dfrac{2}{x^3}\right)$

(7) $y'=(\sqrt[3]{x})'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

(8) $y'=(x\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\left(=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\right)$

(9) $y'=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\left(=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\right)$

(10) $y'=(2)'=0$

# 第 11 章　微分 1　**練習問題詳解** (2)

A11.4

(1) $y' = (x^3 - 2x^2 + 3x - 4)' = (x^3)' - (2x^2)' + (3x)' - (4)' = 3x^2 - 4x + 3 - 0 = 3x^2 - 4x + 3$

(2) $y' = (a\sin x + b\cos x)' = a(\sin x)' + b(\cos x)' = a\cos x + b(-\sin x) = a\cos x - b\sin x$

A11.5

(1) $y' = (x \cdot \sin x)' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x$

(2) $y' = (x^2 \cdot e^x)' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$

(3) $y' = (\log x)'\cos x + \log x(\cos x)' = \dfrac{1}{x}\cos x + \log x(-\sin x) = \dfrac{\cos x}{x} - \log x\ \sin x$

(4) $y' = (\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)' = \cos x\cos x + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x\ (= \cos 2x)$

(5) $y' = \left(\dfrac{x^2}{\sin x}\right)' = \dfrac{(x^2)'\sin x - x^2(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \dfrac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}$

(6) $y' = \left(\dfrac{\log x}{e^x}\right)' = \dfrac{(\log x)'e^x - \log x(e^x)'}{(e^x)^2} = \dfrac{\dfrac{1}{x}e^x - (\log x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{1 - x\log x}{xe^x}$

(7) $y' = \left(\dfrac{e^x}{\log x}\right)' = \dfrac{(e^x)'\log x - e^x(\log x)'}{(\log x)^2} = \dfrac{e^x\log x - e^x\dfrac{1}{x}}{(\log x)^2} = \dfrac{(x\log x - 1)e^x}{x(\log x)^2}$

(8) $y' = \left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

$= -\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ もしくは 例題 11.6 (5)（教科書 58 ページ) を使って

$$y' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = \frac{(1)'\tan x - 1(\tan x)'}{(\tan x)^2} = \frac{0 - \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = -\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

A11.6

(1) $y' = (x^3)' = 3x^2$ より接線の傾きは $3 \cdot 2^2 = 12$ だから $y - 8 = 12(x-2)$

(2) $y' = (\cos x)' = -\sin x$ より接線の傾きは $-\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ だから $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(3) $y' = (e^x)' = e^x$ より接線の傾きは $e^2$ だから $y - e^2 = e^2(x-2)$

(4) $y' = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より接線の傾きは $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ だから $y - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x-3)$

(5) $y' = (\log x)' = \dfrac{1}{x}$ より接線の傾きは $\dfrac{1}{2}$ だから $y - \log 2 = \dfrac{1}{2}(x-2)$

(6) $y' = \left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$ より接線の傾きは $-\dfrac{3}{2}1^{-\frac{5}{2}} = -\dfrac{3}{2}$ だから $y - 1 = -\dfrac{3}{2}(x-1)$

## 第 11 章　微分 1　**練習問題詳解** (3)

A11.7　底を $e$ に変換すると $\log_a x = \dfrac{\log_e x}{\log_e a} = \dfrac{1}{\log a}\log x$ だから

$$(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\log a}\log x\right)' = \frac{1}{\log a}(\log x)' = \frac{1}{\log a}\frac{1}{x} = \frac{1}{x\log a}.$$

B11.1

(1) $y' = (xe^x\cos x)' = ((xe^x)\cos x)' = (xe^x)'\cos x + (xe^x)(\cos x)'$

$$= ((x)'e^x + x(e^x)')\cos x + (xe^x)(-\sin x) = (e^x + xe^x)\cos x - xe^x\sin x$$

$$= e^x\cos x + xe^x\cos x - xe^x\sin x = e^x(\cos x + x\cos x - x\sin x)$$

(2) $y' = (x\cos x\log x)' = ((x\cos x)\log x)' = (x\cos x)'\log x + (x\cos x)(\log x)'$

$$= ((x)'\cos x + x(\cos x)')\log x + (x\cos x)\frac{1}{x} = (\cos x + x(-\sin x))\log x + \cos x$$

$$= \cos x\log x - x\sin x\log x + \cos x$$

B11.2　$(fgh)' = ((fg)h)' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh = f'gh + fg'h + fgh'.$

