蒲谷・澤田・豊川・中村・松田 共著
「線形代数入門」（学術図書出版社）
問題の解答例

第 1 章　問

問 1.1　$c_1 = c_2 = 0$

問 1.2　(1)　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 a_1 + b_2 a_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

(2)　$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = (a_1 + b_1)\, c_1 + (a_2 + b_2)\, c_2 = a_1 c_1 + b_1 c_1 + a_2 c_2 + b_2 c_2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$

(3)　$(k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} k a_1 \\ k a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = k a_1 b_1 + k a_2 b_2 = k\,(a_1 b_1 + a_2 b_2) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k b_1 \\ k b_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b}) = k\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$

問 1.3　(1)　1　　(2)　1　　(3)　13　　(4)　25

問 1.4　$(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \cdot (\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$. また, $\|\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\| = \sqrt{2}$.

問 1.5　ベクトル方程式は $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ と書けることから, $x = 3 + 2t$, $y = 5 + t$ となる. t を消去して, $x - 2y + 7 = 0$ を導く.

問 1.6　直線 $y = -4x - 8$ の方向ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ である. これと $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ との内積は 0 であることから, 直交する.

問 1.7　(1)　$\sqrt{2}$　　(2)　3　　(3)　7

問 1.8　$\cos\theta = \dfrac{-10 - 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{32}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. よって, なす角 θ は $\dfrac{5}{6}\pi$ である.

問 1.9　(1)　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_2 a_3 - b_3 a_2 \\ b_3 a_1 - b_1 a_3 \\ b_1 a_2 - b_2 a_1 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(2)　$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} (a_2 + b_2)\, c_3 - (a_3 + b_3)\, c_2 \\ (a_3 + b_3)\, c_1 - (a_1 + b_1)\, c_3 \\ (a_1 + b_1)\, c_2 - (a_2 + b_2)\, c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 c_3 - a_3 c_2 \\ a_3 c_1 - a_1 c_3 \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$

(3)　$(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} (k a_2)\, b_3 - (k a_3)\, b_2 \\ (k a_3)\, b_1 - (k a_1)\, b_3 \\ (k a_1)\, b_2 - (k a_2)\, b_1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) = k\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

(4)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行ならば, あるスカラー λ が存在して $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$ と書ける. よって

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_2\,(\lambda a_3) - a_3\,(\lambda a_2) \\ a_3\,(\lambda a_1) - a_1\,(\lambda a_3) \\ a_1\,(\lambda a_2) - a_2\,(\lambda a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\,(a_2 a_3 - a_3 a_2) \\ \lambda\,(a_3 a_1 - a_1 a_3) \\ \lambda\,(a_1 a_2 - a_2 a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(5)　$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, a_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, a_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, a_3 = 0$ から, 垂直である. $\boldsymbol{b}$ についても, 同様.

問 1.10 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$ であり, $\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=2$ であることから, 求める体積は 2 となる.

問 1.11 ベクトル方程式は $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\4\\-1\end{bmatrix}$ と書けることから, $x=3$, $y=6+4t$, $z=9-t$ を得る. t を消去すると, 求める直線の方程式は $x=3$, $y+4z-42=0$ となる.

問 1.12 ベクトル方程式は $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}6\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}$ と書けることから, $x=2+6s$, $y=5+s+t$, $z=8+4t$ を導く. ここで, s と t を消去すると, 求める平面の方程式は $2x-12y+3z+32=0$ となる.

問 1.13 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

問 1.14 $\mathrm{P}(1,1,1)$, $\mathrm{Q}(0,1,-1)$, $\mathrm{R}(1,-1,2)$ とすると, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$ となる. よって, 求める平面のベクトル方程式は $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\2\\8\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$ となる. また, s,t を消去すれば, 平面の方程式は $4x-y-2z-6=0$ とかける. なお, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\1\\2\end{bmatrix}$ が法線ベクトルになることを用いてもよい.

問 1.15 (1) $A+B$ の (i,j) 成分 $a_{ij}+b_{ij}$ は $b_{ij}+a_{ij}$ とも書け, これは $B+A$ の (i,j) 成分であることから成り立つ.

(2) $(A+B)+C$ の (i,j) 成分 $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$ は $a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ とも書け, これは $A+(B+C)$ の (i,j) 成分であることから成り立つ.

(3) $A+O$ の (i,j) 成分 $a_{ij}+0$ は $0+a_{ij}=a_{ij}$ とも書け, これは $O+A=A$ の (i,j) 成分であることから成り立つ.

(4) $c(A+B)$ の (i,j) 成分 $c\,(a_{ij}+b_{ij})$ は $ca_{ij}+cb_{ij}$ とも書け, これは $cA+cB$ の (i,j) 成分であることから成り立つ. また, $(c+c')\,A$ の (i,j) 成分 $(c+c')\,a_{ij}$ は $ca_{ij}+c'a_{ij}$ とも書け, これは $cA+c'A$ の (i,j) 成分であることから成り立つ.

(5) $(cc')\,A$ の (i,j) 成分 $(cc')\,a_{ij}$ は $c\,(c'a_{ij})=c'\,(ca_{ij})$ とも書け, これは $c\,(c'A)$, $c'\,(cA)$ の (i,j) 成分であることから成り立つ.

問 1.16 (1) $\begin{bmatrix}2&4\\4&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}2&1&1\\1&0&5\\1&5&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&4\\-2&0&1\\-4&-1&0\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}-1&-3&2\\-3&3&5\\2&5&-7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&5&-7\\-5&0&1\\7&-1&0\end{bmatrix}$

問 1.17 WX, WZ, ZW, XY, YX, YZ の 6 通り.

問 1.18 $\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\0&4\end{bmatrix}$ および $\begin{bmatrix}4&2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8\\-1&0\end{bmatrix}$ であることから, 交換可能ではない.

問 1.19　行列 A の (i,j) 成分を $[A]_{ij}$ と表し, それぞれ成分ごとに計算すると, 以下の通り成り立つことがわかる.

(1) $[(AB)C]_{ij} = \sum_k (AB)_{ik}C_{kj} = \sum_k \left(\sum_l A_{il}B_{lk}\right) C_{kj} = \sum_l A_{il} \left(\sum_k B_{lk}C_{kj}\right) = [A(BC)]_{ij}$

(2) $[A(B+C)]_{ij} = \sum_k A_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_k A_{ik}(B_{kj}+C_{kj}) = \sum_k A_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}C_{kj} = [AB+AC]_{ij}$,

$[(A+B)C]_{ij} = \sum_k (A+B)_{ik}C_{kj} = \sum_k (A_{ik}+B_{ik})C_{kj} = \sum_k A_{ik}C_{kj} + \sum_k B_{ik}C_{kj} = [AC+BC]_{ij}$

(3) $[AE]_{ij} = \sum_k A_{ik}E_{kj} = \sum_k A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij}$,

$[EA]_{ij} = \sum_k E_{ik}A_{kj} = \sum_k \delta_{ik}A_{kj} = [A]_{ij}$,

$[AO]_{ij} = \sum_k A_{ik}O_{kj} = 0$,

$[OA]_{ij} = \sum_k O_{ik}[A]_{kj} = 0$

(4) $[c(AB)]_{ij} = c(AB)_{ij} = c\sum_k A_{ik}B_{kj} = \sum_k (cA_{ik})B_{kj} = [(cA)B]_{ij}$,

$[(A(cB)]_{ij} = \sum_k A_{ik}(cB_{kj}) = c\sum_k A_{ik}B_{kj} = [c(AB)]_{ij}$

問 1.20　行列 A に対して, $\left[A^\top\right]_{ij} = [A]_{ji}$ であることを用いる.

(1) (i,j) 成分を計算すると, 以下の通り示される

$$\left[(A+B)^\top\right]_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^\top)_{ij} + (B^\top)_{ij} = \left[A^\top + B^\top\right]_{ij}$$

(2) $(AB)^\top$ の (i,j) 成分は

$$\left[(AB)^\top\right]_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk}B_{ki}$$

である. 一方, 右辺 $B^\top A^\top$ の (i,j) 成分は

$$\left[B^\top A^\top\right]_{ij} = \sum_k (B^\top)_{ik}(A^\top)_{kj} = \sum_k B_{ki}A_{jk}$$

となる. ここで, $\sum_k A_{jk}B_{ki} = \sum_k B_{ki}A_{jk}$ により, 任意の成分について $\left[(AB)^\top\right]_{ij} = \left[B^\top A^\top\right]_{ij}$ が成り立つ.

問 1.21　$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$ (単位行列) であることから, $A^{1999} = A(A^3)^{666} = AE^{666} = A$.

問 1.22　(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,　　(2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = O$,

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}^2 = O$ となることから, いずれも冪零行列である.

問 1.23　〔和について〕　$A+B$ の (i,j) 成分 $a_{ij}+b_{ij}$ について, もし $i>j$ ならば $a_{ij}=0$ かつ $b_{ij}=0$ であることから, $(A+B)_{ij} = a_{ij}+b_{ij} = 0+0 = 0$ となる. よって, 和 $A+B$ も上三角行列である.

〔積について〕　積 AB の (i,j) 成分は定義から, $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ を得る. ここで, $i>j$ を仮定する. A, B が上三角であるため, $a_{ik} \neq 0$ ならば, 必ず $i \leq k$, また $b_{kj} \neq 0$ ならば必ず $k \leq j$ である. しかし, $i>j$ のときは, k が同時に $k \geq i$ かつ $k \leq j$ を満たすことはできない. 従って. 任意の $k \in \{1,\ldots,n\}$ に対して, 以下の少なくとも一方が成り立つ.

$$k<i \Rightarrow a_{ik}=0, \qquad k>j \Rightarrow b_{kj}=0$$

つまり, 任意の k に対して, $a_{ik}b_{kj}=0$ となることにより, $(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=0$ である. ゆえに, 積 AB も上三角行列であることが示された.

問 1.24 (1) 行列式は 2 となり, 正則である. 逆行列は $\begin{bmatrix}-1/2 & 3/2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ である.

(2) 行列式は 0 であることから, 正則でない.

(3) 行列式は 1 となり, 正則である. 逆行列は $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ である.

問 1.25 $A^k=\begin{bmatrix}-k+1 & -k\\ k & k+1\end{bmatrix}$

問 1.26 $J^2=\begin{bmatrix}j^2 & 2j & 0 & 0\\ 0 & j^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & j^2 & 2j\\ 0 & 0 & 0 & j^2\end{bmatrix}, K^2=\begin{bmatrix}k^2 & 0 & 0 & 0\\ 2k & k^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k^2 & 0\\ 0 & 0 & 2k & k^2\end{bmatrix}, JK=\begin{bmatrix}0 & 0 & jk+1 & k\\ 0 & 0 & j & jk\\ jk+1 & k & 0 & 0\\ j & jk & 0 & 0\end{bmatrix}, KJ=\begin{bmatrix}0 & 0 & kj & k\\ 0 & 0 & j & 1+kj\\ kj & k & 0 & 0\\ j & 1+kj & 0 & 0\end{bmatrix}$

問 1.27 (1) $x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=-1$ (2) 解なし

問 1.28 (1) 1 行目が零ベクトルにもかかわらず, 2 行目が零ベクトルでないことから, (i) に反する. 簡約形は $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

(2) 0 でない最初の成分がともに 2 列目にあることから, (iii) に反する. 簡約形は $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

(3) 1 行目の 0 でない最初の成分が 4 であることから, (ii) に反する. 簡約形は $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

(4) 0 でない最初の成分がともに 1 列目にあることから, (iii) に反する. 簡約形は $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

問 1.29 読者に委ねる.

問 1.30 (1) 簡約形は $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, ランクは 2. (2) 簡約形は $\begin{bmatrix}1 & 0 & 8/7 & 2\\ 0 & 1 & -6/7 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, ランクは 2.

(3) 簡約形は $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, ランクは 4.

問 1.31 (1) $x=t-2,\ y=t,\ z=1 \quad (t\in\mathbb{R})$ (2) $x_1=1-2s-t,\ x_2=s,\ x_3=1-t,\ x_4=t \quad (s,t\in\mathbb{R})$

問 1.32 (1) $x=0,\ y=t,\ z=-3t \quad (t\in\mathbb{R})$ (2) $x=-2t,\ y=t,\ z=3 \quad (t\in\mathbb{R})$

問 1.33 (1) $\begin{bmatrix}-1/2 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}-1/3 & 1/6 & 1/3\\ 1/3 & 1/12 & -1/3\\ 0 & -1/4 & 1\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}-1/2 & -2/3 & 5/2\\ 1 & 5/3 & -5\\ 0 & -1/3 & 1\end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & -1/2 & 3/2\\ 0 & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ -1/2 & 1 & -3/2\\ 1/2 & -1 & 5/2\end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix}-1/2 & 5/4 & 3/4\\ 1/2 & -3/4 & -1/4\\ 1/2 & -1/4 & -3/4\end{bmatrix}$

問 1.34 (1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

第 1 章　章末問題

1.1 以下の解答は一例である．元のベクトルとの内積が 0 であることを確かめることで, 直交することがわかる．

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

1.2 $y = 3$

1.3 直線 ℓ は 2 点 $(3, -1, 4)$, $(2, 1, 5)$ を通ることから, ℓ の方向ベクトルは $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ となる．よって, ℓ のベクトル方程式は, パラメータ $t \in \mathbb{R}$ を用いて, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+t \\ -1-2t \\ 4-t \end{bmatrix}$ と表せる．

次に, ℓ に直交する平面は, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ が法線ベクトルとなることから, $x-2y-z+d=0$ と表せる．これが点 $(3, -1, 4)$ を通ることから, $d = -1$ を得る．よって, $x-2y-z-1=0$ となる．これをベクトル方程式として表せば, $x = 2y+z+1$ により, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+z+1 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表せる．

1.4 $\left(\dfrac{19}{8}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{5}{8}\right)$

1.5 ベクトル方程式は, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ である．ただし s, t は実数とする．s, t を消去すれば, 平面の方程式は, $x - 2y + z + 10 = 0$ となる．

1.6 $p = 1$, $q = 3$, $r = 2$

1.7 $s = -4$, $t = 3$, $u = 0$, $v = 2$

1.8 $A^2 - 2A - E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

1.9 $A^k = \begin{bmatrix} p^k & q\left(1 + p + \cdots + p^{k-1}\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^k & \dfrac{q\left(1 - p^k\right)}{1-p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.10 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1.11 (1) $t=6$

(2) 拡大係数行列 $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 2 & t & 4 \end{bmatrix}$ を簡約化していくと, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & t-6 & 0 \end{bmatrix}$ となり, $t=6$ ならば解は無数に存在する. 一方, $t \neq 6$ ならば, さらに $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ と簡約化できることから, 解は $x=2$, $y=0$ となる. 以上のことから, 解がただ 1 つであるための必要十分条件は, $t \neq 6$ であることがわかる.

1.12 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である, ただし, t は実数とする. なお, これは解答の一例である.

1.13 $t \neq 1$

1.14 $s \neq 0$ かつ $t=1$

1.15 (1) $\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -1/a^2 & 1/a & 0 \\ 1/a^3-1/a^2 & -1/a^2 & 1/a \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1-b/4 & -1/2+b/4 & 1/2-b/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \\ 1/a & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.16 まず, $k=0$ のときは, $(R_\theta)^0 = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ であり, 成立する. 数学的帰納法の仮定として, $(R_\theta)^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$ が成り立つとする. $k+1$ の場合, $(R_\theta)^{k+1} = (R_\theta)^k R_\theta$ から, この行列の積を計算すると

$$\begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos((k+1)\theta) & -\sin((k+1)\theta) \\ \sin((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{bmatrix}$$

を導く. ここでは, 加法定理を用いた. よって, 自然数 k で成立することが示された. 次に, $k=-1$ のときも

$$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

から, 成り立つ. 最後に, $(R_\theta)^{-k} = (R_\theta^{-1})^k = R_{-\theta}^k = R_{-k\theta}$ となることから, 任意の負の整数に対しても成り立つ.

1.17 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (ただし, $ad-bc \neq 0$ とする) とおくと, $\det A = ad-bc$ であることから, 右辺は $\dfrac{1}{ad-bc}$ となる. 一方, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ であることから

$$\det(A^{-1}) = \frac{d}{ad-bc}\frac{a}{ad-bc} - \frac{-b}{ad-bc}\frac{-c}{ad-bc} = \frac{ad-bc}{(ad-bc)^2} = \frac{1}{ad-bc}$$

を導く. よって, 等式が成り立つ.

1.18 $A^\top B^\top = B^\top A^\top$ を示せばよい. 仮定により, $AB=BA$ が成り立つことに注意する. ここで, 転置の性質 $(AB)^\top = B^\top A^\top$ を用いれば, $B^\top A^\top = (AB)^\top = (BA)^\top = A^\top B^\top$ を導く.

1.19 $A^{-1}B = BA^{-1}$ を示せばよい. 仮定により, $AB=BA$ が成り立っている. これに A^{-1} を左と右から掛けると, $A^{-1}ABA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1} \iff BA^{-1} = A^{-1}B$ を得る. よって, 成り立つ.