# 第 12 章　微分 2　**練習問題詳解** (1)

A12.1

(1) $t = x^5 - 2x + 1$ とおいて $y' = (t^6)'(x^5 - 2x + 1)' = 6t^5(5x^4 - 2) = 6(x^5 - 2x + 1)^5(5x^4 - 2)$

(2) $t = 2x + 1$ とおいて $y' = \left(\dfrac{1}{t}\right)'(2x + 1)' = -\dfrac{1}{t^2} \cdot 2 = -\dfrac{2}{(2x + 1)^2}$

(3) $t = \sin x$ とおいて $y' = (\sqrt{t})'(\sin x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \cos x = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

(4) $t = 5x^2 + 1$ とおいて $y' = (\sqrt{t})'(5x^2 + 1)' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \cdot 10x = \dfrac{5x}{\sqrt{5x^2 + 1}}$

(5) $t = x^3 + 1$ とおいて $y' = (\cos t)'(x^3 + 1)' = -\sin t \cdot 3x^2 = -3x^2 \sin(x^3 + 1)$

(6) $t = 1 - x^2$ とおいて $y' = (\log t)'(1 - x^2)' = \dfrac{1}{t}(-2x) = -\dfrac{2x}{1 - x^2} \left(= \dfrac{2x}{x^2 - 1}\right)$

(7) $t = x^2$ とおいて $y' = (e^t)'(x^2)' = e^t\, 2x = 2xe^{x^2}$

(8) $t = x^2 + 1$ とおいて $y' = (\tan t)'(x^2 + 1)' = \dfrac{1}{\cos^2 t} \cdot 2x = \dfrac{2x}{\cos^2(x^2 + 1)}$

(9) $t = \log x$ とおいて $y' = (\sin t)'(\log x)' = \cos t \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\cos(\log x)}{x}$

(10) $t = \cos x$ とおいて $y' = (\tan t)'(\cos x)' = \dfrac{1}{\cos^2 t}(-\sin x) = \dfrac{-\sin x}{\cos^2(\cos x)}$

(11) $t = \sin x$ とおいて $y' = (e^t)'(\sin x)' = e^t \cos x = \cos x \cdot e^{\sin x}$

(12) $t = \tan x$ とおいて $y' = (\log t)'(\tan x)' = \dfrac{1}{t} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\sin x \cdot \cos x}$

(13) $t = 2x$ とおいて $y' = (\sin t)'(2x)' = \cos t \cdot 2 = 2\cos 2x$

(14) $t = \sin x$ とおいて $y' = (t^2)'(\sin x)' = 2t \cos x = 2\sin x \cdot \cos x$

(15) $t = 3x$ とおいて $y' = (\cos t)'(3x)' = (-\sin t)\ 3 = -3\sin 3x$

(16) $t = \cos x$ とおいて $y' = (t^3)'(\cos x)' = 3t^2(-\sin x) = -3\cos^2 x \cdot \sin x$

(17) $t = x\log x$ とおいて $y' = (\cos t)'(x\log x)' = -\sin t\left(\log x + x\dfrac{1}{x}\right) = -\sin(x\log x) \cdot (\log x + 1)$

(18) $t = x\cos x$ とおいて $y' = (\log t)'(x\cos x)' = \dfrac{1}{t}(\cos x - x\sin x) = \dfrac{\cos x - x\sin x}{x\cos x}$

(19) $t = x\sin x$ とおいて $y' = (e^t)'(x\sin x)' = e^t(\sin x + x\cos x) = (\sin x + x\cos x)\ e^{x\sin x}$

(20) $t = xe^x$ とおいて $y' = (\tan t)'(xe^x)' = \dfrac{1}{\cos^2 t}(e^x + xe^x) = \dfrac{(x + 1)e^x}{\cos^2(xe^x)}$

A12.2

(1) $y' = (e^{2x})' \cos 3x + e^{2x}(\cos 3x)' = e^{2x}(2x)' \cos 3x + e^{2x}(-\sin 3x)(3x)' = e^{2x}(2\cos 3x - 3\sin 3x)$

(2) $y' = \dfrac{(e^{x^2})' \log x - e^{x^2}(\log x)'}{(\log x)^2} = \dfrac{e^{x^2}(x^2)' \log x - e^{x^2}\dfrac{1}{x}}{(\log x)^2} = \dfrac{e^{x^2}(2x^2 \log x - 1)}{x(\log x)^2}$

(3) $y' = \dfrac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'(x^2+1) - e^{\frac{1}{x}}(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x}\right)'(x^2+1) - e^{\frac{1}{x}}\ 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)(x^2+1) - 2xe^{\frac{1}{x}}}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}(2x^3+x^2+1)}{x^2(x^2+1)^2}$

(4) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot (x+\sqrt{x^2+1})' = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

A12.3

(1) $\sqrt{x} = y$ の両辺を二乗して $x = y^2$.

(2) (1) の両辺を $y$ で微分すると $\dfrac{dx}{dy} = 2y$ なので，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{2y}$.

（最後に $y = \sqrt{x}$ を代入すれば $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ を得る）

B12.1

(1) 両辺の対数をとって $\log y = \log x^{2x} = 2x \log x$．この両辺を $x$ で微分して
$\dfrac{y'}{y} = 2\log x + 2x \cdot \dfrac{1}{2x} = 2\log x + 2$．したがって $y' = 2y(\log x + 1) = 2x^{2x}(\log x + 1)$.

(2) 両辺の対数をとって $\log y = \log (x+1)^x = x \log (x+1)$.
この両辺を $x$ で微分して $\dfrac{y'}{y} = 1 \cdot \log (x+1) + x \cdot \dfrac{1}{x+1}$.
したがって $y' = y\left(\log (x+1) + \dfrac{x}{x+1}\right) = (x+1)^x \left(\log (x+1) + \dfrac{x}{x+1}\right)$.

(3) 両辺の対数をとって $\log y = \log (\sin x)^x = x \log (\sin x)$
この両辺を $x$ で微分して $\dfrac{y'}{y} = \log \sin x + x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
したがって $y' = y\left(\log (\sin x) + \dfrac{x \cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^x \left(\log (\sin x) + \dfrac{x\cos x}{\sin x}\right)$.

## 第 12 章　微分 2　**練習問題詳解** (3)

B12.2

(1) $\underline{u = \log x}$ とおくと $y = (\sin u)^4$．さらに $\underline{t = \sin u}$ とおくと $\underline{y = t^4}$．したがって

$$y' = (t^4)'(\sin u)'(\log x)' = 4t^3 \cdot \cos u \cdot \frac{1}{x} = 4(\sin u)^3 \cos u \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x}(\sin(\log x))^3 \cdot \cos(\log x)$$

(2) $\underline{u = \sin x}$ とおくと $y = (\log u)^4$，さらに $\underline{t = \log u}$ とおくと $\underline{y = t^4}$．したがって

$$y' = (t^4)'(\log u)'(\sin x)' = 4t^3 \cdot \frac{1}{u} \cdot \cos x = 4(\log u)^3 \cdot \frac{1}{u} \cdot \cos x = 4(\log(\sin x))^3 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4(\log(\sin x))^3}{\tan x}$$

(3) $\underline{u = xe^x}$ とおくと $y = \log(\sin u)$．さらに $\underline{t = \sin u}$ とおくと $\underline{y = \log t}$．したがって

$$y' = (\log t)'(\sin u)'(xe^x)' = \frac{1}{t} \cdot \cos u\ (e^x + xe^x) = \frac{\cos u}{\sin u}\ (e^x + xe^x) = \frac{e^x(x+1)}{\tan(xe^x)}$$

B12.3

(1) 両辺を $x$ で微分すると $1 + 3y^2 \cdot y' = 0$ だから $3y^2 \cdot y' = -1$ より $y' = -\dfrac{1}{3y^2}$　$(y \neq 0)$

(2) 両辺を $x$ で微分すると $3x^2 - 3y^2 \cdot y' = 0$ だから $3y^2 \cdot y' = 3x^2$ より $y' = \dfrac{x^2}{y^2}$　$(y \neq 0)$

(3) 両辺を $x$ で微分すると $3x^2 - 3(1 \cdot y + xy') + 3y^2 \cdot y' = 0$ だから

$x^2 - y - xy' + y^2 \cdot y' = 0$，$(y^2 - x)y' = y - x^2$ より $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$　$(y^2 - x \neq 0)$

(4) 両辺を $x$ で微分すると $\cos(xy^2)\ (1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \cdot y') = y'$ だから

$y^2 \cos(xy^2) = y' - 2xy \cdot y' \cos(xy^2)$ より $y' = \dfrac{y^2 \cos(xy^2)}{1 - 2xy\cos(xy^2)}$　$(1 - 2xy\cos(xy^2) \neq 0)$

(5) 両辺を $x$ で微分すると $e^{xy}\ (1 \cdot y + xy') - y' = 0$ だから

$ye^{xy} = (1 - xe^{xy})\ y'$ より $y' = \dfrac{ye^{xy}}{1 - xe^{xy}}$　$(1 - xe^{xy} \neq 0)$

(6) 両辺を $x$ で微分すると $1 \cdot y(x+y) + xy'(x+y) + xy(1+y') - 0 = 0$ だから

$2xy + y^2 + x^2y' + 2xy \cdot y' = 0$, $(x^2 + 2xy)\ y' = -(2xy + y^2)$ より $y' = -\dfrac{2xy + y^2}{x^2 + 2xy}$　$(x^2 + 2xy \neq 0)$

# 第 13 章　微分 3　**練習問題詳解** (1)

A13.1

(1) $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.