1.20 〔和について〕 定義により, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, $\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii}$ である. また, 和 $A+B$ の対角成分は $[A+B]_{ii} = a_{ii}+b_{ii}$ であることから, 次のようにして示される.

$$\mathrm{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n [A+B]_{ii} = \sum_{i=1}^n (a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

〔積について〕 定義から, $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} [AB]_{ii}$ である．行列の積の成分は $[AB]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$ であり

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

となる．一方, BA のトレースは

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n}[BA]_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ik}$$

であることから, 和の順序を入れ替えると $\mathrm{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \mathrm{tr}(AB)$ となる．よって, 示された.

第 2 章　問

問 2.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

問 2.2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

問 2.3 $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ かつ $\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ から $\alpha^{-1} = \alpha^2$ が従う．さらに, これらのことから, $\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha\alpha^{-1} = \varepsilon$ が成り立つ.

問 2.4 3 つの巡回置換 $1 \mapsto 8 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 7 \mapsto 2$, $5 \mapsto 6 \mapsto 5$ の積 $\begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$ で表せる.

問 2.5 $1 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 3 \mapsto 6$ の巡回置換であることに注意する．さらに, $m \leq 5$ で $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}^m \neq \varepsilon$ および $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}^6 = \varepsilon$ が確かめられる．よって, $k = 6$ である.

問2.6 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 8 & 4 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}$

問 2.7 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 6 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ とおく．σ を巡回置換で表すと,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 \end{pmatrix}$$

となることから, 符号は $\mathrm{sgn}\,(\sigma) = (-1)^6 = 1$ となる.

問 2.8 (1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 1 = 2$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4 \cdot 6 - 0 \cdot 2 \cdot 5 - 0 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 6 = 6$

(3) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot (-6) + 2 \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-6) - 1 \cdot (-2) \cdot 3 - (-4) \cdot 1 \cdot 2 = 0$

問 2.9 (1) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1$

(2) $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 0$

(3) $\begin{vmatrix} 2a & a & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & 2+4a & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & a & 2+4a & -4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 2+4a & -4 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 0 & 2-a & -4+3a \\ 1 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 0 & 2-a & -4+3a \\ 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2-a & -4+3a \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2-a & -4+3a \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 4\{(2-a)\cdot(-2)-(-4+3a)\cdot 1\} = -4a$

問 2.10 (1) $\begin{vmatrix} x & 4 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4-3x & 8 & 9-4x \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 6 & -6 \\ 0 & -5 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4-3x & 8 & 9-4x \\ 0 & -6 & 6 & -6 \\ 0 & -5 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4-3x & 8 & 9-4x \\ -6 & 6 & -6 \\ -5 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

$= 6\begin{vmatrix} 4-3x & 8 & 9-4x \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 0 & 12-3x & 5-x \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 12-3x & 5-x \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -18\,(5-x)$

このことから, $x=5$ のとき行列式が 0 となる. 「4 列目 − 2 列目 = 1 列目」ならば行列式が 0 になることから, $x=5$ を導いてもよい.

(2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & y \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & y-7 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & y-5 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & y-5 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 & y-5 \\ 6 & 3 & 9 \\ 8 & 2 & 10 \end{vmatrix}$

$= -3\cdot 2\begin{vmatrix} 5 & -2 & y-5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & -4 & y-11 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & -4 & y-11 \\ 0 & 9 & -2y+25 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6\,(-2y+16)$

このことから, $y=8$ のとき行列式が 0 となる. 「1 列目 + 2 列目 + 3 列目 = 4 列目」ならば行列式が 0 になることから, $y=8$ を導いてもよい.

(3) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & z & 8 \\ 9 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 6 \\ 11 & 0 & z & 20 \\ 17 & 0 & -1 & 14 \\ 5 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 6 \\ 11+17z & 0 & 0 & 20+14z \\ 17 & 0 & -1 & 14 \\ -46 & 0 & 0 & -46 \end{vmatrix} = -46\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 6 \\ 11+17z & 0 & 0 & 20+14z \\ 17 & 0 & -1 & 14 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -46 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9-3z \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (-46) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9-3z \end{vmatrix} = 46\,(9-3z)$$

このことから, $z = 3$ のとき行列式が 0 となる.

問 2.11 $P_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$, $Q_{i,c} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$, $R_{i,j,c} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & c & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$

なお, $P_{i,j}$ は単位行列の i 行と j 行を入れ替えた行列, $Q_{i,c}$ は単位行列の (i,i) 成分を c とした行列, $R_{i,j,c}$ は単位行列の (i,j) 成分を c とした行列である. 上のように書けることから確認できる.

問 2.12 (1) 定理 2.24 から, $|A|^k = \left|A^k\right| = |E| = 1$ となる. このことから, $|A|$ は 1 の k 重根となる. よって, $|A|$ の絶対値は 1 である.

(2) N は冪零行列であることから, ある自然数 k があって, $N^k = O$ となる. よって, (1) と同様に, $|N| = 0$ が従う.

(3) $|A|\,|B| = |AB| = |O| = 0$ から, $|A| = 0$ または $|B| = 0$ が従う.

問 2.13 (1) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{3+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5$

(2) $\begin{vmatrix} 4 & 9 & 4 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$

(3) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a \begin{vmatrix} b & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot b \begin{vmatrix} 0 & b & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = a\left(ab^2 - a^3\right) + b\left(a^2 b - b^3\right) = -a^4 + 2a^2b^2 - b^4$

問 2.14 AB が正則であることから, $|AB| \neq 0$ が成立する. ここで, $|AB| = |A|\,|B|$ であることから, $|A| \neq 0$ かつ $|B| \neq 0$ となる. このことは, A と B がともに正則であることを意味する.

問 2.15 (1) $\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot (-1) & (-1)^{1+2} \cdot (-3) & (-1)^{1+3} \cdot (1-3) \\ (-1)^{2+1} \cdot (-4) & (-1)^{2+2} \cdot (-12) & (-1)^{2+3} \cdot (1-6) \\ (-1)^{3+1} \cdot (2-4) & (-1)^{3+2} \cdot (1-4) & (-1)^{3+3} \cdot (1-2) \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & -12 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot (-1+3) & (-1)^{1+2} \cdot (-2+5) & (-1)^{1+3} \cdot (-6+5) \\ (-1)^{2+1} \cdot 6 & (-1)^{2+2} \cdot (-1+10) & (-1)^{2+3} \cdot (-3) \\ (-1)^{3+1} \cdot (-2) & (-1)^{3+2} \cdot (1-4) & (-1)^{3+3} \cdot 1 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -3 & 9 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 3 & (-1)^{1+2} \cdot 0 & (-1)^{1+3} \cdot (-6) \\ (-1)^{2+1} \cdot (1+2) & (-1)^{2+2} \cdot (2-2) & (-1)^{2+3} \cdot (-4-2) \\ (-1)^{3+1} \cdot (-3) & (-1)^{3+2} \cdot 0 & (-1)^{3+3} \cdot 6 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

問 2.16 例 1.44 については, $\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\5\end{bmatrix}$ により, $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(27-25)/(6-5)\\(10-9)/(6-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ を得る.

例 1.46 については, $\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\4 & -2 & -3\\-1 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\5\\7\end{bmatrix}$ に対して, $\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\4 & -2 & -3\\-1 & 3 & 4\end{vmatrix}=-47$, $\begin{vmatrix}11 & 3 & -1\\5 & -2 & -3\\7 & 3 & 4\end{vmatrix}=-141$, $\begin{vmatrix}2 & 11 & -1\\4 & 5 & -3\\-1 & 7 & 4\end{vmatrix}=-94$, $\begin{vmatrix}2 & 3 & 11\\4 & -2 & 5\\-1 & 3 & 7\end{vmatrix}=-47$ により, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ となる.

問 2.17 2 つの行列はともに $(2n)\times(2n)$ 行列である. これらに, j 行目と $(n+j)$ 行目または j 列目と $(n+j)$ 列目 (ただし $j=1,\cdots,n$) を交換する操作を繰り返せば, $\begin{vmatrix}O & B\\C & D\end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix}C & D\\O & B\end{vmatrix}$ および $\begin{vmatrix}A & B\\C & O\end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix}B & A\\O & C\end{vmatrix}$ を得る. さらに, 定理 2.36 を適用すると, 主張が従う.

問 2.18 (1) 定理 2.36 と問 2.17 を用いる. $\begin{vmatrix}3 & 5 & 0 & 0\\4 & 7 & 0 & 0\\9 & 6 & 8 & 9\\2 & 1 & 6 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 5\\4 & 7\end{vmatrix}\begin{vmatrix}8 & 9\\6 & 7\end{vmatrix}=1\cdot 2=2$

(2) $\begin{vmatrix}0 & 0 & 9 & 5\\0 & 0 & 6 & 3\\7 & 8 & 4 & 9\\2 & 2 & 6 & 1\end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix}9 & 5\\6 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}7 & 8\\2 & 2\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-2)=6$ (3) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 9 & 5\\5 & 9 & 6 & 3\\1 & 8 & 0 & 0\\1 & 6 & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix}9 & 5\\6 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 8\\1 & 6\end{vmatrix}=6$

問 2.19 (1) $A=\begin{bmatrix}0 & 4\\1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 6\\1 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3 & 5\\2 & 0\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}3 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$ とおくと, D に関するシューア補行列は $A-BD^{-1}C=\begin{bmatrix}0 & 4\\1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 6\\1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 67/3\\0 & -5/3\end{bmatrix}$ である. 一方, A に関するシューア補行列は $D-CA^{-1}B=\begin{bmatrix}-5/4 & -15/2\\0 & 1\end{bmatrix}$ である. よって, 行列式は $\begin{vmatrix}A & B\\C & D\end{vmatrix}=\left|A-BD^{-1}C\right||D|=\frac{5}{3}\cdot 3=5$ となる. また, 逆行列は, $\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}=\frac{1}{5/3}\begin{bmatrix}-5/3 & -67/3\\0 & -1\end{bmatrix}$ により, $\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -67/5 & 4/5 & 6\\0 & -3/5 & 1/5 & 0\\1 & 72/5 & -4/5 & -6\\0 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ となる.

(2) $A=\begin{bmatrix}4 & 9\\2 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 9\\3 & 7\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}$ とおく. このとき, A に関するシューア補行列は $D-CA^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 2\\19/10 & 7/2\end{bmatrix}$ である. よって行列式は, $\begin{vmatrix}A & B\\C & D\end{vmatrix}=|A|\left|D-CA^{-1}B\right|=(-10)\cdot\frac{-3}{10}=3$ となる. 逆行列は $\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}=\frac{1}{-3/10}\begin{bmatrix}7/2 & -2\\-19/10 & 1\end{bmatrix}$ から, $\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2/3 & 2/3 & -19/3 & 7/3\\1/3 & -1/3 & 5/3 & -2/3\\-4/3 & -2/3 & -35/3 & 20/3\\2/3 & 1/3 & 19/3 & -10/3\end{bmatrix}$ となる.

(3) $A=\begin{bmatrix}a & 0\\0 & b\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}b & 0\\0 & a\end{bmatrix}$ とおくと, $a,b\neq 0$ のとき, A は正則となる. よって, $a,b\neq 0$ を仮定する. このとき, A に関するシューア補行列は, $A-BA^{-1}B=\begin{bmatrix}(a^2-b^2)/a & 0\\0 & (b^2-a^2)/b\end{bmatrix}$ となる. ゆえに, 行列式は $\begin{vmatrix}A & B\\B & A\end{vmatrix}=\left|A-BA^{-1}B\right||A|=-\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}\cdot ab=-(a^2-b^2)^2$ である. このことから, $a\neq\pm b$ のとき, シュー

ア補行列は正則となることがわかる．さらに，$\left(A-BA^{-1}B\right)^{-1}=\begin{bmatrix} a/(a^2-b^2) & 0 \\ 0 & b/(b^2-a^2) \end{bmatrix}$ であることから，

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{bmatrix} a & 0 & -b & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & -b \end{bmatrix}$$ を得る．

問 2.20 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3^2 & 5^2 \end{vmatrix}=(3-0)(5-0)(5-3)=30$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2^2 & 4^2 & 7^2 \\ -1 & 2^3 & 4^3 & 7^3 \end{vmatrix}=\{2-(-1)\}\{4-(-1)\}\{7-(-1)\}(4-2)(7-2)(7-4)=3600$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & x \\ 1 & 2^2 & 6^2 & x^2 \\ 1 & 2^3 & 6^3 & x^3 \end{vmatrix}=(2-1)(6-1)(x-1)(6-2)(x-2)(x-6)=20(x-1)(x-2)(x-6)$

問 2.21 3 つの空間ベクトル $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ が作る平行六面体の体積を $f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ と書くとき，$f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ は

$$\text{(i)}\ \ f(c\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=|c|\,f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}) \qquad \text{(ii)}\ \ f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{p}+c\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}) \qquad \text{(iii)}\ \ f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=1$$

を満たす．ただし，c は 0 でない実数とする．このとき，$f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=\left|\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r}\end{bmatrix}\right|$ を示す．条件 (i), (ii) から，$f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{p}-(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}),\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})=f(-\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})$，つまり

$$\text{(iv)}\ \ f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})$$

が成立する．f の性質 (iv), (i), (ii) はそれぞれ行基本変形 $P_{i,j},Q_{i,c},R_{i,j,c}$ に対応することに注意する．さらに，$\dfrac{f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})}{\left|\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r}\end{bmatrix}\right|}$ は行列 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r}\end{bmatrix}$ への行基本変形に対して値が変わらない，すなわち

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}' & \boldsymbol{q}' & \boldsymbol{r}'\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r}\end{bmatrix},\quad T\in\{P_{i,j},Q_{i,c},R_{i,j,c}\}\quad \text{に対して}\quad \frac{f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})}{\left|\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r}\end{bmatrix}\right|}=\frac{f(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}',\boldsymbol{r}')}{\left|\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}' & \boldsymbol{q}' & \boldsymbol{r}'\end{bmatrix}\right|}$$

となることが問 2.11 から容易に確かめられる．また，行列 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r}\end{bmatrix}$ は正則であることから，定理 1.63 により，行基本変形によって単位行列に簡約化できる．すると，(iii) と併せて，$\dfrac{f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})}{\left|\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r}\end{bmatrix}\right|}=\dfrac{f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)}{\left|\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{bmatrix}\right|}=1$ が成立する．よって，分母を払えば，$f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=\left|\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r}\end{bmatrix}\right|$ を得る．すなわち，空間ベクトル $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ が作る平行六面体の体積は，$\left|\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r}\end{bmatrix}\right|$ で与えられることがわかる．

問 2.22 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}^\top$ とおく．

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_2c_3-c_2b_3\\b_3c_1-c_3b_1\\b_1c_2-c_1b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2(b_1c_2-c_1b_2)-(b_3c_1-c_3b_1)a_3\\a_3(b_2c_3-c_2b_3)-(b_1c_2-c_1b_2)a_1\\a_1(b_3c_1-c_3b_1)-(b_2c_3-c_2b_3)a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(a_2c_2+a_3c_3)b_1\\(a_3c_3+a_1c_1)b_2\\(a_1c_1+a_2c_2)b_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}(a_2b_2+a_3b_3)c_1\\(a_3b_3+a_1b_1)c_2\\(a_1b_1+a_2b_2)c_3\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\, b_1 \\ (a_3c_3+a_1c_1+a_2c_2)\, b_2 \\ (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\, b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\, c_1 \\ (a_3b_3+a_1b_1+a_2b_2)\, c_2 \\ (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\, c_3 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}
$$

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} a_2b_3-b_2a_3 \\ a_3b_1-b_3a_1 \\ a_1b_2-b_1a_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_3b_1-b_3a_1)\, c_3 - c_2\,(a_1b_2-b_1a_2) \\ (a_1b_2-b_1a_2)\, c_1 - c_3\,(a_2b_3-b_2a_3) \\ (a_2b_3-b_2a_3)\, c_2 - c_1\,(a_3b_1-b_3a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_3c_3+a_2c_2)\, b_1 \\ (a_1c_1+a_3c_3)\, b_2 \\ (a_2c_2+a_1c_1)\, b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (b_3c_3+b_2c_2)\, a_1 \\ (b_1c_1+b_3c_3)\, a_2 \\ (b_2c_2+b_1c_1)\, a_3 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} (a_3c_3+a_2c_2+a_1c_1)\, b_1 \\ (a_1c_1+a_3c_3+a_2c_2)\, b_2 \\ (a_2c_2+a_1c_1+a_3c_3)\, b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (b_3c_3+b_2c_2+b_1c_1)\, a_1 \\ (b_1c_1+b_3c_3+b_2c_2)\, a_2 \\ (b_2c_2+b_1c_1+b_3c_3)\, a_3 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}
$$

問 2.23　簡単のため, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^\top$ を単位ベクトルとすると

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \\
&= \begin{bmatrix} b_2\,(a_1b_2-b_1a_2) - (a_3b_1-b_3a_1)\, b_3 \\ b_3\,(a_2b_3-b_2a_3) - (a_1b_2-b_1a_2)\, b_1 \\ b_1\,(a_3b_1-b_3a_1) - (a_2b_3-b_2a_3)\, b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(b_2^2+b_3^2\right) a_1 - (a_2b_2+a_3b_3)\, b_1 \\ \left(b_3^2+b_1^2\right) a_2 - (a_3b_3+a_1b_1)\, b_2 \\ \left(b_1^2+b_2^2\right) a_3 - (a_1b_1+a_2b_2)\, b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(b_2^2+b_3^2\right) a_1 + a_1b_1b_1 \\ \left(b_3^2+b_1^2\right) a_2 + a_2b_2b_2 \\ \left(b_1^2+b_2^2\right) a_3 + a_3b_3b_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

が成立する. なお, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交すること, $\boldsymbol{b}$ が単位ベクトルであることを用いた. 同様に, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ も示される. よって, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はこの順で右手系であることがわかる.