$y' = 0$ の解は $x = 1, 3$ だから増減表は次のようになる．

よって，$x = 1$ で極大値 $0$, $x = 3$ で極小値 $-4$ をとる．

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $0$ 極大 | $\searrow$ | $-4$ 極小 | $\nearrow$ |

(2) $y' = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2+1)(x+1)(x-1)$.

$y' = 0$ の解は $x = \pm 1$ だから増減表は次のようになる．

よって，$x = -1$ で極大値 $6$, $x = 1$ で極小値 $-2$ をとる．

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $6$ 極大 | $\searrow$ | $-2$ 極小 | $\nearrow$ |

(3) $y' = -2xe^{-x^2}$. $y' = 0$ の解は $x = 0$ だから増減表は次のようになる．

($e^{-x^2} > 0$ なので $x < 0$ のとき $y' > 0$, $x > 0$ のとき $y' < 0$)

よって，$x = 0$ で極大値 $1$ をとり極小値はない．

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $1$ 極大 | $\searrow$ |

(4) 定義域は $x \neq 0$ で，$y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

$y' = 0$ の解は $x = \pm 1$ だから増減表は次のようになる．

($x < 0$ のとき $\dfrac{x-1}{x^2} < 0$, $x > 0$ のとき $\dfrac{x+1}{x^2} > 0$)

よって，$x = -1$ で極大値 $-2$, $x = 1$ で極小値 $2$ をとる．

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $/$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $-2$ 極大 | $\searrow$ | $/$ | $\searrow$ | $2$ 極小 | $\nearrow$ |

(5) $y = -\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = -\left(1 - \dfrac{2}{x^2+1}\right) = -1 + 2(x^2+1)^{-1}$,

$y' = -2(x^2+1)^{-2} \cdot (x^2+1)' = -\dfrac{4}{(x^2+1)^2}x$ より $y' = 0$ の解は $x = 0$ だから

増減表は次のようになる．よって，$x = 0$ で極大値 $1$ をとり極小値はない．

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $1$ 極大 | $\searrow$ |

(6) $y' = e^{2x}(1 + 2x)$ より $y' = 0$ の解は $x = -\dfrac{1}{2}$ だから増減表は

次のようになる．よって，$x = -\dfrac{1}{2}$ で極小値 $-\dfrac{1}{2e}$ をとり極大値はない．

| $x$ | $\cdots$ | $-1/2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\searrow$ | $-1/2e$ 極小 | $\nearrow$ |

A13.2

(1) $y' = 4x^3 + 2x$　　$y'' = 12x^2 + 2$　　$y^{(3)} = 24x$

(2) $y' = e^{-2x}(-2x)' = -2e^{-2x}$　　$y'' = -2e^{-2x}(-2x)' = 4e^{-2x}$　　$y^{(3)} = 4e^{-2x}(-2x)' = -8e^{-2x}$

(3) $y' = -\sin 3x(3x)' = -3\sin 3x$　　$y'' = -3\cos 3x(3x)' = -9\cos 3x$　　$y^{(3)} = 9\sin 3x(3x)' = 27\sin 3x$

(4) $y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

$y'' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$

$y^{(3)} = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x = 2e^x(\cos x - \sin x)$

# 第 13 章　微分 3　**練習問題詳解** (2)

B13.1

(1) $f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f^{(3)}(x) = \sin x$ だから $f^{(3)}(0) = \sin 0 = 0$

(2) $f'(x) = (x+1)^{-1}$, $f''(x) = -(x+1)^{-2}$, $f^{(3)}(x) = 2(x+1)^{-3}$ より $f^{(3)}(1) = 2(1+1)^{-3} = \dfrac{1}{4}.$

(3) $f'(x) = 3\sin^2 x\cos x$, $f''(x) = 3(2\sin x\cos x\cos x + \sin^2 x(-\sin x)) = 6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x$

より $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 6\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = 3\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

(4) $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$, $f''(x) = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x\sin x$,