第 2 章　章末問題

2.1　数学的帰納法で示す. $n=1$ のとき, S_1 の元の個数は明らかに 1 である. $n=k$ のとき, S_k の元の個数は $k!$ と仮定する. 今, S_{k+1} の元は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 \\ \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_k & \ell_{k+1} \end{pmatrix}$ の形で表され, ℓ_{k+1} は $1, \ldots, k+1$ のうち $(k+1)$ 通りの選び方がある. また, 数学的帰納法の仮定により, $\ell_1, \ldots, \ell_k$ の選び方は S_k の元全体の数, つまり, $k!$ 通りである. 以上から, S_{k+1} の元の数は $(k+1)\cdot(k!) = (k+1)!$ であり, 主張は示された.

2.2　$\sigma, \tau \in S_n$ を偶置換とする. このとき, $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau) = 1$ から, $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) = 1$ となり, 積 $\sigma\tau$ も偶置換であることがわかる.

2.3　$\rho = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$ から, $\operatorname{sgn}(\rho) = (-1)^5 = -1$ となる.

2.4　$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k-1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ と $(k-1)$ 個の互換の積で表されることから, $\operatorname{sgn}(\rho) = (-1)^{k-1} = \begin{cases} 1 & (k \text{ は奇数}) \\ -1 & (k \text{ は偶数}) \end{cases}$ を得る.

2.5　(1) $\begin{vmatrix} 1000 & 1001 & 1004 \\ 1001 & 1002 & 1005 \\ 1002 & 1004 & 1003 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1000 & 1001 & 1004 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 7$

(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \sin\theta \begin{vmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} - \cos\theta \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix}$

$$
= \sin\theta\left(\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\right) - \cos\theta\left(-\cos^2\theta\sin^2\varphi - \cos^2\theta\cos^2\varphi\right) = \cos\theta
$$

(3) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & -5 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 0 & y-x & x-y \\ 0 & z-x & x-z \end{vmatrix} = (y-x)(x-z) - (x-y)(z-x) = 0$

(6) $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2b & -2a \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} = 2b \begin{vmatrix} a & a \\ b & c+a \end{vmatrix} - 2a \begin{vmatrix} a & b+c \\ b & b \end{vmatrix} = 4abc$

(7) $\begin{vmatrix} p & p & p \\ p & q & q \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & p-q & p-q \\ p & q & q \\ 0 & 0 & r-q \end{vmatrix} = p\,(p-q)\,(q-r)$

2.6 $\begin{vmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-z & 1-z & 1-z^2 \\ 0 & z-1 & 0 & 1-z \\ 0 & 0 & z-1 & 1-z \\ 1 & 1 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-z & (1-z)(2+z) \\ 0 & z-1 & 0 & 1-z \\ 0 & 0 & z-1 & 1-z \\ 1 & 1 & 1 & z \end{vmatrix}$

$= -(z-1)\left\{-(z-1)^2(2+z) - (1-z)^2\right\} = (z-1)^3(3+z)$

これにより, $z = 1, -3$ を導く.

2.7 行列の余因子は, $\widetilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\widetilde{a}_{12} = -\widetilde{a}_{21} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 48$, 他も同様に, $\widetilde{a}_{13} = -\widetilde{a}_{31} = 40$, $\widetilde{a}_{14} = -\widetilde{a}_{41} = 32$, $\widetilde{a}_{22} = \widetilde{a}_{33} = \widetilde{a}_{44} = 0$, $\widetilde{a}_{23} = -\widetilde{a}_{32} = -24$, $\widetilde{a}_{24} = -\widetilde{a}_{42} = 16$, $\widetilde{a}_{34} = -\widetilde{a}_{43} = -8$ を得る. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 64$ と併せて, 逆行列は $\dfrac{1}{64}\left[\widetilde{a}_{ji}\right]_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & -3/4 & 5/8 & -1/2 \\ 3/4 & 0 & 3/8 & -1/4 \\ -5/8 & -3/8 & 0 & 1/8 \\ 1/2 & 1/4 & -1/8 & 0 \end{bmatrix}$ となる.

2.8 $\begin{vmatrix} c_4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & x & -1 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & x & -1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & x & -1 \\ c_0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = c_4 \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_3 & -1 & 0 & 0 \\ c_2 & x & -1 & 0 \\ c_1 & 0 & x & -1 \\ c_0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

$= c_4x^4 + c_3 \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_2 & -1 & 0 \\ c_1 & x & -1 \\ c_0 & 0 & x \end{vmatrix} = c_4x^4 + c_3x^3 + c_2 \begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & -1 \\ c_0 & x \end{vmatrix} = c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$

2.9 $A\widetilde{A} = |A|\,E$ により, $|A|\left|\widetilde{A}\right| = \begin{vmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{vmatrix} = |A|^n$ が成立する．よって，もし $|A| \neq 0$ ならば, $\left|\widetilde{A}\right| = |A|^{n-1}$ が成立する．一方, もし $|A| = 0$ ならば, $A\widetilde{A} = O$ であるが, $\left|\widetilde{A}\right| \neq 0$ であれば, $\widetilde{A}$ は逆行列をもつことから, $A = O$ となる．$A = O$ であれば, 明らかに $\widetilde{A} = O$ となり，これは $\left|\widetilde{A}\right| \neq 0$ に矛盾する．よって, $|A| = 0$ ならば, $\left|\widetilde{A}\right| = 0$ が成立する．このことは, 等式 $\left|\widetilde{A}\right| = |A|^{n-1}$ が両辺ともに 0 として成立することを意味する．

2.10 A が正則であることから, $|A| \neq 0$ に注意する．$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|\,E$ により, $\widetilde{A}^{-1} = |A|^{-1}\,A$ が成立する．$\widetilde{A^{-1}}$ についても, $A^{-1}\widetilde{A^{-1}} = \left|A^{-1}\right|E$ に左から A を掛ければ, $\widetilde{A^{-1}} = \left|A^{-1}\right|A = |A|^{-1}\,A$ を得る．

2.11 $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -161$ および $(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -10$ から, 求める値は $\dfrac{10}{161}$ となる．

2.12 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ に対して, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 8$ から, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ を得る．

2.13 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}$ に対し, ファンデルモンドの行列式から, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ を導く．a と d, b と d, c と d を入れ替え, クラメルの公式から, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b-d)(c-d)\,/\,(b-a)(c-a) \\ (d-a)(c-d)\,/\,(b-a)(c-b) \\ (d-a)(d-b)\,/\,(c-a)(c-b) \end{bmatrix}$ を得る．

2.14 問 2.22 から従う．また, $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$ に注意して, 直接的に

$$(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}^\top = -v_2\,\boldsymbol{e}_1 + v_1\,\boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{e}_2 - (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{e}_1$$

と示すこともできる．ただし, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^\top$ とした．

2.15 (1) 例 2.38 から, 三角形の面積は $\left|\dfrac{1}{2}\det\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}\right| = \left|\dfrac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}\right|$ $= \left|\dfrac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\right| = \left|\dfrac{1}{2}\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right|$ で与えられることがわかる．

(2) 円の方程式は, 実数 a, b, c, d を用いて, $a\left(x^2 + y^2\right) + bx + cy + d = 0$ と表せる．よって，求める方程式は,

$\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right)+bx+cy+d=0 \\ a\left(x_1^2+y_1^2\right)+bx_1+cy_1+d=0 \\ a\left(x_2^2+y_2^2\right)+bx_2+cy_2+d=0 \\ a\left(x_3^2+y_3^2\right)+bx_3+cy_3+d=0 \end{cases}$ が非自明な解をもつことと同値である．つまり，$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ が求める方程式である．

2.16 $\widetilde{e}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e_3'+e_2'\right),\ \widetilde{e}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1'+e_3'\right),\ \widetilde{e}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e_2'+e_1'\right)$ とおく．$\widetilde{e}_1\times\widetilde{e}_2$ と $\widetilde{e}_3$ のなす角が 0 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 未満であること，すなわち，$(\widetilde{e}_1\times\widetilde{e}_2)\cdot\widetilde{e}_3>0$ を示す．等式 (2.15) と同様にして，次のようにして示される．

$$(\widetilde{e}_1\times\widetilde{e}_2)\cdot\widetilde{e}_3=\begin{vmatrix} e_1' & e_2' & e_3' \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_2'+e_1'\right)=\frac{1}{2}\left(e_1'+e_2'-e_3'\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_2'+e_1'\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$$

2.17 〔$\Rightarrow$〕 v_1, v_2, v_3 が互いに直交し，この順で右手系であるとする．ベクトル $a=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ に対し，余因子展開から $\begin{vmatrix} a & b & c \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=a\cdot(b\times c)$ が成り立つことに注意すると，$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=v_1\cdot(v_2\times v_3)=v_1\cdot v_1=|v_1|^2>0$ により，$\{v_1, v_2, v_3\}$ は正の向きにある．

〔$\Leftarrow$〕 次に，$\{v_1, v_2, v_3\}$ は互いに直交し正の向きにある単位ベクトルと仮定する．$v_1\times v_2$ は v_1 とも v_2 とも直交するから，$v_1\times v_2=v_3$ または $v_1\times v_2=-v_3$ が成立する．仮定から，$(v_1\times v_2)\cdot v_3=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}>0$ となり，$v_1\times v_2=v_3$ を得る．同様にして，$v_2\times v_3=v_1$ と $v_3\times v_1=v_2$ も成立する．従って，v_1, v_2, v_3 はこの順で右手系であることがわかる．

第 3 章　問

問 3.1 (1) $W=\left\{\begin{bmatrix} 3t \\ 2t \end{bmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\}$ とおく．W の元 $\begin{bmatrix} 3t_1 \\ 2t_1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 3t_2 \\ 2t_2 \end{bmatrix}$ と $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ に対し，$c_1\begin{bmatrix} 3t_1 \\ 2t_1 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 3t_2 \\ 2t_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\left(c_1t_1+c_2t_2\right) \\ 2\left(c_1t_1+c_2t_2\right) \end{bmatrix}$ は W の元であることから，W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間になる．定理 3.7 を参照せよ．

(2) $W=\left\{\begin{bmatrix} t-1 \\ -t+1 \end{bmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\}$ とおく．W の元 $\begin{bmatrix} t_1-1 \\ -t_1+1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} t_2-1 \\ -t_2+1 \end{bmatrix}$ と $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ に対し，$c_1\begin{bmatrix} t_1-1 \\ -t_1+1 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} t_2-1 \\ -t_2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (c_1t_1+c_2t_2-c_1-c_2+1)-1 \\ -(c_1t_1+c_2t_2-c_1-c_2+1)+1 \end{bmatrix}$ は W の元であることから，W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間になる．

問 3.2 $Bx=0$ の解空間は $\{x\in\mathbb{R}^3 \mid Bx=0\}=\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} x_1-2x_2-x_3=0 \\ x_2-x_3=0 \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix} 3t \\ t \\ t \end{bmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\}$ となる．このことは，$x_2=x_3=t$ とおけば，$x_1=3t$ となることによりわかる．

問 3.3 $\begin{bmatrix} p & q & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ でランクが 3 であることにより，p, q, s は 1 次独立である．定理 3.15 を参照せよ．

一方, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ から, この行列のランクは 3 以下となる. ランクが 4 にならないことから, $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ は 1 次従属である.

問 3.4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと, $\left\{ \boldsymbol{x} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ となる. A の簡約化は $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ であることにより, $x_3 = s$, $x_4 = t$ とおけば,

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ s+t \\ s \\ t \end{bmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

となる. よって, 基底として $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ がとれ, 次元は 2 となる.

問 3.5 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ とおけば, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立で $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^\top = -\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top = 0\boldsymbol{x}_1 + 0\boldsymbol{x}_2$, $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}^\top = 3\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top = -\boldsymbol{x}_1$ から, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は求める部分空間の基底である. よって, 次元は 2 となる.

問 3.6 $\left\{ \begin{array}{l} 2\,x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 = 0 \\ 3\,x_1 - 5\,x_2 + 2\,x_3 = 0 \end{array} \right.$ の解空間を W_1 とし, $x_1 - 2\,x_2 - 2\,x_3 = 0$ の解空間を W_2 とする. 共通空間は $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{r} 2\,x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 = 0 \\ 3\,x_1 - 5\,x_2 + 2\,x_3 = 0 \\ x_1 - 2\,x_2 - 2\,x_3 = 0 \end{array} \right\}$ である. さらに, $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ から, $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -14t \\ -8t \\ t \end{bmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ を導く.

和空間を求めるため, W_1 と W_2 の基底をそれぞれ求める. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ により, $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -14t \\ -8t \\ t \end{bmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ となる. 従って, W_1 は $\begin{bmatrix} -14 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$ で生成される. また, $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2s+2t \\ s \\ t \end{bmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$ により, W_2 は $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で生成される. よって, 和空間 $W_1 + W_2$ は $\begin{bmatrix} -14 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で生成される. ここで, $\begin{bmatrix} -14 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} = -8 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ から, $W_1 + W_2$ は $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で生成されることがわかる. ゆえに, $W_1 + W_2 = \left\{ s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$ を得る.

なお, $\left\{ \begin{array}{l} 2\,x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 = 0 \\ 3\,x_1 - 5\,x_2 + 2\,x_3 = 0 \end{array} \right.$ ならば $x_1 - 2\,x_2 - 2\,x_3 = 0$ となることから, $W_1 \subset W_2$ が成り立つことに注意すると, $W_1 \cap W_2 = W_1$ および $W_1 + W_2 = W_2$ を示すこともできる.

問 3.7 $W_1 = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $W_2 = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ とおく．W_1 は $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ で生成され, W_2 は $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ で生成される．よって, 和空間 W_1+W_2 は $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ で生成される．$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ から, $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は 1 次独立であることにより, $\mathbb{R}^3$ を生成する．定理 3.35 を参照せよ．ゆえに, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ となる．

共通空間 $W_1 \cap W_2$ を求めるため, W_1 と W_2 を解空間として表す．W_1 は $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ の解空間, W_2 は $x_1 - x_3 = 0$ の解空間である．よって, 次を導く．

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{r} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{r} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 6x_3 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

問 3.8 $W_1 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$, $W_2 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ とおく．$W_1+W_2 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ で $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ は 1 次独立であることにより, $W_1+W_2 = \mathbb{R}^2$ を導く．さらに, 定理 3.37 から, $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2)$ と $\dim W_1 = \dim W_2 = 1$, $\dim(W_1 + W_2) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ により, $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ となる．よって, $W_1 + W_2$ は直和であることから, $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$ を導く．定理 3.38 を参照せよ．

問 3.9 $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & 6 & -12 \\ 0 & -4 & 3 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ により, $\operatorname{rank} g = 2$ となる．定理 3.49 を参照せよ．また, $\operatorname{null} g = 4 - 2 = 2$ である．定理 3.46 を見よ．

問 3.10 (1) 恒等写像 $1_V : V \to V$ は線形写像で全単射であることから, $V \cong V$ となる．

(2) $V \cong W$ により, 線形写像である全単射 $f : V \to W$ が存在する．f の逆写像 $f^{-1} : W \to V$ も線形写像で全単射であることから, $W \cong V$ となる．

(3) $U \cong V$, $V \cong W$ により, 線形写像である全単射 $f : U \to V$, $g : V \to W$ が存在する．合成写像 $g \circ f : U \to W$ も線形写像で全単射であることから, $U \cong W$ を導く．

問 3.11 次元が n のベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ と W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ を用いて, $f : V \to W$ を $f(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{w}_n$ で定める．ただし, $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ とする．$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は 1 次独立により, $c_1, \cdots, c_n$ は一意に定まり, f は一意に定まる．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ と $c, c' \in \mathbb{R}$ に対して, $f(c\boldsymbol{v} + c'\boldsymbol{v}') = cf(\boldsymbol{v}) + c'f(\boldsymbol{v}')$ となることから, f は線形写像である．W の任意の元 $d_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + d_n\boldsymbol{w}_n$ (ただし, $d_1, \cdots, d_n \in \mathbb{R}$) は $d_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + d_n\boldsymbol{w}_n = f(d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_n\boldsymbol{v}_n)$ と書けることにより, f は全射であることがわかる．$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\}$ がいえれば, f が単射であることは示される．定理 3.53 を参照せよ．$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \in \operatorname{Ker} f$ とすれば, $f(\boldsymbol{v}) = f(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0}$ で, $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ は 1 次独立により, $c_1 = \cdots = c_n = 0$ となる．よって, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ から, $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\}$ がわかる．

問 3.12 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に対して, f が恒等写像であることから, $f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i$ となる. ただし, $i = 1, \cdots, n$ とする. f の表現行列を $A = [a_{ij}]$ とすれば, $a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ により, A は単位行列であることがわかる.

問 3.13 $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に対し, $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^\top\right) = \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix}^\top = 7\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^\top\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^\top = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^\top\right) = \begin{bmatrix} 7 & -1 \end{bmatrix}^\top = 7\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ から, 表現行列は $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ となる.

問 3.14 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し, f は $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表せることに注意する. $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $g(\boldsymbol{y}) = A^{-1}\boldsymbol{y}$ と定めれば, g は線形変換で, $g(f(\boldsymbol{x})) = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ および $f(g(\boldsymbol{y})) = A\left(A^{-1}\boldsymbol{y}\right) = \boldsymbol{y}$ を満たす. よって, g は f の逆写像になる. $g(\boldsymbol{y}) = A^{-1}\boldsymbol{y}$ から, g の標準基底に関する表現行列は A^{-1} であることもわかる.

問 3.15 $\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とする. 求める変換行列を P とすれば, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} P$ により, $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ を導く.

問 3.16 $f(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{u}$, $f(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$ から, $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ である. $f(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = -3\boldsymbol{s}$, $f(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = 7\boldsymbol{s} + 2\boldsymbol{t}$ から, $B = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ となる. ここで, $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} P$ により,

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

を得る. よって, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ である, ゆえに, 次の等式を導く.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = B$$

問 3.17 $\begin{bmatrix} 3 & 9 & t & 1 \end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix} 7 & -t & t & -1 \end{bmatrix}^\top = 21 - 9t + t^2 - 1 = t^2 - 9t + 20 = 0$ により, $t = 4, 5$ である.

問 3.18 求めるベクトルを $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ とおけば, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を満たす. また

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

から, $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} t & -3t & -t & t \end{bmatrix}^\top$ と表される. ただし, t は実数とする. $\begin{bmatrix} t & -3t & -t & t \end{bmatrix}^\top$ のノルムが $\sqrt{12\,t^2}$ であることから, このベクトルのノルムが 1 となるのは $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{12}}$ のとき. よって, 求めるベクトルは $\pm\dfrac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ である.

問 3.19　$\mathbb{R}^3$ のベクトルの組を $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ とおく．$\boldsymbol{v}_1$ を正規化して，$\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ とおく．$\boldsymbol{v}_2$ から $\boldsymbol{u}_1$ 方向の成分を引いて，$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ を得る．さらに，これを正規化して $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ とおく．$\boldsymbol{v}_3$ から $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ 方向の成分を引いて，次を得る．

$$\boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}^\top$$

これを正規化して，$\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$ を導く．この $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ が直交化したものである．

問 3.20　点 (x, y) を $(r\cos\theta_0, r\sin\theta_0)$ と表すことにする．この点を，原点を中心に θ 回転させた点の位置は $(r\cos(\theta_0+\theta), r\sin(\theta_0+\theta))$ となる．一方

$$P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\cos\theta_0 \\ r\sin\theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\theta_0 - r\sin\theta\sin\theta_0 \\ r\sin\theta\cos\theta_0 + r\cos\theta\sin\theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta_0+\theta) \\ r\sin(\theta_0+\theta) \end{bmatrix}$$

である．よって，P を左から掛けることと，原点を中心に θ 回転させることが一致することが示された．

問 3.21　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W^\perp$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して，全ての $\boldsymbol{w} \in W$ について $(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2)\cdot\boldsymbol{w} = 0$ を示せば，$W^\perp$ は V の部分空間である．定理 3.41 を見よ．実際，$\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{w} = 0$, $\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{w} = 0$ により，$(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2)\cdot\boldsymbol{w} = c_1(\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{w}) + c_2(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{w}) = 0$ となる．次に，$W \cap W^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$ を示す．$\boldsymbol{x} \in W \cap W^\perp$ とすると，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0$ により，$\|\boldsymbol{x}\| = 0$ であることから，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．定理 3.65 を参照せよ．よって，$W \cap W^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$ である．

問 3.22　$W = \{\boldsymbol{x} \mid x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$ が $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ で生成されることは，$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2s - 2t + u \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} \middle| s, t, u \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| s, t, u \in \mathbb{R} \right\}$ となることからわかる．よって，$W^\perp$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に直交する部分空間である．$W^\perp$ が $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ の解空間であることから，$W^\perp = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^\top \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ を導く．ちなみに，W の直交補空間の $\boldsymbol{0}$ でないベクトルとして，$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^\top$ がとれることはすぐにわかる．また，$\dim W = 4 - 1 = 3$ から，定理 3.82 により，$\dim W^\perp = 4 - 3 = 1$ である．よって，$W^\perp$ は $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^\top$ を基底にもつことがわかる．

問 3.23　$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}^\top$ とおくとき，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}^\top$ に対し

$$p(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} 3/2 & -3/2 & 0 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

となる．例 3.81 と同じ結果になることに注意せよ．

問 3.24　$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ の基底として $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$ がとれる．これを

正規直交化して正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{u}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}^\top$ を得る．これらを用いて

$$p\left(\begin{bmatrix}2\\-1\\4\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}2\\-1\\4\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{u}_1\right)\boldsymbol{u}_1+\left(\begin{bmatrix}2\\-1\\4\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{u}_2\right)\boldsymbol{u}_2=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}-\frac{7}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3\\-8/3\\7/3\end{bmatrix}$$

を得る．なお，$\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\end{bmatrix}^\top=\begin{bmatrix}1/3 & -8/3 & 7/3\end{bmatrix}^\top+\begin{bmatrix}5/3 & 5/3 & 5/3\end{bmatrix}^\top$ で $\begin{bmatrix}1/3 & -8/3 & 7/3\end{bmatrix}^\top\in W$ および $\begin{bmatrix}5/3 & 5/3 & 5/3\end{bmatrix}^\top\in W^\perp$ に注意せよ．

問 3.25 $W=\{\boldsymbol{x}\mid x_1-2x_2+2x_3-x_4=0\}$ とおく．問 3.22 において，$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top$ は W の基底であることから，$\dim W=3$ である．また，$W^\perp=\left\{t\begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & -1\end{bmatrix}^\top\,\middle|\,t\in\mathbb{R}\right\}$ の基底として $\begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & -1\end{bmatrix}^\top$ がとれることにより，$\dim W^\perp=1$ であることがわかる．従って，$\dim\mathbb{R}^4=4=3+1=\dim W+\dim W^\perp$ が成り立つ．

第 3 章　章末問題

3.1 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}\in\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\,\middle|\,x+2y+3z=0\right\}$ と $c,c'\in\mathbb{R}$ に対して，$c\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+c'\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cx+c'x'\\cy+c'y'\\cz+c'z'\end{bmatrix}$ は

$$(cx+c'x')+2(cy+c'y')+3(cz+c'z')=c(x+2y+3z)+c'(x'+2y'+3z')=c\,0+c'\,0=0$$

により，$\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\,\middle|\,x+2y+3z=0\right\}$ のベクトルである．よって，$\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\,\middle|\,x+2y+3z=0\right\}$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．定理 3.7 を見よ．ちなみに，$x+2y+3z=0$ の解空間であることからもわかる．定理 3.10 を確認せよ．

3.2 (1) $\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\,\middle|\,y=0\right\}$ は部分空間であることが，$y=0$ の解空間になることからわかる．

(2) $\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\,\middle|\,4x+7y=1\right\}$ は部分空間でない．$\mathbf{0}$ を含まないことからわかる．

(3) $W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\,\middle|\,(x+y)(x-y)=0\right\}$ は部分空間でない．$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\in W$ であるが，$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\notin W$ であることにより，W は部分空間でないことがわかる．

3.3 $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $(a,b\in\mathbb{R})$ とおく．$\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ により，$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$ を導く．よって，$\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=-\dfrac{3}{4}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}+\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ を得る．

3.4 $\begin{bmatrix}t\\2\\3\end{bmatrix}$ が $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ の 1 次結合で表せるとき，ある実数 a, b で $\begin{bmatrix}t\\2\\3\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ と表される．この第 2 成分と第 3 成分をみると，$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ となる．よって，$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-4\end{bmatrix}$ が成り立つ．ゆえに，$\begin{bmatrix}t\\2\\3\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$ から，$t=-1$ となる．

3.5 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$ により, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次独立である. また, $\begin{vmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0$ により, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は 1 次従属である.

3.6 $\left\{\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \,\middle|\, x+4y-6z=0\right\} = \left\{\begin{bmatrix}-4s+6t\\ s\\ t\end{bmatrix} \,\middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\} = \left\{s\begin{bmatrix}-4\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}6\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \,\middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\}$ により, 基底として $\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top$, $\begin{bmatrix}6 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top$ がとれる.

3.7 (1) $f_1\left(\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+1\\ y+1\\ z+1\end{bmatrix}$ は, $f_1\left(\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ から, 線形写像でない. $g_1\left(\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x-1\\ y-1\\ z-1\end{bmatrix}$ は f_1 の逆写像になることから, f_1 は全単射である.

(2) $f_2\left(\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+2y\\ 2y+3z\\ x+3z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ と表せることから, f_2 は線形写像である. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix} = 12 \neq 0$ から, $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ の逆行列は存在する. $g_2\left(\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ は f_2 の逆写像であり, f_2 は全単射である.

(3) $f_3\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x^2\\ xy\\ y^2\end{bmatrix}$ は, $f_3\left(\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right) + f_3\left(\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ および $f_3\left(\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ を満たす. このことから, $f_3\left(\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right) + f_3\left(\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right) \neq f_3\left(\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)$ となり, f_3 は線形写像でないことがわかる. また, $f_3\left(\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}\right) = f_3\left(\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right)$ により, f_3 は単射でない. さらに, $f_3\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)$ の第 1 成分は負になり得ないことから, f_3 は全射でもない.

3.8 (1) $f\left(\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+3y+9z-4w\\ 4x-y+10z-3w\\ -2x+5y+4z-3w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 9 & -4\\ 4 & -1 & 10 & -3\\ -2 & 5 & 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 9 & -4\\ 4 & -1 & 10 & -3\\ -2 & 5 & 4 & -3\end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 9 & -4\\ 4 & -1 & 10 & -3\\ -2 & 5 & 4 & -3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 3 & 9 & -4\\ 0 & -13 & -26 & 13\\ 0 & 11 & 22 & -11\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 3 & 9 & -4\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\operatorname{rank} A = 2$

(3) A の簡約化から, $\operatorname{Im} f$ の基底として, $\begin{bmatrix}1 & 4 & -2\end{bmatrix}^\top$, $\begin{bmatrix}3 & -1 & 5\end{bmatrix}^\top$ がとれる.

(4) A の簡約化から, $\operatorname{Ker} f$ の基底として, $\begin{bmatrix}-3 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top$, $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top$ がとれる.

(5) $\dim\operatorname{Im} f + \dim\operatorname{Ker} f = 2+2 = 4$ である. $\dim\operatorname{Im} f + \dim\operatorname{Ker} f = \dim\mathbb{R}^4 = 4$ もわかる. 定理 3.52 を見よ.

3.9 $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 7 & -3 & 18 & 2\\ -1 & 1 & -3 & 0 & -1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 7 & -7 & 24 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 45 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

となる. よって, $\operatorname{Ker} f$ の基底として, $\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^\top$, $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top$ がとれ, $\operatorname{null} f = 2$ となる. また, $\operatorname{Im} f$ の基底として, $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}^\top$, $\begin{bmatrix}0 & 7 & 1\end{bmatrix}^\top$, $\begin{bmatrix}-3 & 18 & 0\end{bmatrix}^\top$ がとれ, $\operatorname{rank} f = 3$ を導く.

3.10 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ により, $P^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ を得る．よって,

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

となる．なお, $A\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}_2$ および $A\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2$ から, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ に関する表現行列が B に一致する．

3.11 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} P$ により, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ を得る．

3.12 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}^\top$ とおく．$\boldsymbol{v}_1$ を正規化して, $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ を得る．$\boldsymbol{v}_2$ から $\boldsymbol{u}_1$ 方向の成分を引き, $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^\top - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ とし, 正規化して $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ を導く．$\boldsymbol{v}_3$ から $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ 方向の成分を引き, $\boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}^\top - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}^\top$ とし, 正規化して $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^\top$ を得る．

3.13 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ とおく．まず, $\boldsymbol{v}_1$ を正規化して $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ とおく．次に, $\boldsymbol{v}_2$ から $\boldsymbol{u}_1$ 方向の成分を引いて

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$$

とし, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ を得る．さらに, $\boldsymbol{v}_3$ から $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ 方向の成分を引き

$$\boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

とし, これを正規化して $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ を導く．最後に, $\boldsymbol{v}_4$ から $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ 方向の成分を引いて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_4' &= \boldsymbol{v}_4 - (\boldsymbol{v}_4 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{v}_4 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 - (\boldsymbol{v}_4 \cdot \boldsymbol{u}_3)\boldsymbol{u}_3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 & -1/6 & 0 \end{bmatrix}^\top \end{aligned}$$

を得て, これを正規化することで $\boldsymbol{u}_4 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ を導く．

3.14 $\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \,\middle|\, \begin{array}{r} x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 6x_4 + 9x_5 - 8x_6 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 - 5x_6 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ とおく, すなわち,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & -6 & 9 & -8 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ とする．簡約化が $A \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 14 & -6 & 17 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となることにより, $\operatorname{rank} A = 2$ である．定理 3.46 から, $\dim \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\} = 6 - \operatorname{rank} A = 6 - 2 = 4$ である．

3.15 〔和について〕 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して, $(f+g)(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2) = f(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2) + g(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2) = c_1 f(\boldsymbol{x}_1) + c_2 f(\boldsymbol{x}_2) + c_1 g(\boldsymbol{x}_1) + c_2 g(\boldsymbol{x}_2) = c_1(f+g)(\boldsymbol{x}_1) + c_2(f+g)(\boldsymbol{x}_2)$ であることから．$f+g$ は線形変換である．

〔合成について〕 $g \circ f\,(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2) = g\,(f(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2)) = g\,(c_1 f(\boldsymbol{x}_1) + c_2 f(\boldsymbol{x}_2)) = c_1 g(f(\boldsymbol{x}_1)) + c_2 g(f(\boldsymbol{x}_2)) = c_1 g \circ f(\boldsymbol{x}_1) + c_2 g \circ f(\boldsymbol{x}_2)$ により, $g \circ f$ は線形変換である.

3.16 $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ により, $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ となる x, y を求めればよい. この x, y は $-2x + y = -1$ を満たすことから, φ の像は直線 $y = 2x - 1$ になる. θ を実数とし, 円 $x^2 + y^2 = 1$ の点を $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ と表せば, $\varphi\left(\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2\cos\theta + \sin\theta \\ 6\cos\theta - 3\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\cos\theta + \sin\theta \\ -3(-2\cos\theta + \sin\theta) \end{bmatrix}$ となる. ここで, $\cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる α を用いて, $-2\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{5}\left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\cos\theta + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta\right) = \sqrt{5}\cos(\theta - \alpha)$ と表せることから, $\varphi\left(\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sqrt{5}\cos(\theta - \alpha) \\ -3\sqrt{5}\cos(\theta - \alpha) \end{bmatrix}$ が導かれる. 以上により, $x^2 + y^2 = 1$ の点全体の像は, 2 点 $(\sqrt{5}, -3\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ を結ぶ線分になることがわかる.

第 4 章　問

始めに解答に関する注意事項を述べておく. 章末問題の解答についても同様である.

- 固有値を求める際, 行列式の計算が必要となる. 2 次行列の場合は 67 ページの (2.5) を用いればよい. 3 次以上の場合は余因子展開などが有用である. 行列式の計算の工夫については, 第 2 章の 2.2.3 節以降を参照せよ.
- 解答例の固有ベクトルは, その一例である. 固有ベクトルは 1 つに定まらないことに注意せよ. 157 ページで述べている通り, $\boldsymbol{x}$ が固有値 λ の固有ベクトルであるとき, 任意のスカラー $c \neq 0$ に対し, $c\,\boldsymbol{x}$ も固有値 λ の固有ベクトルである. また, 固有空間の表示も一意でないことに注意せよ.
- 例 4.6 が示唆するように, 実行列の固有値は虚数になり得る. 固有値が虚数の場合, 対応する固有ベクトルは複素ベクトル, 固有空間は複素ベクトル空間の部分空間であるものとする.
- 正方行列 A を対角化する際, $P^{-1}AP = D$ を満たす正則行列 P および対角行列 D を構成する必要がある. D は A の固有値を対角成分に並べて構成し, P は固有ベクトルを並べて構成するが, それらの並べ方は一意ではない, すなわち, P と D は 1 つに定まらない. 「D の (i, i) 成分が A の固有値 λ_i であるとき, P の第 i 列は固有値 λ_i の固有ベクトルである」という条件を満たした並べ方であればよい.

問 4.1　求めるのは固有値と対応する固有ベクトルであるが, 固有空間も併記している.

(1) $\det\left(\lambda E - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda(\lambda - 1)$ であることから, 固有値は $\lambda = 0, 1$ である.