$f^{(3)}(x) = -2e^x(\sin x + \cos x)$ だから $f^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2e^{\pi/4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}e^{\pi/4}$

B13.2

$y = e^x\sin 3x$, $y' = e^x(\sin 3x + 3\cos 3x)$,

$y'' = e^x(\sin 3x + 3\cos 3x) + e^x(3\cos 3x - 9\sin 3x) = e^x(6\cos 3x - 8\sin 3x)$ だから

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 10y &= e^x\left((6\cos 3x - 8\sin 3x) - 2(\sin 3x + 3\cos 3x) + 10\sin 3x\right) \\ &= e^x\left((6-6)\cos 3x + (-8-2+10)\sin 3x\right) = 0 \end{aligned}$$

B13.3

(1) $f(x) = e^{-x} - (1-x) = e^{-x} + x - 1$ とおいて $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ であることを示せばよい．

$f'(x) = -e^{-x} + 1 = \dfrac{e^x - 1}{e^x}$ より分母は常に正で，$x > 0$ のとき，分子も $e^x > 1$ だから $f'(x) > 0$.

したがって，$x > 0$ で $f(x) = e^{-x} + x - 1$ は増加するので $f(x) > f(0)$.

ここで $f(0) = e^0 + 0 - 1 = 0$ だから $f(x) > f(0) = 0$.

(2) $f(x) = 2\sqrt{x} - \log x$ とおいて $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ であることを示せばよい．$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x}$ より $f'(x) = 0$ の解は $x = 1$ だから増減表は右のようになる．したがって，$f(x)$ は $x = 1$ で最小値 $2 - \log 1 = 2$ をとるので $x > 0$ のとき $f(x) \geq f(1) = 2 > 0$ である．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $\diagup$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\diagup$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ |

## 第 14 章　微分 4　**練習問題詳解** (1)

A14.1

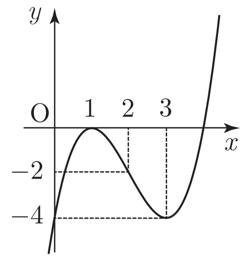
(1) $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$, $y'' = 6x - 12 = 6(x-2)$ より

増減・凹凸表は左下のようになるから $x = 1$ で極大値 $0$, $x = 3$ で極小値 $-4$ をとり，変曲点は

$(2, -2)$ である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x - 4) = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) = \pm\infty$

（複号同順）だからグラフの概形は右下のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $0$ 極大 | ↘ | $-2$ 変曲点 | ↘ | $-4$ 極小 | ↗ |



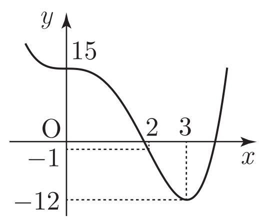

(2) $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$, $y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$ より増減・凹凸表は

左下のようになるから $x = 3$ で極小値 $-12$ をとり，変曲点は $(0, 15)$, $(2, -1)$ である．また，

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(x^4 - 4x^3 + 15) = \lim_{x\to\infty} x^4\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{15}{x^4}\right) = \pm\infty$ （複号同順）だからグラフの概形は

右下のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | ↘ | $15$ 変曲点 | ↘ | $-1$ 変曲点 | ↘ | $-12$ 極小 | ↗ |

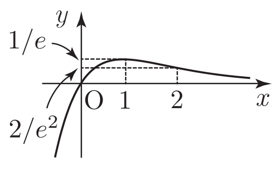



(3) $y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$, $y'' = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$ より増減・凹凸表は

左下のようになるから*，$x = 1$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとり，変曲点は $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$ である．また，与えられた

条件より $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$ だからグラフの概形は右下のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $y''$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $\frac{1}{e}$ 極大 | ↘ | $\frac{2}{e^2}$ 変曲点 | ↘ |




*全ての実数 $x$ に対して $e^{-x} > 0$ だから，正負・0 を見るには $y'$ なら $1-x$, $y''$ なら $x-2$ の部分だけを見ればよい．

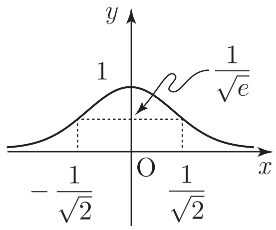
A14.1（続き）

(4) $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = -2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = (4x^2-2)e^{-x^2} = 4\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$ より

増減・凹凸表は左下のようになるから，$x=0$ で極大値 1 をとり，変曲点は $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

また，与えられた条件より $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$ だからグラフの概形は右下のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $y''$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 変曲点 | ↗ | $1$ 極大 | ↘ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 変曲点 | ↘ |