固有値 $\lambda = 0$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $\left(0E - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とおくと

$$\left(0E - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる. よって, $x = 0$ である. ゆえに, $\boldsymbol{x} = y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる. 従って, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda = 0$ の固有ベクトルである. さらに, $W(0) = \left\{ y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}$ である.

次に, 固有値 $\lambda=1$ に対する固有ベクトルを求める. $\left(1E-\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left(1E-\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる. よって, $y=0$ である. ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=1$ の固有ベクトルである. さらに, $W(1)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$ である.

(2) $\det\left(\lambda E-\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-2&-1\\0&\lambda-3\end{bmatrix}\right)=(\lambda-2)(\lambda-3)$ であることから, 固有値は $\lambda=2,3$ である.

固有値 $\lambda=2$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $\left(2E-\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left(2E-\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0&-1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる. よって, 第 1 成分からも第 2 成分からも $y=0$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=2$ の固有ベクトルである. さらに, $W(2)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$ である.

固有値 $\lambda=3$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $\left(3E-\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left(3E-\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-y\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる. よって, $y=x$ である. ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=3$ の固有ベクトルである. さらに, $W(3)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$ である.

(3) $\det\left(\lambda E-\begin{bmatrix}3&1\\2&2\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-3&-1\\-2&\lambda-2\end{bmatrix}\right)=(\lambda-1)(\lambda-4)$ であることから, 固有値は $\lambda=1,4$ である.

固有値 $\lambda=1$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $\left(1E-\begin{bmatrix}3&1\\2&2\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left(1E-\begin{bmatrix}3&1\\2&2\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2&-1\\-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x-y\\-2x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる. よって, 第 1 成分からも第 2 成分からも $y=-2x$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=1$ の固有ベクトルである. さらに, $W(1)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$ である.

固有値 $\lambda=4$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $\left(4E-\begin{bmatrix}3&1\\2&2\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left(4E-\begin{bmatrix}3&1\\2&2\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-y\\-2x+2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる．よって, 第 1 成分からも第 2 成分からも $y=x$ を得る．ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ となる．従って, $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=4$ の固有ベクトルである．さらに, $W(4)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$ である．

(4) $\det\left(\lambda E-\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-1&-4\\-1&\lambda-1\end{bmatrix}\right)=(\lambda+1)(\lambda-3)$ であることから, 固有値は $\lambda=-1,3$ である．

固有値 $\lambda=-1$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $\left(-1E-\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい．$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left(-1E-\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2&-4\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x-4y\\-x-2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる．よって, 第 1 成分からも第 2 成分からも $x=-2y$ を得る．ゆえに, $\boldsymbol{x}=y\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ となる．従って, $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=-1$ の固有ベクトルである．さらに, $W(-1)=\left\{y\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\middle|\, y\in\mathbb{R}\right\}$ である．

固有値 $\lambda=3$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $\left(3E-\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい．$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left(3E-\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2&-4\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-4y\\-x+2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる．よって, 第 1 成分からも第 2 成分からも $x=2y$ を得る．ゆえに, $\boldsymbol{x}=y\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ となる．従って, $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=3$ の固有ベクトルである．さらに, $W(3)=\left\{y\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\middle|\, y\in\mathbb{R}\right\}$ である．

問 4.2　問 4.1 の解答例と同様に, 固有空間も記載する．

(1) $\det\left(\lambda E-\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda&1\\-1&\lambda\end{bmatrix}\right)=\lambda^2+1$ であることから, 固有値は $\lambda=\pm i$ である．

固有値 $\lambda=i$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $\left(iE-\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい．$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left(iE-\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}i&1\\-1&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ix+y\\-x+iy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる．よって, 第 1 成分からも第 2 成分からも $y=-ix$ を得る．ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$ となる．従って, $\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=i$ の固有ベクトルである．さらに, $W(i)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{C}\right\}$ である．

固有値 $\lambda=-i$ に対する固有ベクトルを求める．$\left(-iE-\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい．$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left(-iE-\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-i&1\\-1&-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-ix+y\\-x-iy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる．よって, 第 1 成分からも第 2 成分からも $y=ix$ を得る．ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ となる．従って, $\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=-i$ の固有ベクトルである．さらに, $W(-i)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{C}\right\}$ である．

(2) $\det\left(\lambda E-\begin{bmatrix}0&1\\-2&0\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda&-1\\2&\lambda\end{bmatrix}\right)=\lambda^2+2$ であることから, 固有値は $\lambda=\pm\sqrt{2}\,i$ である.

固有値 $\lambda=\sqrt{2}i$ に対する固有ベクトルを求める. $\left(\sqrt{2}iE-\begin{bmatrix}0&1\\-2&0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left(\sqrt{2}iE-\begin{bmatrix}0&1\\-2&0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}i&-1\\2&\sqrt{2}i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}ix-y\\2x+\sqrt{2}iy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる. よって, 第 1 成分からも第 2 成分からも $y=\sqrt{2}ix$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}i\end{bmatrix}$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}i\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=\sqrt{2}i$ の固有ベクトルである. さらに, $W(\sqrt{2}i)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}i\end{bmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{C}\right\}$ である.

固有値 $\lambda=-\sqrt{2}i$ に対する固有ベクトルを求める. $\left(-\sqrt{2}iE-\begin{bmatrix}0&1\\-2&0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left(-\sqrt{2}iE-\begin{bmatrix}0&1\\-2&0\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}i&-1\\2&-\sqrt{2}i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}ix-y\\2x-\sqrt{2}iy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる. よって, 第 1 成分からも第 2 成分からも $y=-\sqrt{2}ix$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}i\end{bmatrix}$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}i\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=-\sqrt{2}i$ の固有ベクトルである. さらに, $W(-\sqrt{2}i)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}i\end{bmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{C}\right\}$ である.

(3) $\det\left(\lambda E-\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda-1&2\\-2&\lambda-1\end{bmatrix}\right)=\lambda^2-2\lambda+5$ であることから, 固有値は $\lambda=1\pm2i$ である.

固有値 $\lambda=1+2i$ に対する固有ベクトルを求める. $\left((1+2i)E-\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解く. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left((1+2i)E-\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}=\begin{bmatrix}2i&2\\-2&2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2ix+2y\\-2x+2iy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる. よって, 第 1 成分からも第 2 成分からも $y=-ix$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=1+2i$ の固有ベクトルである. さらに, $W(1+2i)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{C}\right\}$ である.

固有値 $\lambda=1-2i$ に対する固有ベクトルを求める. $\left((1-2i)E-\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解く. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とおくと

$$\left((1-2i)E-\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}=\begin{bmatrix}-2i&2\\-2&-2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2ix+2y\\-2x-2iy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

となる. よって, 第 1 成分からも第 2 成分からも $y=ix$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=1-2i$ の固有ベクトルである. さらに, $W(1-2i)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{C}\right\}$ である.

問 4.3 **問 4.1** および **問 4.2** の解答例を参照せよ.

問 4.4 (1) $A_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ とおく. 固有多項式は

$$|\lambda E-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda=\lambda(\lambda-2)$$

であることから, A_1 の固有値は $\lambda=0,2$ である.
固有値 $\lambda=0$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(0E-A_1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(0E-A_1)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x-y\\ -x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

となる. よって, 第1成分からも第2成分からも $y=-x$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda=0$ の固有ベクトルである.
固有値 $\lambda=2$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(2E-A_1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(2E-A_1)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-y\\ -x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

となる. よって, 第1成分からも第2成分からも $y=x$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda=2$ の固有ベクトルである. さらに, $P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ であり, 次が成り立つ.

$$P^{-1}A_1P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

(2) $A_2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ とおく. **問 4.1**(2) より, A_2 の固有値は $\lambda=2,3$ であり, $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=2$ の固有ベクトル, $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda=3$ の固有ベクトルである. 従って, $P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ であり, 次が成り立つ.

$$P^{-1}A_2P=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

(3) $A_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{bmatrix}$ とおく. 固有多項式は

$$|\lambda E-A_3|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -4\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -4 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & -4\\ -4 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-16)$$

であることから, A_3 の固有値は $\lambda=1,\pm4$ である.
固有値 $\lambda=1$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(1E-A_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(1E-A_3)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-4z\\ 0\\ -4x+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

となる. よって, 第1成分および第3成分から $x=z=0$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x}=y\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda=1$ の固有ベクトルである.
固有値 $\lambda=4$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(4E-A_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(4E-A_3)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4 & 0 & -4\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x-4z\\ 3y\\ -4x+4z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

となる．よって, $z=x$, $y=0$ であり, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top$ となる．従って, $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda=4$ の固有ベクトルである．

固有値 $\lambda=-4$ に対する固有ベクトルを求める．$(-4E-A_3)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい．$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(-4E-A_3)\,\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & -4\\ 0 & -5 & 0\\ -4 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4x-4z\\ -5y\\ -4x-4z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

となる．よって, $z=-x$, $y=0$ である．ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^\top$ となる．従って, $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda=-4$ の固有ベクトルである．以上により, $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ である．この逆行列の求め方については．例えば, **1.4.7** 節を参照せよ．よって, 次が成り立つ．

$$P^{-1}A_3P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4 & -4\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

(4) $A_4=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ とおく．固有多項式は

$$|\lambda E-A_4|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -2 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2\\ -2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)$$

であることから, A_4 の固有値は $\lambda=1,3,-2$ である．

固有値 $\lambda=1$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(1E-A_4)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい．$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(1E-A_4)\,\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-2z\\ 0\\ -2x-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

となる．よって, 第 1 成分および第 3 成分から $x=z=0$ を得る．ゆえに, $\boldsymbol{x}=y\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top$ となる．従って, $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda=1$ の固有ベクトルである．

固有値 $\lambda=3$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(3E-A_4)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい．$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(3E-A_4)\,\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x-2z\\ 2y\\ -2x+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

から $z=2x$, $y=0$ を得る．ゆえに, $\boldsymbol{x}=x\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}^\top$ となり, $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda=3$ の固有ベクトルである．

固有値 $\lambda=-2$ に対する固有ベクトルを求める．$(-2E-A_4)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい．$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(-2E-A_4)\,\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & -3 & 0\\ -2 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x-2z\\ -3y\\ -2x-4z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

から, $x=-2z$, $y=0$ を導く. ゆえに, $\boldsymbol{x}=z\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda=-2$ の固有ベクトルである. 以上から, $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 5 & 0\\1 & 0 & 2\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ であり, 次が確認できる.

$$P^{-1}A_4P=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 5 & 0\\1 & 0 & 2\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 5 & 0\\1 & 0 & 2\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\1 & 0 & 0\\0 & 6 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

問 4.5　**問 4.4**(4) より, $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 5 & 0\\1 & 0 & 2\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ であり, かつ $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ となる. 従って, 任意の自然数 k に対し, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}A^k&=P\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}^kP^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3^k & 0\\0 & 0 & (-2)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 5 & 0\\1 & 0 & 2\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 5 & 0\\3^k & 0 & 2\cdot 3^k\\(-2)^{k+1} & 0 & (-2)^k\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3^k+(-2)^{k+2} & 0 & 2\cdot 3^k+(-2)^{k+1}\\0 & 5 & 0\\2\cdot 3^k+(-2)^{k+1} & 0 & 4\cdot 3^k+(-2)^k\end{bmatrix}\end{aligned}$$

問 4.6　(1)　$A_1=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\1 & -2 & 0\\-2 & 0 & -2\end{bmatrix}$ とおく. 固有多項式は

$$\begin{aligned}|\lambda E-A_1|&=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & 2\\-1 & \lambda+2 & 0\\2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & 2\\-1 & \lambda+2 & 0\\0 & 2(\lambda+2) & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & 2\\-1 & \lambda+2 & 0\\0 & 2 & 1\end{vmatrix}\\&=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -6 & 0\\-1 & \lambda+2 & 0\\0 & 2 & 1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -6\\-1 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+4)\end{aligned}$$

であることから, A_1 の固有値は $\lambda=1,-2,-4$ である. すなわち, 3 次行列 A_1 は 3 個の相異なる固有値をもつ. 定理 4.15 により, A_1 は対角化できることがわかる. 以下, A_1 の対角化を行う.
固有値 $\lambda=1$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(1E-A_1)\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を解けばよい.

$$1E-A_1=\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\-1 & 3 & 0\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(1E-A_1)\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\iff\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\iff\begin{bmatrix}x-3y\\2y+z\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

よって, 第 1 成分および第 2 成分から $x = 3y$, $z = -2y$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = y\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルである.

固有値 $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(-2E - A_1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$-2E - A_1 = \begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(-2E - A_1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix}x\\ y - z\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

よって, 第 1 成分および第 2 成分から $x = 0$, $z = y$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = y\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = -2$ の固有ベクトルである.

固有値 $\lambda = -4$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(-4E - A_1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$-4E - A_1 = \begin{bmatrix}-3 & -2 & 2\\ -1 & -2 & 0\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(-4E - A_1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix}x - z\\ 2y + z\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

よって, 第 1 成分および第 2 成分から $x = z = -2y$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = (-y)\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = -4$ の固有ベクトルである.

以上により, $P = \begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1} = \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & 10 & 5\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}$ であり, 次が成り立つ.

$$P^{-1}A_1P = \frac{1}{15}\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & 10 & 5\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & 10 & 5\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & -8\\ 1 & -2 & 4\\ -2 & -2 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

(2) $A_2 = \begin{bmatrix}0 & 2 & -6\\ 5 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 7\end{bmatrix}$ とおく. 固有多項式は

$$|\lambda E - A_2| = \begin{vmatrix}\lambda & -2 & 6\\ -5 & \lambda + 3 & -3\\ -3 & 3 & \lambda - 7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda - 2 & -2 & 6\\ \lambda - 2 & \lambda + 3 & -3\\ 0 & 3 & \lambda - 7\end{vmatrix} = (\lambda - 2)\begin{vmatrix}1 & -2 & 6\\ 1 & \lambda + 3 & -3\\ 0 & 3 & \lambda - 7\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)\begin{vmatrix}1 & -2 & 6\\ 0 & \lambda + 5 & -9\\ 0 & 3 & \lambda - 7\end{vmatrix} = (\lambda - 2)\begin{vmatrix}\lambda + 5 & -9\\ 3 & \lambda - 7\end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

であることから，A_2 の固有値は $\lambda = \pm 2, 4$ である．すなわち，3 次行列 A_2 は 3 個の相異なる固有値をもつことから，定理 4.15 により，A_2 は対角化できることがわかる．以下，A_2 の対角化を行う．

固有値 $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(-2E - A_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$-2E - A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -5 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(-2E - A_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y - 3z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって，第 1 成分および第 2 成分から $x = 0, y = 3z$ を得る．ゆえに，$\boldsymbol{x} = z\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^\top$ となる．従って，$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = -2$ の固有ベクトルである．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(2E - A_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$2E - A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -5 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(2E - A_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x - y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって，第 1 成分および第 2 成分から $y = x, z = 0$ を得る．ゆえに，$\boldsymbol{x} = x\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ となる．従って，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 2$ の固有ベクトルである．

固有値 $\lambda = 4$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(4E - A_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$4E - A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -5 & 7 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(4E - A_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x + 2z \\ y + z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって，第 1 成分および第 2 成分から $x = -2z, y = -z$ を得る．ゆえに，$\boldsymbol{x} = -z\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$ となる．従って，$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 4$ の固有ベクトルである．

以上により, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ であり, 次が成り立つ.

$$P^{-1}A_2P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(3) $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とおく. 固有多項式は

$$|\lambda E - A_3| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3$$

であることから, A_3 の固有値は $\lambda = 2$ である.

固有空間 $W(2)$ の次元を求める. $W(2)$ は連立 1 次方程式 $(2E - A_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であることに注意する. また

$$2E - A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (簡約化)$$

により, $\mathrm{rank}\,(2E - A_3) = 1$ である. ゆえに, 定理 3.25 を用いることで

$$\dim W(2) = \dim\left(\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (2E - A_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}\right) = 3 - \mathrm{rank}\,(2E - A_3) = 2$$

を得る. すなわち, 固有値 $\lambda = 2$ の固有多項式における重複度 3 と, 固有空間 $W(2)$ の次元が一致しない. 従って, 定理 4.18 により, A_3 は対角化できないことがわかる.

問 4.7 (1) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ とおく. 固有多項式は

$$|\lambda E - A_1| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-5)$$

であることから, A_1 の固有値は $\lambda = 0, 5$ である.

固有値 $\lambda = 0$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(0E - A_1)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$0E - A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(0E - A_1)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x + 2y = 0$$

から, $x = -2y$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = (-y)\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^\top$ となり, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 0$ の固有ベクトルである.

固有値 $\lambda = 5$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(5E - A_1)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$5E - A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(5E - A_1)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff 2x - y = 0$$

よって, $y = 2x$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = x \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 5$ の固有ベクトルである. 構成法および定理 4.21 により, $\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j = \delta_{i,j}$ が成り立つことはわかる. 従って, $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ とおくと, 定理 3.76 により, P は直交行列であり, 次が成り立つ.

$$P^\top A_1 P = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とおく. 固有多項式は

$$|\lambda E - A_2| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

であることから, A_2 の固有値は $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$ である.

固有値 $\lambda = 1 + \sqrt{2}$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $\big((1+\sqrt{2})E - A_2\big)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$(1+\sqrt{2})E - A_2 = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$\Big((1+\sqrt{2})E - A_2\Big)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x + (1-\sqrt{2})y = 0$$

から $x = (\sqrt{2}-1)y$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = y \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \end{bmatrix}^\top = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 1 + \sqrt{2}$ の固有ベクトルである.

固有値 $\lambda = 1 - \sqrt{2}$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $\big((1-\sqrt{2})E - A_2\big)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$(1-\sqrt{2})E - A_2 = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$\Big((1-\sqrt{2})E - A_2\Big)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x + (1+\sqrt{2})y = 0$$

から $x = -(1+\sqrt{2})y$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = (-y) \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}^\top = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 1 - \sqrt{2}$ の固有ベクトルである. 構成法および定理 4.21 により, $\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j = \delta_{i,j}$ は成り立つ. $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ とおくと, 定理 3.76 により, P は直交行列であり, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
P^{\top}A_2P &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}}\\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}}\\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}}\\ \sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}}\\ (3+2\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}} & (3-2\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1-\sqrt{2}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(3) $A_3 = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ とおく．固有多項式は

$$
|\lambda E - A_3| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix} = \lambda^2 - 2
$$

であることから, A_3 の固有値は $\lambda = \pm\sqrt{2}$ である．

固有値 $\lambda = \sqrt{2}$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $\left(\sqrt{2}E - A_3\right)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解けばよい．

$$
\sqrt{2}E - A_3 = \begin{bmatrix}\sqrt{2}-1 & 1\\ 1 & \sqrt{2}+1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}+1\\ 0 & 0\end{bmatrix}
$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^{\top}$ とおくと

$$
\left(\sqrt{2}E - A_3\right)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}+1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \iff x + (\sqrt{2}+1)y = 0
$$

から $x = -(\sqrt{2}+1)y$ を得る．ゆえに, $\boldsymbol{x} = (-y)\begin{bmatrix}\sqrt{2}+1 & -1\end{bmatrix}^{\top}$ となり, $\begin{bmatrix}\sqrt{2}+1 & -1\end{bmatrix}^{\top}$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}+1 & -1\end{bmatrix}^{\top} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}}\end{bmatrix}^{\top}$ は固有値 $\lambda = \sqrt{2}$ の固有ベクトルである．

固有値 $\lambda = -\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $\left(-\sqrt{2}E - A_3\right)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解けばよい．

$$
-\sqrt{2}E - A_3 = \begin{bmatrix}-\sqrt{2}-1 & 1\\ 1 & -\sqrt{2}+1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2}+1\\ 0 & 0\end{bmatrix}
$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^{\top}$ とおくと

$$
\left(-\sqrt{2}E - A_3\right)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2}+1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \iff x + (-\sqrt{2}+1)y = 0
$$

よって, $x = (\sqrt{2}-1)y$ を得る．ゆえに, $\boldsymbol{x} = y\begin{bmatrix}\sqrt{2}-1 & 1\end{bmatrix}^{\top}$ となる．従って, $\begin{bmatrix}\sqrt{2}-1 & 1\end{bmatrix}^{\top}$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}-1 & 1\end{bmatrix}^{\top} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}}\end{bmatrix}^{\top}$ は固有値 $\lambda = -\sqrt{2}$ の固有ベクトルである．構成法および定理 4.21 により, $\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j = \delta_{i,j}$ が成り立つことがわかる．$P = \begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2\end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}}\\ -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ とおくと, 定理 3.76 により P は直交行列であり, 次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
P^{\top}A_3P &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}}\\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2+\sqrt{2}} & \sqrt{2-\sqrt{2}}\\ -\sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\sqrt{2+\sqrt{2}} & -\sqrt{2-\sqrt{2}}\\ \sqrt{2-\sqrt{2}} & \sqrt{2+\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}} & (-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\\ (-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}} & (-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(4) $A_4 = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ とおく. 固有多項式は

$$|\lambda E - A_4| = \begin{vmatrix} \lambda - 9 & 3 \\ 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 10)$$

であることから, D の固有値は $\lambda = 0, 10$ である.

固有値 $\lambda = 0$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(0E - A_4)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$0E - A_4 = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(0E - A_4)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff 3x - y = 0$$

よって, $y = 3x$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = x \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 0$ の固有ベクトルである.

固有値 $\lambda = 10$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(10E - A_4)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$10E - A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(10E - A_4)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x + 3y = 0$$

から $x = -3y$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = (-y) \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}^\top$ となり, $\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 10$ の固有ベクトルである. 構成法および定理 4.21 により, $\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j = \delta_{i,j}$ が成り立つことがわかる.
従って, $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ とおくと, 定理 3.76 により P は直交行列であり, 次が成り立つ.

$$P^\top A_4 P = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 30 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

(5) $A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とおく. 固有多項式は

$$|\lambda E - A_5| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & \lambda - 4 & \lambda - 4 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 4)$$

であることから, A_5 の固有値は $\lambda = 1, 4$ となる.
固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(1E - A_5)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$1E - A_5 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(1E - A_5)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x + y + z = 0$$

よって, $x = -y - z$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = (-y)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top - z\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ と $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルで, ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は固有空間 $W(1)$ の基底をなすことがわかる. ここで, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ に, 3.4.2 節で扱ったシュミットの直交化を施して, $W(1)$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ を得る. 実際, $\boldsymbol{a}_1$ を正規化したものを $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ とする. また, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^\top$ を正規化したものを $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^\top$ とする.
固有値 $\lambda = 4$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(4E - A_5)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$4E - A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(4E - A_5)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x - z \\ y - z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって, $x = y = z$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = x\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ となる. 従って, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 4$ の固有ベクトルである. 構成法および定理 4.21 により, $\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j = \delta_{i,j}$ が成り立つことがわかる. 従って, $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ とおくと, 定理 3.76 により P は直交行列であり, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} P^\top A_5 P &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 4/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 4/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 4/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(6) $A_6 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ とおく．固有多項式は

$$
\begin{aligned}
|\lambda E - A_6| &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)^2
\end{aligned}
$$

であることから, A_6 の固有値は $\lambda = 1, 4$ となる．

固有値 $\lambda = 4$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(4E - A_6)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$
4E - A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$
(4E - A_6)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \iff x + y + z = 0
$$

よって, $x = -y - z$ を得る．ゆえに, $\boldsymbol{x} = (-y)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top - z\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$ となる．従って, $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ と $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 4$ の固有ベクトルで, ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は固有空間 $W(4)$ の基底をなすことがわかる．ここで, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ にシュミットの直交化を施して $W(4)$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ を得る．実際, $\boldsymbol{a}_1$ を正規化したものを $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ とし, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^\top$ を正規化したものを $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^\top$ とする．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(1E - A_6)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$
1E - A_6 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$
(1E - A_6)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x - z \\ y - z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

よって, $x = y = z$ を得る．ゆえに, $\boldsymbol{x} = x\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルである．構成法および定理 4.21 により, $\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j = \delta_{i,j}$ が成り立つことがわかる．従って, $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ とおくと, 定理 3.76 により P は直交行列であり, 次が成り立つ．

$$P^\top A_6 P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/\sqrt{2} & 4/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -4/\sqrt{2} & 4/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -8/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(7) $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ とおく. 固有多項式は

$$|\lambda E - A_7| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-2 & -2 \\ -3 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-6 & \lambda-6 & \lambda-6 \\ -2 & \lambda-2 & -2 \\ -3 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda-2 & -2 \\ -3 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+2)(\lambda-6)$$

であることから, A_7 の固有値は $\lambda = -2, 0, 6$ である.

固有値 $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(-2E - A_7)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$-2E - A_7 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -2 \\ -3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(-2E - A_7)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x+z \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって, $z = -x$, $y = 0$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = -2$ の固有ベクトルである.

固有値 $\lambda = 0$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $(0E - H)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$0E - A_7 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(0E - A_7)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x-z \\ y+2z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって, $x = z$, $y = -2z$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = z \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 0$ の固有ベクトルである.

固有値 $\lambda = 6$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(6E - A_7)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$6E - A_7 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(0E - A_7)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x - z \\ y - z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって, $x = y = z$ を得る．ゆえに, $\boldsymbol{x} = z\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 6$ の固有ベクトルである．構成法および定理 4.21 により, $\boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j = \delta_{i,j}$ が成り立つことがわかる．従って, $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ とおくと, 定理 3.76 により P は直交行列であり, 次が成り立つ．

$$\begin{aligned} P^\top A_7 P &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{2} & 0 & 6/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 6/\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} & 0 & 6/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

問 4.8　$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とおくと, 等式の左辺は $x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 = \boldsymbol{x}^\top \begin{bmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ と表せる．$A = \begin{bmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5 \end{bmatrix}$ とおく．固有多項式は

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & \lambda + 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 8)$$

であることから, A の固有値は $\lambda = 4, -8$ である．まず, 直交行列を用いて A を対角化する．

固有値 $\lambda = 4$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(4E - A)\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$4E - A = \begin{bmatrix} 3 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから

$$(4E - A)\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff s - \sqrt{3}t = 0$$

と $s = \sqrt{3}t$ を得る．よって, $\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda = 4$ の固有ベクトルである．

固有値 $\lambda = -8$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(-8E - A)\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$-8E - A = \begin{bmatrix} -9 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから

$$(-8E-A)\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \sqrt{3}s + t = 0$$

よって, $t = -\sqrt{3}s$ を得る．従って, $\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ を正規化して得られる $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ は固有値 $\lambda = -8$ の固有ベクトルである．$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ とおくと, P は直交行列で $P^\top AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ を満たす．$\boldsymbol{y} = P^\top \boldsymbol{x}$ という変数変換を施すと, P は直交行列であることから $P\boldsymbol{y} = PP^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たす．よって, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ とおくと

$$x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 = \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} = (P\boldsymbol{y})^\top AP\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^\top P^\top AP\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 4X^2 - 8Y^2$$

となる．ゆえに, 変数変換 $\boldsymbol{y} = P^\top \boldsymbol{x}$ に対し

$$x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 = 8 \iff 4X^2 - 8Y^2 = 8 \iff \frac{X^2}{2} - Y^2 = 1$$

が成り立つ．XY 平面において, $\dfrac{X^2}{2} - Y^2 = 1$ は $Y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}X$ を漸近線とする双曲線を表す．変換行列 $P^\top$ は

$$P^\top = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/6) & -\sin(-\pi/6) \\ \sin(-\pi/6) & \cos(-\pi/6) \end{bmatrix}$$

と表せることから, 双曲線 $\dfrac{X^2}{2} - Y^2 = 1$ は 2 次曲線 $x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 = 8$ を $\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 回転させた図形である．従って, 2 次曲線 $x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 = 8$ は双曲線 $\dfrac{X^2}{2} - Y^2 = 1$ を反時計回りに 30° 回転させた図形である．

問 4.9 (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと $x^2 - xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を満たす．よって, A は 2 次形式 $x^2 - xy + y^2$ を定める対称行列である．固有多項式は $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1/2 \\ 1/2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)$ であることから, A の固有値は $\lambda = \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}$ である．ゆえに, A は正定値である．

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ とおく．$x^2 - 4xy + 4y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ から, B は 2 次形式 $x^2 - 4xy + 4y^2$ を定める対称行列である．また, $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5)$ から, B の固有値は $\lambda = 0, 5$ であり, B は半正定値である．

(3) $C = \begin{bmatrix} 2 & -9/2 \\ -9/2 & 2 \end{bmatrix}$ とおく．$2x^2 - 9xy + 2y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ から, C は 2 次形式 $2x^2 - 9xy + 2y^2$ を定める対称行列である．固有多項式は $|\lambda E - C| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 9/2 \\ 9/2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \left(\lambda + \dfrac{5}{2}\right)\left(\lambda - \dfrac{13}{2}\right)$ であることから, C の固有値は $\lambda = -\dfrac{5}{2}, \dfrac{13}{2}$ である．従って, C は正定値でも半正定値でもない．

問 4.10 $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ とおく．このとき $A^* = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ である．$A^* = A$ から, A はエルミート行列である．また, $A^* = A^{-1}$ から, A はユニタリ行列でもある．続いて, A の固有値と対応する固有ベクトルを求める．固有多項式は $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & i \\ -i & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$ であることから, A の固有値は $\lambda = \pm 1$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(1E - A)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$1E - A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(1E - A)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x + iy = 0$$

よって，$x = -iy$ を得る．従って，$\begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルである．

固有値 $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(-1E - A)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$-1E - A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(-1E - A)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x - iy = 0$$

よって，$x = iy$ を得る．従って，$\begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルである．

問 4.11　$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} + i \\ \sqrt{3} - i & -1 \end{bmatrix}$ とおく．固有多項式は $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -\sqrt{3} - i \\ -\sqrt{3} + i & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 3)$ であることから，A の固有値は $\lambda = -2, 3$ である．

固有値 $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(-2E - A)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$-2E - A = \begin{bmatrix} -4 & -\sqrt{3} - i \\ -\sqrt{3} + i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i) & -\sqrt{3} - i \\ -\sqrt{3} + i & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sqrt{3} - i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(-2E - A)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} \sqrt{3} - i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff (\sqrt{3} - i)x + y = 0$$

から $y = (-\sqrt{3} + i)x$ を得る．ゆえに，$\boldsymbol{x} = x \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} + i \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} + i \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda = -2$ の固有ベクトルである．

固有値 $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(3E - A)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$3E - A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} - i \\ -\sqrt{3} + i & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} - i \\ -\sqrt{3} + i & (\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -(\sqrt{3} + i) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(3E - A)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -(\sqrt{3} + i) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x - (\sqrt{3} + i)y = 0$$

よって, $x=(\sqrt{3}+i)y$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x}=y\begin{bmatrix}\sqrt{3}+i & 1\end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{u}_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\sqrt{3}+i & 1\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\lambda=3$ の固有ベクトルである. 構成法および定理 4.39 により, $\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j=\delta_{i,j}$ が成り立つことがわかる. 従って, $U=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}+i\\ -\sqrt{3}+i & 1\end{bmatrix}$ とおくと, 定理 4.35 により, U はユニタリ行列であり, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
U^*AU &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}-i\\ \sqrt{3}-i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & \sqrt{3}+i\\ \sqrt{3}-i & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}+i\\ -\sqrt{3}+i & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}-i\\ \sqrt{3}-i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\sqrt{3}+3i\\ 2\sqrt{3}-2i & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

問 4.12 x 軸, y 軸, z 軸からなる直交座標系を右手系にとる. $\theta\in\mathbb{R}$ に対し, 行列 $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, $R_z(\theta)$ を

$$
R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\quad R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix},\quad R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

とそれぞれ定める. なお, $R_x(\theta)$ は x 軸のまわりに, y 軸から z 軸の方向へ θ 回転, $R_y(\theta)$ は y 軸のまわりに, x 軸から z 軸の方向へ θ 回転, $R_z(\theta)$ は z 軸のまわりに, x 軸から y 軸の方向へ θ 回転を意味する, また, $R_y\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\begin{bmatrix}\sin\varphi & 0 & -\cos\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi\end{bmatrix}$, $R_x\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$ であることから, 与えられた行列は

$$
\begin{bmatrix}\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi & \cos\psi\\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0\end{bmatrix}=R_z(\psi)R_y\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right)
$$

と分解できる. 従って, 与えられた行列で定められる変換は,「x 軸のまわりに, z 軸から y 軸の方向へ $\pi/2$ 回転」と「y 軸のまわりに, x 軸から z 軸の方向へ $(\pi/2-\varphi)$ 回転」と「z 軸のまわりに, x 軸から y 軸の方向へ ψ 回転」の合成であることがわかる.

問 4.13 (1) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ とおく. このとき $A^\top A=\begin{bmatrix}6 & 5\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ となる. $A^\top A$ の固有多項式は

$$
|\lambda E-A^\top A|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -5\\ -5 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-11)
$$

であることから, $A^\top A$ の固有値は $\lambda=11,1$ である. 以下, $\sigma_1=\sqrt{11}$, $\sigma_2=1$ とおく.

$A^\top A$ の固有値 $\sigma_1^2=11$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $\left(11E-A^\top A\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$
11E-A^\top A=\begin{bmatrix}5 & -5\\ -5 & 5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}
$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$
\left(11E-A^\top A\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\iff\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\iff x-y=0
$$

よって, $y = x$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = x\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\sigma_1^2 = 11$ の固有ベクトルである.