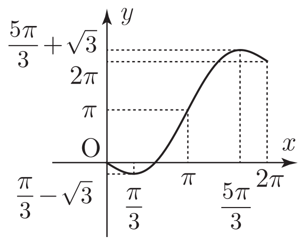



B14.1

(1) $y' = 1 - 2\cos x = -2\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)$, $y'' = 2\sin x$ より増減・凹凸表は左下のようになるから

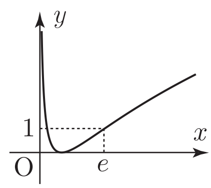
$x = \dfrac{\pi}{3}$ で極小値 $\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}$，$x = \dfrac{5\pi}{3}$ で極大値 $\dfrac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$ をとり，変曲点は $(\pi, \pi)$ である．また，グラフの概形は右下のようになる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\pi/3$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $5\pi/3$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $y''$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ |
| $y$ | $0$ | ↘ | $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ 極小 | ↗ | $\pi$ 変曲点 | ↗ | $\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}$ 極大 | ↘ | $2\pi$ |




(2) $y' = 2\log x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}\cdot\log x$, $y'' = \dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{1}{x} - 2\log x\cdot\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{x^2}(1-\log x)$ であり，$y = (\log x)^2$ の定義域は $x > 0$ だから増減・凹凸表は左下のようになる．よって $x=1$ で極小値 0 をとり，変曲点は $(e, 1)$ である．また，グラフの概形は右下のようになる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y''$ | ／ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ／ | ↘ | $0$ 極小 | ↗ | $1$ 変曲点 | ↗ |

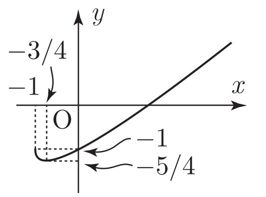


B14.1（続き）

(3) $y'=1-\dfrac{1}{2}(x+1)^{-1/2}=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $(x\neq-1)$, $y''=\dfrac{1}{4}(x+1)^{-3/2}$ $(x\neq-1)$ であり，

$y'=0\Leftrightarrow 1=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x+1=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$，また $y=x-\sqrt{x+1}$ の定義域は $x\geqq-1$ だから増減・凹凸表は左下のようになる．よって $x=-\dfrac{3}{4}$ で極小値 $-\dfrac{5}{4}$ をとり，変曲点はない．また，与えられた条件より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x+1}\right)=\infty$ なのでグラフの概形は右下のようになる．

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $-3/4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | ／ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | ／ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $-1$ | ↘ | $-5/4$ 極小 | ↗ |



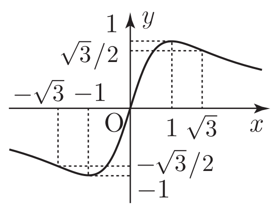

(4) $y'=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$,

$$y''=-4x\frac{1}{(x^2+1)^2}-2(x^2-1)\frac{-2\cdot 2x}{(x^2+1)^3}=\frac{-4x(x^2+1)+8x(x^2-1)}{(x^2+1)^3}=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

より増減・凹凸表は左下のようになるから[†]，$x=-1$ で極小値 $-1$, $x=1$ で極大値 $1$ をとり，変曲点は $\left(\pm\sqrt{3},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$（複号同順），$(0,0)$ である．また，与えられた条件より

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$ だからグラフの概形は右下のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↘ | $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 変曲点 | ↘ | $-1$ 極小 | ↗ | $0$ 変曲点 | ↗ | $1$ 極大 | ↘ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 変曲点 | ↘ |




[†]全ての実数 $x$ に対して $(x^2+1)^2>0$ だから，正負・0 を見るには $y'$ なら $-(x^2-1)$, $y''$ なら $x(x^2-3)$ の部分だけを見ればよい．

# 第 15 章　不定積分　**練習問題詳解** (1)

A15.1

(1) $x + C$　(2) $\dfrac{x^6}{6} + C$　(3) $\displaystyle\int x^{-5}\,dx = \frac{1}{-5+1}x^{-5+1} + C = -\frac{1}{4}x^{-4} + C$

(4) $\displaystyle\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3}}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\,x^{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\,x^{\frac{1}{2}} + C$　(6) $\tan x + C$

A15.2

(1) $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{5}\,(3x+1)^5 + C = \dfrac{1}{15}(3x+1)^5 + C$

(2) $\displaystyle\int (2x+1)^{-5}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-5+1}\,(2x+1)^{-5+1} + C = -\frac{1}{8}(2x+1)^{-4} + C$