$A^\top A$ の固有値 $\sigma_2^2 = 1$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $\left(1E - A^\top A\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$1E - A^\top A = \begin{bmatrix}-5 & -5\\ -5 & -5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$\left(1E - A^\top A\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \iff x + y = 0$$

よって, $y = -x$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = x\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\sigma_2^2 = 1$ の固有ベクトルである. ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底であることに注意する. さらに, $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sigma_1}A\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{22}}\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sigma_2}A\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^\top$ とおく. $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ と直交するベクトルとして $\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\end{bmatrix}^\top$ がとれる. 複数のベクトルと直交するようなベクトルの求め方については, 例 3.67 を参照せよ. これを正規化したものを $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\end{bmatrix}^\top$ とおく. ベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であることに注意する. 以上により, $U = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11}\\ 2/\sqrt{22} & 0 & -3/\sqrt{11}\\ 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11}\end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ とおくと, U と V はともに直交行列であり, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
U\begin{bmatrix}\sqrt{11} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^\top &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11}\\ 2/\sqrt{22} & 0 & -3/\sqrt{11}\\ 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{11} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11}\\ 2/\sqrt{22} & 0 & -3/\sqrt{11}\\ 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{11} & \sqrt{11}\\ 1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = A
\end{aligned}$$

(2) $B = \begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$ とおく. このとき $B^\top B = \begin{bmatrix}5 & 6 & 4\\ 6 & 8 & 6\\ 4 & 6 & 5\end{bmatrix}$ となる. $B^\top B$ の固有多項式は

$$\begin{aligned}
|\lambda E - B^\top B| &= \begin{vmatrix}\lambda-5 & -6 & -4\\ -6 & \lambda-8 & -6\\ -4 & -6 & \lambda-5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -(\lambda-1)\\ -6 & \lambda-8 & -6\\ -4 & -6 & \lambda-5\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ -6 & \lambda-8 & -6\\ -4 & -6 & \lambda-5\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-8 & -12\\ 0 & -6 & \lambda-9\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-8 & -12\\ -6 & \lambda-9\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-17)
\end{aligned}$$

であることから, $B^\top B$ の固有値は $\lambda = 17, 1, 0$ である. 以下, $\sigma_1 = \sqrt{17}$, $\sigma_2 = 1$ とおく.

$B^\top B$ の固有値 $\sigma_1^2 = 17$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $\left(17E - B^\top B\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$17E - B^\top B = \begin{bmatrix}12 & -6 & -4\\ -6 & 9 & -6\\ -4 & -6 & 12\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$\left(17E - B^\top B\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x - z \\ 3y - 4z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって, $x = z$, $y = \dfrac{4}{3}z$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = \dfrac{z}{3}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{34}}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\sigma_1^2 = 17$ の固有ベクトルである.

$B^\top B$ の固有値 $\sigma_2^2 = 1$ に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $\left(1E - B^\top B\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$1E - B^\top B = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -4 \\ -6 & -7 & -6 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$\left(1E - B^\top B\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x + z \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって, $z = -x$, $y = 0$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = x\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\sigma_1^2 = 1$ の固有ベクトルである.

$B^\top B$ の固有値 0 に対する固有ベクトルを求める. 方程式 $\left(0E - B^\top B\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい.

$$0E - B^\top B = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -4 \\ -6 & -8 & -6 \\ -4 & -6 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$\left(0E - B^\top B\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x - z \\ 2y + 3z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

から $x = z$, $y = -\dfrac{3}{2}z$ を得る. ゆえに, $\boldsymbol{x} = \dfrac{z}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}^\top$ は固有値 0 の固有ベクトルである. ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であることに注意する. さらに, $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sigma_1}B\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sigma_2}B\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$ とおく. ベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底であることに注意する. 以上により, $U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{34} & 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{17} \\ 4/\sqrt{34} & 0 & -3/\sqrt{17} \\ 3/\sqrt{34} & -1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{17} \end{bmatrix}$ とおくと, U と V はともに直交行列であり, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} U\begin{bmatrix} \sqrt{17} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}V^\top &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{17} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/\sqrt{34} & 4/\sqrt{34} & 3/\sqrt{34} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{17} & -3/\sqrt{17} & 2/\sqrt{17} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} & 4/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = B \end{aligned}$$

問 4.14 $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix}$ とおく．このとき $A^*A = \begin{bmatrix} 6 & 5i \\ -5i & 6 \end{bmatrix}$ となる．A^*A の固有多項式は

$$|\lambda E - A^*A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -5i \\ 5i & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 11)$$

であることから, A^*A の固有値は $\lambda = 11, 1$ である．以下, $\sigma_1 = \sqrt{11}$, $\sigma_2 = 1$ とおく．
A^*A の固有値 $\sigma_1^2 = 11$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(11E - A^*A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$11E - A^*A = \begin{bmatrix} 5 & -5i \\ 5i & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることにより, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(11E - A^*A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x - iy = 0$$

となる．従って, $\begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\sigma_1^2 = 11$ の固有ベクトルである．
A^*A の固有値 $\sigma_2^2 = 1$ に対する固有ベクトルを求める．方程式 $(1E - A^*A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．

$$1E - A^*A = \begin{bmatrix} -5 & -5i \\ 5i & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と行基本変形できることから, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$(1E - A^*A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x + iy = 0$$

よって, $x = -iy$ を得る．従って, $\begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix}^\top$ を正規化して得られる $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix}^\top$ は固有値 $\sigma_2^2 = 1$ の固有ベクトルである．ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は $\mathbb{C}^2$ の正規直交基底であることに注意する．さらに $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sigma_1} A\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{22}} \begin{bmatrix} 3 & -2i & 3 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sigma_2} A\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$ とおく．$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ と直交するベクトルとして $\begin{bmatrix} 1 & 3i & 1 \end{bmatrix}^\top$ がとれる．これを正規化したものを $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 1 & 3i & 1 \end{bmatrix}^\top$ とおく．ベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は $\mathbb{C}^3$ の正規直交基底である．以上により, $U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ -2i/\sqrt{22} & 0 & 3i/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ とおくと, U と V はともにユニタリ行列であり, 次が成り立つ．

$$\begin{aligned} U \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ -2i/\sqrt{22} & 0 & 3i/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ -2i/\sqrt{22} & 0 & 3i/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{11} & \sqrt{11}i \\ 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

問 4.15 (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおく．A の固有多項式を $f(t)$ とすると

$$f(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & 0 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2$$

が成り立つ．よって, A の固有値は $t = 1$ である．自然数 $k \geq 2$ に対し, t^k を $f(t)$ で割ったときの商を $p(t)$, 余りを $q(t)$ とすると

$$t^k = p(t)f(t) + q(t) \tag{$*$}$$

となる．$f(t)$ が 2 次多項式であることから, $q(t)$ は 1 次以下の多項式である．つまり, $q(t) = at + b$ と表せる．$(*)$ に固有値 $t = 1$ を代入することで $1 = q(1) = a + b$ を得る．また, $(*)$ の両辺を微分すると, $q'(t) = a$ であることから

$$kt^{k-1} = p'(t)f(t) + p(t)f'(t) + a \tag{$\sharp$}$$

となる．$f'(t) = 2(t-1)$ より $f'(1) = 0$ であることから, $(\sharp)$ に $t = 1$ を代入することで $k = a$ を得る．今, $a + b = 1$ であることから $b = 1 - a = 1 - k$ となる．ゆえに, $q(t) = kt + 1 - k$ である．従って, $(*)$ の t を A に置き換えると, ケイリー・ハミルトンの定理 (定理 4.47 参照) により $f(A) = O$ が成り立つことから

$$A^k = q(A) = kA + (1-k)E = \begin{bmatrix} k & 0 \\ k & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-k & 0 \\ 0 & 1-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

となる．この式は $k = 0, 1$ の場合も成り立つ．

(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおく．B の固有多項式を $f(t)$ とすると

$$f(t) = |tE - B| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3$$

が成り立つ．よって, B の固有値は $t = 1$ である．自然数 $k \geq 3$ に対し, t^k を $f(t)$ で割ったときの商を $p(t)$, 余りを $q(t)$ とすると

$$t^k = p(t)f(t) + q(t) \tag{$*$}$$

となる．$f(t)$ が 3 次多項式であることから, $q(t)$ は 2 次以下の多項式である．すなわち, $q(t) = at^2 + bt + c$ と表せる．$(*)$ に固有値 $t = 1$ を代入することで $1 = q(1) = a + b + c$ を得る．また, $(*)$ の両辺を微分すると, $q'(t) = 2at + b$ であることから

$$kt^{k-1} = p'(t)f(t) + p(t)f'(t) + 2at + b \tag{$\sharp$}$$

となる．$f'(t) = 3(t-1)^2$ より $f'(1) = 0$ であることから, $(\sharp)$ に $t = 1$ を代入することで $k = 2a + b$ を得る．さらに, $(\sharp)$ の両辺を微分すると

$$k(k-1)t^{k-2} = p''(t)f(t) + 2p'(t)f'(t) + p(t)f''(t) + 2a \tag{$\flat$}$$

となる．$f''(t) = 6(t-1)$ により $f''(1) = 0$ であることから, $(\flat)$ に $t = 1$ を代入し, $k(k-1) = 2a$ を得る．また

$$a + b + c = 1, \quad 2a + b = k, \quad 2a = k(k-1)$$

の解は $a=\dfrac{k(k-1)}{2}, b=k(2-k), c=\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}$ であり, $q(t)=\dfrac{k(k-1)}{2}t^2+k(2-k)t+\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}$ となる. 従って, $(*)$ の t を B に置き換えると, ケイリー・ハミルトンの定理から, $f(B)=O$ が成り立ち

$$\begin{aligned} B^k=q(B)&=\frac{k(k-1)}{2}B^2+k(2-k)B+\frac{(k-1)(k-2)}{2}E \\ &=\frac{k(k-1)}{2}\begin{bmatrix}1&4&4\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}+k(2-k)\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2k&2k(k-1)\\0&1&2k\\0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

を得る. この式は $k=0,1,2$ の場合も成り立つ.

(3) $C=\begin{bmatrix}0&0&-1\\-1&1&1\\-1&0&0\end{bmatrix}$ とおく. C の固有多項式を $f(t)$ とすると

$$f(t)=|tE-C|=\begin{vmatrix}t&0&1\\1&t-1&-1\\1&0&t\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t&1\\1&t\end{vmatrix}=(t-1)^2(t+1)$$

が成り立つ. よって, C の固有値は $t=\pm1$ である. 自然数 $k\geq 3$ に対し, t^k を $f(t)$ で割ったときの商を $p(t)$, 余りを $q(t)$ とすると

$$t^k=p(t)f(t)+q(t) \tag{$*$}$$

となる. $f(t)$ が 3 次多項式であることから, $q(t)$ は 2 次以下の多項式である. すなわち, $q(t)=at^2+bt+c$ と表せる. $(*)$ に固有値 $t=-1, t=1$ を代入することで $(-1)^k=q(-1)=a-b+c$, $1=q(1)=a+b+c$ を得る. また, $(*)$ の両辺を微分すると, $q'(t)=2at+b$ であることから

$$kt^{k-1}=p'(t)f(t)+p(t)f'(t)+2at+b \tag{$\sharp$}$$

となる. $f'(t)=(t-1)(3t+1)$ より $f'(1)=0$ であることから, $(\sharp)$ に $t=1$ を代入することで $k=2a+b$ を得る. 以下, k の偶奇で場合分けを行う.

k が偶数の場合, $(-1)^k=1$ である. 連立方程式

$$a+b+c=1,\quad a-b+c=1,\quad 2a+b=k$$

の解は $a=\dfrac{k}{2}, b=0, c=1-\dfrac{k}{2}$ であることから $q(t)=\dfrac{k}{2}t^2+1-\dfrac{k}{2}$ である. 従って, $(*)$ の t を C に置き換えると, ケイリー・ハミルトンの定理により $f(C)=O$ が成り立つから

$$C^k=q(C)=\frac{k}{2}C^2+\left(1-\frac{k}{2}\right)E=\frac{k}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}+\left(1-\frac{k}{2}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-k&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}$$

となる. この式は $k=0,2$ の場合も成り立つ.

k が奇数の場合, $(-1)^k=-1$ である. 連立方程式

$$a+b+c=1,\quad a-b+c=-1,\quad 2a+b=k$$

の解は $a=\dfrac{k-1}{2}, b=1, c=\dfrac{1-k}{2}$ であることから, $q(t)=\dfrac{k-1}{2}t^2+t+\dfrac{1-k}{2}$ となる. 従って, $(*)$ の t を C に置き換えると, ケイリー・ハミルトンの定理から, $f(C)=O$ が成り立ち

$$C^k=q(C)=\frac{k-1}{2}C^2+C+\frac{1-k}{2}E=\frac{k-1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&-1\\-1&1&1\\-1&0&0\end{bmatrix}+\frac{1-k}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\-k&1&k\\-1&0&0\end{bmatrix}$$

を導く. この式は $k=1$ の場合も成り立つ. $1/2+(-1)^k/2=\begin{cases}0 & (k\text{ は奇数})\\ 1 & (k\text{ は偶数})\end{cases}$ が成り立つことを用いてまとめると,

$C^k=\begin{bmatrix}1/2+(-1)^k/2 & 0 & -1/2+(-1)^k/2\\ -k & 1 & k\\ -1/2+(-1)^k/2 & 0 & 1/2+(-1)^k/2\end{bmatrix}$ である.

第4章　章末問題

4.1　$x=8$

4.2　A の固有値 $\lambda=3$ に対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, 固有値 $\lambda=4$ に対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$ である. よって, $P=\begin{bmatrix}1&5\\1&6\end{bmatrix}$ とすると, $P^{-1}=\begin{bmatrix}6&-5\\-1&1\end{bmatrix}$ および $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}=D$ を得る. さらに, $A^k=\left(PDP^{-1}\right)^k=PD^kP^{-1}=\begin{bmatrix}6\cdot3^k-5\cdot4^k & -5\cdot3^k+5\cdot4^k\\ 6\cdot3^k-6\cdot4^k & -5\cdot3^k+6\cdot4^k\end{bmatrix}$ となる.

4.3　A の固有値は 0 と $2a$ であり, 対応する固有ベクトルをそれぞれ $\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ および $\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ と選ぶ. このとき, $P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1}=P^{\top}$ および $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0\\0&2a\end{bmatrix}=D$ を導く. よって, $A^k=\left(PDP^{-1}\right)^k=PD^kP^{-1}=\begin{bmatrix}(2a)^k/2 & -(2a)^k/2\\ -(2a)^k/2 & (2a)^k/2\end{bmatrix}$ を得る. さらに, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}A^k=O$ （零行列）であることがわかる.

4.4　$A=\begin{bmatrix}2&1&2\\-2&-1&-4\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$ とおく. $|A-\lambda E|=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$ となることから, A の固有値は $1,-2$ である. $\lambda_1=1$ の固有空間は $W(1)=\{x+y+2z=0\}=\left\{s\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}\,\middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\}$ であり, 固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$ である. $\lambda_2=-2$ の固有空間は $W(-2)=\left\{\begin{matrix}x+z=0\\y-2z=0\end{matrix}\right\}=\left\{u\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}\,\middle|\, u\in\mathbb{R}\right\}$ であり, 固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}$ である. $P=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&0&-2\\0&-1&-1\end{bmatrix}$ とすると, $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&4\\1&1&-1\\-1&-1&-2\end{bmatrix}$ と $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$ を得る.

4.5　$J=\begin{bmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{bmatrix}$ とおく. $|J-\lambda E|=(a-\lambda)^3$ であることから, J の固有値は $\lambda=a$, 固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ である. つまり, 固有空間の次元が固有値の重複度よりも小さいことから, J は対角化できないことがわかる.

4.6 (1) $A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1$（重解）と $\lambda = 3$ である．固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ とし, 固有値 $\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とする．$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ とおくと, ${P_1}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ および ${P_1}^{-1}A_1P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ が確かめられる．

(2) $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1$（重解）と $\lambda = -1$ である．固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ のみである．固有空間の次元が固有値の重複度よりも小さいことから, A_2 は対角化できない．

(3) $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1$ と $\lambda = 2$（重解）である．固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とし, 固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．$P_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと, ${P_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ および ${P_3}^{-1}A_3P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ が確かめられる．

(4) $A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda = 2, 1, -1$ である．固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, 固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ とする．$P_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ とおくと, ${P_4}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ および ${P_4}^{-1}A_4P_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ が確かめられる．

(5) $A_5 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda = 2, 0, -2$ である．固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 固有値 $\lambda = 0$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 固有値 $\lambda = -2$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ とする．$P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とおくと, ${P_5}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ および ${P_5}^{-1}A_5P_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ が確かめられる．

(6) $A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda = 0$（3 重解）であり, 固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ のみである．固有空間の次元が固有値の重複度よりも小さいことから, A_6 は対角化できない．

(7) $A_7 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda = 2$（重解）と $\lambda = 1$ である．固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ のみである．固有空間の次元が固有値の重複度よりも小さいことから, A_7 は対角化できない.

(8) $A_8 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda = 2, 1, -1$ である．固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．$P_8 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと, $P_8{}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ および $P_8{}^{-1} A_8 P_8 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ が確かめられる.

(9) $A_9 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda = 7$（3 重解）であり, 固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ のみである．固有空間の次元が固有値の重複度よりも小さいことから, A_9 は対角化できない.

4.7 (1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とおく．固有多項式は $|\lambda E - A_1| = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$ であることから, A_1 の固有値は $\lambda = 2, \pm 1$ である．固有値 $\lambda = 2$ の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ を, 固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ を, 固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ をそれぞれ選ぶ．ここで, ベクトルの組 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をなすことに注意する．$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とおくと, P は直交行列であり, かつ $P^\top A_1 P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ を満たす.

(2) $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ とおく．固有多項式は $|\lambda E - A_2| = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$ であることから, A_2 の固有値は $\lambda = 1, 2, 4$ である．固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ を, 固有値 $\lambda = 2$ の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$ を, 固有値 $\lambda = 4$ の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^\top$ をそれぞれ選ぶ．ここで, ベクトルの組 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をなすことに注意する．$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ とおくと, P は直交行列であり, かつ $P^\top A_2 P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ を満たす.

(3) $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ とおく．固有多項式は $|\lambda E - A_3| = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$ であることから, A_3 の固有値は

$\lambda = 2, 8$ である．固有値 $\lambda = 2$ の固有ベクトルとして $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ を選ぶ．固有空間 $W(2)$ の基底 $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ にシュミットの直交化を施すことで得られる $W(2)$ の正規直交基底を $\left\{\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ とする．さらに, 固有値 $\lambda = 8$ の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$ を選ぶ．$\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．$P = \begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$ とおくと, P は直交行列であり, $P^\top A_3 P = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 8\end{bmatrix}$ を満たす．

4.8 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^\top$ とおくと, 等式の左辺は $5x^2 - 8xy + 5y^2 = \boldsymbol{x}^\top \begin{bmatrix}5 & -4\\-4 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ と表せる．$A = \begin{bmatrix}5 & -4\\-4 & 5\end{bmatrix}$ とおく．A の固有多項式は $|\lambda E - A| = (\lambda - 9)(\lambda - 1)$ であることから, A の固有値は $\lambda = 9, 1$ である．固有値 $\lambda = 9$ の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^\top$ を, 固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^\top$ をそれぞれ選ぶ．ここで, ベクトルの組 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底をなすことに注意する．$P = \begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$ とおくと, P は直交行列で $P^\top AP = \begin{bmatrix}9 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ を満たす．$\boldsymbol{y} = P^\top\boldsymbol{x}$ という変数変換を施すと, P は直交行列であることから $P\boldsymbol{y} = PP^\top\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たす．よって, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}X & Y\end{bmatrix}^\top$ とおくと

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 = \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{x} = (P\boldsymbol{y})^\top AP\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^\top P^\top AP\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}X & Y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix} = 9X^2 + Y^2$$

となる．ゆえに, 変数変換 $\boldsymbol{y} = P^\top\boldsymbol{x}$ に対し

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9 \iff 9X^2 + Y^2 = 9 \iff X^2 + \frac{Y^2}{9} = 1$$

が成り立つ．XY 平面において, $X^2 + \frac{Y^2}{9} = 1$ は点 $(X, Y) = (\pm 1, 0), (0, \pm 3)$ を通る楕円を表す．変換行列 $P^\top$ は

$$P^\top = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4)\\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4)\end{bmatrix}$$

と表せるから, 楕円 $X^2 + Y^2/9 = 1$ は 2 次曲線 $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9$ を $\pi/4$ 回転させた図形であることがわかる．従って, 2 次曲線 $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9$ は楕円 $X^2 + Y^2/9 = 1$ を時計回りに 45° 回転させた図形である．なお, 概形の描画については読者に委ねる．自分が描いたものと図形描画ソフトの出力結果を見比べてみるとよい．

4.9 $X(a) = \begin{bmatrix}1 & a\\a & 2\end{bmatrix}$ とおく．固有多項式は $|\lambda E - X(a)| = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - a^2$ であることから, $X(a)$ の固有値は $\lambda = \left(3 \pm \sqrt{4a^2 + 1}\right)/2$ である．従って, 次を導く．

$$X(a) \text{ が正定値} \iff \left(3 - \sqrt{4a^2 + 1}\right)/2 > 0 \iff -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$$

$$X(a) \text{ が半正定値} \iff \left(3 - \sqrt{4a^2 + 1}\right)/2 \geq 0 \iff -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

4.10 正方行列 A は「各行の成分の総和が 1」という条件を満たすと仮定する．このとき, 全ての成分が 1 の列ベクトル $\mathbf{1}$ に対し, $A\mathbf{1} = \mathbf{1}$ が成り立つ．ゆえに, 1 は A の固有値である．

次に, $B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求める．固有多項式は $|\lambda E - B| = \lambda\left(\lambda - \dfrac{1}{3}\right)(\lambda - 1)$ であることから, B の固有値は $\lambda = 0, 1/3, 1$ である．固有値 $\lambda = 0$ の固有ベクトルとして $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$ を, 固有値 $\lambda = 1/3$ の固有ベクトルとして $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}^\top$ を, 固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルとして $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ をとれる．

4.11 零行列でない 3 次の交代行列は $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ と表せる．$A \neq \boldsymbol{O}$ であることから, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ が成り立つことに注意する．ここで, $\omega = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ とおくと

$$\begin{aligned}|\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & -a & -b \\ a & \lambda & -c \\ b & c & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -c \\ c & \lambda \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} -a & -b \\ c & \lambda \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} -a & -b \\ \lambda & -c \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 + c^2) - a(-a\lambda + bc) + b(ac + b\lambda) \\ &= \lambda^3 + \lambda(a^2 + b^2 + c^2) = \lambda(\lambda^2 + \omega^2)\end{aligned}$$

が成り立つ．従って, A の固有値は $\lambda = 0, \pm\omega i$ である．

4.12 $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ とおく．A の固有多項式は $|\lambda E - A| = (\lambda+1)(\lambda-16)$ であることから, A の固有値は $\lambda = -1, 16$ である．固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$ を, 固有値 $\lambda = 16$ の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 8 & 9 \end{bmatrix}^\top$ を選ぶ．$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1} = \dfrac{1}{17}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ であり, かつ $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ となる．従って, 任意の自然数 n に対し

$$\begin{aligned}A^n &= P \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 16^n \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 16^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 9 \cdot (-1)^n + 8 \cdot 16^n & (-8) \cdot (-1)^n + 8 \cdot 16^n \\ (-9) \cdot (-1)^n + 9 \cdot 16^n & 8 \cdot (-1)^n + 9 \cdot 16^n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに, $x_1 = 1$, $y_1 = -1$ のとき

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 9 \cdot (-1)^n + 8 \cdot 16^n & (-8) \cdot (-1)^n + 8 \cdot 16^n \\ (-9) \cdot (-1)^n + 9 \cdot 16^n & 8 \cdot (-1)^n + 9 \cdot 16^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^n \\ (-1)^{n+1} \end{bmatrix}$$

となる．よって, 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項は $x_n = (-1)^{n+1}$, $y_n = (-1)^n$ である．

4.13 λ を A の固有値とし, $\boldsymbol{x}$ を対応する固有ベクトルとする．このとき, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が成り立つ．この式の両辺に左から A を掛けると, $A^2\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{x}) = A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda A\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}$ を得る．同様の議論を繰り返すことにより, $A^k\boldsymbol{x} = \lambda^k\boldsymbol{x}$ であることがわかる．仮定により, $A^k = E$ であることから, $\boldsymbol{x} = \lambda^k\boldsymbol{x}$ となる．$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ により, $\lambda^k = 1$ が従う．

4.14 以下の式変形により示すことができる．27 ページの (1.20) および 179 ページの (4.9) を参照せよ．

$$(A\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = (A\boldsymbol{x})^\top \overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}^\top A^\top \overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}^\top \overline{\left(\overline{A^\top}\boldsymbol{y}\right)} = \boldsymbol{x}^\top \overline{A^*\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x} \cdot (A^*\boldsymbol{y})$$

4.15 (1) $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ とおく．このとき $A^* = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ である．$A^* = A^{-1}$ が成り立つことから, A はユニタリ行列である．また, $\det(A) = -1$ である．さらに, 固有多項式が $|\lambda E - A| = (\lambda - i)^2$ であることから, A の固有値は $\lambda = i$ である．

(2) $B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ とおく．$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = -i$ であることから, 定理 4.35 により B はユニタリ行列ではない．また, $\det(B) = 0$ である．さらに, 固有多項式が $|\lambda E - B| = \lambda(\lambda - \sqrt{2})$ であることから, B の固有値は $\lambda = 0, \sqrt{2}$ である．

(3) $C = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ とおく．このとき $C^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ である．$C^* = C^{-1}$ が成り立つことから, C はユニタリ行列である．また, $\det(C) = 1$ である．固有多項式が $|\lambda E - C| = \lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1$ であることから, C の固有値は $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \pm \dfrac{i}{\sqrt{2}}$ である．

4.16 $(A^*)^* = A$ が成り立つことと, 定理 1.30(1) および定理 4.34(1) により

$$(A + A^*)^* = (A^* + A)^* = (A^*)^* + A^* = A + A^*$$

が従う．ゆえに, $A + A^*$ はエルミート行列である．

4.17 $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ とおく．このとき, $A^\top A = \begin{bmatrix} 72 & -18 \\ -18 & 45 \end{bmatrix}$ となる．$A^\top A$ の固有多項式は $|\lambda E - A^\top A| = (\lambda - 81)(\lambda - 36)$ であることから, $A^\top A$ の固有値は $\lambda = 81, 36$ である．以下, $\sigma_1 = 9$, $\sigma_2 = 6$ とおく．$A^\top A$ の固有値 $\sigma_1^2 = 81$ に対する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^\top$ を, 固有値 $\sigma_2^2 = 36$ に対する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^\top$ を選ぶ．ここで, ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底であることに注意する．さらに $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sigma_1} A\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{9\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 10 & -4 & 17 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sigma_2} A\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}^\top$ とおく．$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ と直交するベクトル $\begin{bmatrix} 4 & -7 & -4 \end{bmatrix}^\top$ を正規化したものを $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & -7 & -4 \end{bmatrix}^\top$ とおく．$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．$U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{9} \begin{bmatrix} 10/\sqrt{5} & 15/\sqrt{5} & 4 \\ -4/\sqrt{5} & 12/\sqrt{5} & -7 \\ 17/\sqrt{5} & -6/\sqrt{5} & -4 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ とおくと, $U \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^\top = A$ および U と V はともに直交行列であることがわかる．

第 5 章　問

問 5.1　平均 5, 分散 8, 標準偏差 $2\sqrt{2}$

問 5.2　S の (i,i) 成分を s_{ii} とする．$\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{1} = n\mu_{\boldsymbol{x}_i}$ および $\boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{1} = n$ により, 次を導く．

$$s_{ii} = \frac{1}{n} (\boldsymbol{x}_i - \mu_{\boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{1}) \cdot (\boldsymbol{x}_i - \mu_{\boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{1}) = \frac{1}{n} \left(\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_i - 2\mu_{\boldsymbol{x}_i} \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{1} + {\mu_{\boldsymbol{x}_i}}^2 \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{1} \right) = \frac{1}{n} \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_i - {\mu_{\boldsymbol{x}_i}}^2 = \mathrm{Var}_{\boldsymbol{x}_i}$$

問 5.3　読者に委ねる．

問 5.4　$\boldsymbol{a} \approx \begin{bmatrix} 2.20 & 1.60 \end{bmatrix}^\top$

問 5.5 $P^2 = \dfrac{1}{100}\begin{bmatrix} 46 & 40 & 14 \\ 30 & 56 & 14 \\ 46 & 24 & 30 \end{bmatrix}$ からわかる. また, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^5 \approx \begin{bmatrix} 0.39 & * & * \end{bmatrix}$ により, 確率は約 39 % である.

問 5.6 $S = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 16 & 5 \\ -1 & -14 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} -7 & -8 & 15 \\ 3 & -3 & 0 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ とおくと, $S^{-1}PS = J$ となる.

よって, $r = 0.4$ とおき, $P = SJS^{-1}$ および $J^n = \begin{bmatrix} r^n & n \cdot r^{n-1} & 0 \\ 0 & r^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に注意すると,

$$P^n = SJ^nS^{-1} = \frac{1}{90}\begin{bmatrix} 55\,r^n - 3\,n\,r^{n-1} + 35 & -40\,r^n + 3\,n\,r^{n-1} + 40 & -15\,r^n + 15 \\ -35\,r^n - 3\,n\,r^{n-1} + 35 & 50\,r^n + 3\,n\,r^{n-1} + 40 & -15\,r^n + 15 \\ -35\,r^n + 15\,n\,r^{n-1} + 35 & -40\,r^n - 15\,n\,r^{n-1} + 40 & 75\,r^n + 15 \end{bmatrix}$$

を得る. さらに, このことから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^n = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 7 & 8 & 3 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ が確認できる.

$P^\top$ の固有値 1 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}^\top$, 固有値 0.4 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ である.

問 5.7 $x(t) = x_0 \cos\omega t + \dfrac{v_0}{\omega}\,\sin\omega t$

問 5.8 $x(t) = \cos\omega t + \cos\sqrt{3}\omega t,\quad y(t) = \cos\omega t - \cos\sqrt{3}\omega t$

付録 A　問

問 A.1 (1) 全射でない, 単射である (2) 全射である, 単射である (3) 全射である, 単射である (4) 全射である, 単射でない (5) 全射でない, 単射である (6) 全射である, 単射でない

問 A.2 〔(a) $\Rightarrow$ (b)〕 f が全単射ならば, 逆写像 g が存在して, $g \circ f = 1_X$ と $f \circ g = 1_Y$ が成り立つ.
〔(a) $\Leftarrow$ (b)〕 任意の $y \in Y$ に対し, $g(y) \in X$ であることに注意すると, $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y$ となる. つまり, $f : g(y) \mapsto y$ となることから, f は全射である. 次に, $x, \tilde{x} \in X$ で $f(x) = f(\tilde{x})$ とすると, $x = g(f(x)) = g(f(\tilde{x})) = \tilde{x}$ が成り立つことから, f は単射である.

問 A.3 例えば, (e) $\Rightarrow$ (c) は, (e) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) と図の矢印を追うことで示すことができる.

問 A.4 $z = x + y\,i$, $w = u + v\,i$ とおく. ただし, $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $z = \overline{z} \iff x + y\,i = x - y\,i \iff y = 0 \iff z \in \mathbb{R}$

(2) $\overline{\overline{z}} = \overline{x - y\,i} = x + y\,i = z$

(3) $\overline{z + w} = \overline{x + y\,i + u + v\,i} = x + u - y\,i - v\,i = \overline{z} + \overline{w}$

(4) $\overline{z\,w} = \overline{(x + y\,i)\,(u + v\,i)} = \overline{x\,u - y\,v + (x\,v + y\,u)\,i} = x\,u - y\,v - (x\,v + y\,u)\,i = (x - y\,i)\,(u - v\,i) = \overline{z}\,\overline{w}$

(5) $\overline{z/w} = \overline{(x + y\,i)\,/\,(u + v\,i)} = \overline{(x + y\,i)\,(u - v\,i)\,/\,(u^2 + v^2)} = (x\,u + y\,v + x\,v\,i - y\,u\,i)\,/\,\left(u^2 + v^2\right)$ に注意すると, $\overline{z}\,/\,\overline{w} = (x - y\,i)\,/\,(u - v\,i) = (x - y\,i)\,(u + v\,i)\,/\,\left(u^2 + v^2\right) = (x\,u + y\,v + x\,v\,i - y\,u\,i)\,/\,\left(u^2 + v^2\right) = \overline{z/w}$

問 A.5 $z = x + y\,i$, $w = u + v\,i$ とおく. ただし, $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$

(2) $z\overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |z|^2$

(3) $|zw| = |(x+yi)(u+vi)| = |(xu-yv)+(xv+yu)i| = \sqrt{(xu-yv)^2+(xv+yu)^2} = \sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)} = \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2} = |z|\,|w|$

(4) $|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z}\,\overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}\,z} = \sqrt{z\,\overline{z}} = |z|$

(5) $|z| = 0 \iff \sqrt{x^2+y^2} = 0 \iff x^2+y^2 = 0 \iff x = y = 0 \iff z = 0$

(6) 両辺が共に非負の数であることに注意する. $\left(x^2+y^2\right)\left(u^2+v^2\right) \geq (x\,u+y\,v)^2$ が成り立つ. 実際

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+y^2\right)\left(u^2+v^2\right) - (x\,u+y\,v)^2 = \left(x^2\,u^2+x^2\,v^2+y^2\,u^2+y^2\,v^2\right) - \left(x^2\,u^2+2\,x\,u\,y\,v+y^2\,v^2\right) \\
&= x^2\,v^2+y^2\,u^2-2\,x\,u\,y\,v = (x\,v-y\,u)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

となることから, この不等式を得る. この両辺に平方根をとると, $\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2} \geq |x\,u+y\,v| \geq x\,u+y\,v$ がわかる. さらに, このことから

$$\begin{aligned}
&(|z|+|w|)^2 - |z+w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 - \left\{(x+u)^2+(y+v)^2\right\} \\
&= \left(x^2+y^2\right) + 2\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{u^2+v^2} + \left(u^2+v^2\right) - \left(x^2+2\,x\,u+u^2+y^2+2\,y\,v+v^2\right) \\
&= 2\,\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{u^2+v^2} - 2\,(x\,u+y\,v) = 2\left\{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{u^2+v^2} - (x\,u+y\,v)\right\} \geq 0
\end{aligned}$$

が得られる. 従って, 三角不等式が示された.