(3) $-\dfrac{1}{2}\log|1-2x| + C$　(4) $\dfrac{1}{3}\sin(3x-1) + C$　(5) $-e^{-x+2} + C$

(6) $\displaystyle\int (5x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\,(5x-1)^{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5}\,(5x-1)^{\frac{1}{2}} + C$

A15.3

(1) $t = \sin x$ とおくと $dt = \cos x\,dx$ だから

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

(2) $t = x^5 - 1$ とおくと $dt = 5x^4\,dx$，$\dfrac{1}{5}dt = x^4\,dx$ だから

$$\int (x^5-1)^4 x^4\,dx = \int t^4\,\frac{1}{5}\,dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{25}(x^5-1)^5 + C$$

(3) $t = x^2 + 1$ とおくと $dt = 2x\,dx$，$\dfrac{1}{2}\,dt = x\,dx$ だから[‡]

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\log t + C = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

(4) $t = \sin x$ とおくと $dt = \cos x\,dx$ だから

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x\,dx = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$$

(5) $t = x^2$ とおくと $dt = 2x\,dx$，$\dfrac{1}{2}\,dt = x\,dx$ だから

$$\int e^{x^2} \cdot x\,dx = \int e^t \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

(6) $t = e^x + 1$ とおくと $dt = e^x\,dx$ だから[§]

$$\int \frac{1}{e^x+1} \cdot e^x\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log t + C = \log(e^x+1) + C$$

---

[‡]全ての実数 $x$ に対して $t = x^2 + 1 > 0$ だから $\log t = \log(x^2+1)$ において絶対値は不要.

[§]全ての実数 $x$ に対して $t = e^x + 1 > 0$ だから $\log t = \log(e^x+1)$ において絶対値は不要.

A15.4

(1) $x\,(-\cos x) - \displaystyle\int 1\,(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

(2) $\displaystyle\int 1\cdot\log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + C = x\,(\log x - 1) + C$

(3) $\displaystyle\frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^4\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{16}(4\log x - 1) + C$

(4) $\displaystyle x\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int 1\cdot\frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{e^{2x}}{4}\,(2x-1) + C$

B15.1

(1) $(f(x))' = f'(x)$ より $f(x) + C$　(2) $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ より $f(x)\,g(x) + C$

B15.2

(1) 70 ページの公式より $\displaystyle\frac{2^x}{\log 2} + C$　(61 ページの例題 12.3 (1) も参照)

(2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ だから $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1+\cos x)(1-\cos x)$．よって

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x} = 1 - \cos x.\ \text{したがって}$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx = \int (1-\cos x)\,dx = x - \sin x + C$$

(3) $\displaystyle x^2\,(-e^{-x}) - \int 2x\left(-e^{-x}\right)\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$

$$= -x^2e^{-x} + 2\left(x\,(-e^{-x}) - \int 1\,\left(-e^{-x}\right)\,dx\right) = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right)$$

$$= -x^2e^{-x} + 2\,(-xe^{-x} - e^{-x} + C) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$$

(4) $\displaystyle x^2(-\cos x) - \int 2x\,(-\cos x)\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$

$$= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx\right) = -x^2\cos x + 2\,(x\sin x + \cos x + C)$$

$$= (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x + C$$

## 第 16 章　定積分　**練習問題詳解** (1)

A16.1

(1) $\Big[x\Big]_2^5 = 5-2=3$　(2) $\Big[\dfrac{1}{6}x^6\Big]_0^1 = \dfrac{1}{6}\left(1^6-0^6\right) = \dfrac{1}{6}\left(1-0\right) = \dfrac{1}{6}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 x^{-2}\,dx = \Big[\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\Big]_1^2 = \Big[-x^{-1}\Big]_1^2 = -\Big[\frac{1}{x}\Big]_1^2 = -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \Big[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}\Big[x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}\left(1^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}$

(5) $\displaystyle\int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \Big[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}\Big]_1^2 = 2\Big[x^{\frac{1}{2}}\Big]_1^2 = 2\left(2^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}\right) = 2(\sqrt{2}-1)$

(6) $\displaystyle\int_1^3 \left(x-\frac{1}{x}\right)\,dx = \Big[\frac{x^2}{2}-\log x\Big]_1^3 = \left(\frac{3^2}{2}-\log 3\right)-\left(\frac{1^2}{2}-\log 1\right) = 4-\log 3$

(7) $\Big[\dfrac{1}{3}e^{3x}\Big]_0^1 = \dfrac{1}{3}\left(e^{3\cdot 1}-e^{3\cdot 0}\right) = \dfrac{1}{3}(e^3-e^0) = \dfrac{e^3-1}{3}$

(8) $\Big[\dfrac{1}{3}\,\sin 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{3}\left(\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin 0\right) = \dfrac{1}{3}(1-0) = \dfrac{1}{3}$

A16.2

(1) $t=2x-1$ とおくと $dt=2dx$ で $0 \leqq x \leqq 2$ のとき $-1 \leqq t \leqq 3$ なので

$$\int_0^2 (2x-1)^3\,dx = \int_{-1}^3 t^3\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\Big[\frac{t^4}{4}\Big]_{-1}^3 = \frac{1}{8}\left(3^4-(-1)^4\right) = \frac{81-1}{8} = 10$$

(2) $t=-2x$ とおくと $dt=-2dx$ で $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $-2 \leqq t \leqq 2$ なので

$$\int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx = \int_2^{-2} e^t\left(-\frac{1}{2}\right)\,dt = -\frac{1}{2}\int_2^{-2} e^t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^2 e^t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\Big[e^t\Big]_{-2}^2 = \frac{1}{2}\left(e^2-e^{-2}\right) = \frac{e^2-e^{-2}}{2}$$

(3) $t=2x$ とおくと $dt=2dx$ で $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $0 \leqq t \leqq \pi$ なので

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx = \int_0^{\pi} \sin t\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\left(\cos\pi-\cos 0\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(-1-1\right) = 1$$

(4) $t=e^x+1$ とおくと $dt=e^x\,dx$ で $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $2 \leqq x \leqq e+1$ なので

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}e^x\,dx = \int_2^{e+1} \frac{1}{t}\,dt = \Big[\log t\Big]_2^{e+1} = \log(e+1)-\log 2 = \log\frac{e+1}{2}$$

A16.2（続き）

(5) $t = x^2$ とおくと $dt = 2x\,dx$，$\dfrac{1}{2}\,dt = x\,dx$ で $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $0 \leqq t \leqq 1$ なので

$$\int_0^1 e^{x^2} x\,dx = \int_0^1 e^t\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\Big[e^t\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{e-1}{2}$$

(6) $t = \sin x$ とおくと $dt = \cos x\,dx$ で $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $0 \leqq t \leqq 1$ なので

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2\ \cos x\,dx = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}$$

A16.3

(1) $\Big[x\,(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2} - \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,(-\cos x)\,dx = -\Big[x\cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

$$= -\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0\cos 0\right) + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = -\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0 - 0\right) + \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 0 + (1-0) = 1$$

(2) $\left[\dfrac{x^3}{3}\log x\right]_1^3 - \displaystyle\int_1^3 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}(3^3\log 3 - 1^3\log 1) - \frac{1}{3}\int_1^3 x^2\,dx$

$$= \frac{1}{3}(27\log 3 - 0) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = 9\log 3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(3^3 - 1^3) = 9\log 3 - \frac{26}{9}$$

(3) $\displaystyle\int_1^2 1\cdot\log x\,dx = \Big[x\log x\Big]_1^2 - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}\,dx = (2\log 2 - 1\log 1) - \int_1^2 1\,dx$

$$= (2\log 2 - 1\cdot 0) - \Big[x\Big]_1^2 = 2\log 2 - (2-1) = 2\log 2 - 1$$

(4) $\Big[xe^x\Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 1\cdot e^x\,dx = (1\,e^1 - 0\,e^0) - \Big[e^x\Big]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = e - e + 1 = 1$

(5) $\left[x\,\dfrac{1}{-2}\,e^{-2x}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 1\cdot\frac{1}{-2}\,e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\Big[xe^{-2x}\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}(1\,e^{-2} - 0\,e^0) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2}\,e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^2} - \frac{1}{4}(e^{-2} - e^0) = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{e^2-3}{4e^2}$$

(6) $\Big[x^2\sin x\Big]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi 2x\sin x\,dx = (\pi^2\sin\pi - 0^2\sin 0) - 2\left(\Big[x\,(-\cos x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 1\,(-\cos x)\,dx\right)$

$$= (\pi^2\cdot 0 - 0) - 2\left(-(\pi\cos\pi - 0\cos 0) + \int_0^\pi \cos x\,dx\right) = 2(\pi\,(-1) - 0) - 2\Big[\sin x\Big]_0^\pi$$

$$= -2\pi - 2(\sin\pi - \sin 0) = -2\pi - 2(0-0) = -2\pi$$